Trabajo Práctico 3

Funciones de varias variables: Integración

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro "Cálculo de varias variables"de Thomas, décimosegunda edición, Ed. Pearson.
Los ejercicios se dividen en ejercicios obligatorios (o), recomendados no obligatorios (r) y opcionales (*).

Jacobianos para cambios de variables:

$$\mathbf{r}(r,\theta) = (\underbrace{r\cos(\theta)}_{x(r,\theta)}, \underbrace{r\,\mathrm{sen}(\theta)}_{y(r,\theta)}); \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

$$\mathbf{r}(r,\theta,z) = (\underbrace{r\cos(\theta)}_{x(r,\theta,z)}, \underbrace{r\,\mathrm{sen}(\theta)}_{y(r,\theta,z)}, \underbrace{z}_{z(r,\theta,z)}); \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\mathbf{r}(\rho,\phi,\theta) = (\underbrace{\rho\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta)}_{x(\rho,\phi,\theta)}, \underbrace{\rho\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta)}_{y(\rho,\phi,\theta)}, \underbrace{\rho\cos(\phi)}_{z(\rho,\phi,\theta)}); \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} \mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta) & \rho\cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) & \rho\cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) & \rho\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi) & -\rho\,\mathrm{sen}(\phi) & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\,\mathrm{sen}(\phi)$$

	Medida	Valor Medio de f	Masa
SÓLIDO D	$\mathrm{Vol}(D) = \iiint_D 1\,dV$	$\frac{1}{\mathrm{Vol}(D)} \iiint_D f\,dV$	$\iiint_D \delta\,dV$
CAPA DELGADA S	$\text{Área}(S) = \iint_S 1\,d\sigma$	$\frac{1}{\text{Área}(S)} \iint_S f\,d\sigma$	$\iint_S \delta\,d\sigma$
Caso especial: $S \subset \mathbb{R}^2$	$\text{Área}(S) = \iint_S 1\,dx\,dy$	$\frac{1}{\text{Área}(S)} \iint_S f\,dx\,dy$	$\iint_S \delta\,dx\,dy$
VARILLA FINA C	$\mathrm{Long}(C) = \int_C 1\,ds$	$\frac{1}{Long(C)} \int_C f\,ds$	$\int_C \delta\,ds$
Casos especiales:			
$C = [a,b] \subset \mathbb{R}$	$\mathrm{Long}(C) = \int_C 1\,ds = b-a$	$\frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx$	$\int_a^b \delta\,dx$
$C \subset \mathbb{R}^2$, gráfico de $g(x)$	$\mathrm{Long}(C) = \int_a^b \underbrace{\sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx}_{ds}$		

	Primeros Momentos			Coord. centro masa		
	M_{yz}	M_{xz}	M_{xy}	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
SÓLIDO D	$\iiint_D x\delta\,dV$	$\iiint_D y\delta\,dV$	$\iiint_D z\delta\,dV$	$\frac{M_{yz}}{M}$	$\frac{M_{xz}}{M}$	$\frac{M_{xy}}{M}$
CAPA DELGADA S	$\iint_S x\delta\,d\sigma$	$\iint_S y\delta\,d\sigma$	$\iint_S z\delta\,d\sigma$			
Caso especial: $S \subset \mathbb{R}^2$	$\iint_S x\delta\,dx\,dy$	$\iint_S y\delta\,dx\,dy$	$\iint_S z\delta\,dx\,dy$			
VARILLA FINA C	$\int_C x\delta\,ds$	$\int_C y\delta\,ds$	$\int_C z\delta\,ds$			

Integrales dobles e iteradas sobre rectángulos

1. Calcule:

   a) (r) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^4 2xy\,dydx$

   b) (r) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (x+y+1)\,dxdy$

c) (o) $\displaystyle\iint_R (6y^2 - 2x)dA$, donde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

d) (r) $\displaystyle\iint_R xy \cos y \, dA$, donde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi\}$

2. (r) Determine el volumen de la región acotada arriba por el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ y abajo por el cuadrado $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ (es decir, $R = [-1,1] \times [-1,1]$).

3. (r) Determine el volumen de la región acotada arriba por la superficie dada por $z = 2 \operatorname{sen} x \cos y$ y abajo por el rectángulo $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{4}]$.

Integrales dobles sobre regiones generales

4. (o) Trace las siguientes regiones de integración:

a) $-1 \leq x \leq 2, \; x - 1 \leq y \leq x^2$

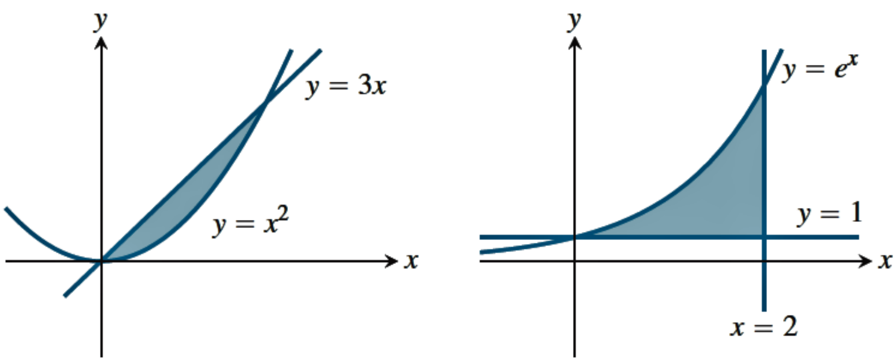
b) $-2 \leq y \leq 2, \, y^2 \leq x \leq 4$

c) $0 \leq y \leq 1, \; y \leq x \leq 2y$

d) $1 \leq x \leq e^2, \; 0 \leq y \leq \ln x$

5. (o) Escriba la integral iterada $\displaystyle\iint_R dA$ sobre la región descrita usando (i) secciones transversales verticales y (ii) secciones transversales horizontales.

a)



b) Región acotada por $y = e^{-x}$, $y = 1$ y $x = \ln 3$

6. (r) Trace la región de integración y evalúe la integral.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen} x} y \, dy \, dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 \int_y^{y^2} dx \, dy$

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy} dx \, dy$

7. (r) Calcule la integral $\iint\limits_R f(s,t)\,dA$ para $f(s,t) = e^s \ln t$ sobre la región del primer cuadrante del plano st que está arriba de la curva $s = \ln t$ desde $t = 1$ hasta $t = 2$. Atención al orden de las variables s y t.

8. (o) Trace la región de integración y evalúe la integral:

   a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-s^2}} 8t dt\, ds$

   b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\sec t} 3\cos t du\, dt$

9. (r) Trace la región de integración y escriba una integral doble equivalente, con el orden de integración inverso.

   a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} dy\, dx$

   b) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \int_0^{9-4x^2} 16x dy\, dx$

   c) $\displaystyle\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x dy\, dx$

10. (r) Trace la región de integración, invierta el orden de integración y evalúe la integral:

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\, dx}{y^4+1}.$$

11. (o) Determine el volumen del sólido acotado arriba por el cilindro de ecuación $z = x^2$ y abajo por la región encerrada por la parábola $y = 2 - x^2$ y la recta $y = x$ en el plano xy.

12. (r) Determine el volumen del sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z + y = 3$.

13. (r) Calcule el volumen del sólido cortado de la columna cuadrada $|x| + |y| \leq 1$ por los planos $z = 0$ y $3x + z = 3$.

14. (r) Trace la región de integración y el sólido cuyo volumen está dado por la integral

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} \sqrt{25 - x^2 - y^2} dx\, dy.$$

15. (r) Evalúe la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y} dy\, dx$ como si fuese una integral iterada.

16. (o) Un cilindro sólido recto (no circular) tiene su base R sobre el plano xy y está acotado por arriba por el paraboloide $z = x^2 + y^2$. El volumen del cilindro es

$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2)\, dx\, dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx\, dy.$$

   Grafique la región base R y exprese el volumen del cilindro como una integral iterada simple con el orden de integración invertido. Luego evalúe la integral para determinar el volumen.

17. (o) ¿Qué región R en el plano xy maximiza el valor de $\displaystyle\iint\limits_R (4 - x^2 - 2y^2)dA$. Justifique su respuesta.

18. (r) ¿Es posible evaluar la integral de una función continua $f(x, y)$ sobre una región rectangular en el plano xy y obtener respuestas diferentes dependiendo del orden de integración? Justifique su respuesta.

19. (r) Pruebe que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dy\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = 4\left(\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2.$$

Áreas por doble integración

20. (r) Trace la región acotada por las rectas y las curvas dadas. Exprese el área de la región como una integral doble iterada y evalúe la integral.

    a) Las rectas $x = 0$, $y = 2x$ y $y = 4$.
    b) La parábola $x = -y^2$ y la recta $y = x + 2$.
    c) La curva $y = e^x$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \ln 2$.
    d) Las parábolas $x = y^2 - 1$ y $x = 2y^2 - 2$.

21. Las siguientes integrales y sumas de integrales dan áreas de regiones en el plano xy. Trace cada región, identifique cada curva de la frontera con su ecuación y obtenga las coordenadas de los puntos donde las curvas se cortan, luego calcule el área de la región.

    a) (o) $\displaystyle\int_0^6\int_{\frac{y^2}{3}}^{2y} dxdy$
    b) (r) $\displaystyle\int_{-1}^2\int_{y^2}^{y+2} dxdy$
    c) (o) $\displaystyle\int_{-1}^0\int_{-2x}^{1-x} dydx + \int_0^2\int_{-\frac{x}{2}}^{1-x} dydx$

22. (r) Calcule el valor promedio de $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$ sobre

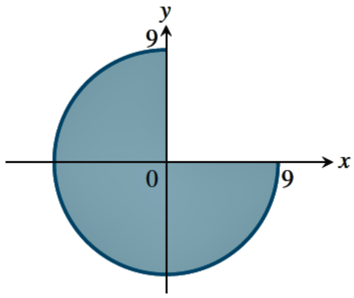
    a) el rectángulo $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi$;
    b) el rectángulo $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.

23. (r) ¿Qué piensa que será mayor, el valor promedio de $f(x, y) = xy$ sobre el cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ o el valor promedio de f sobre el cuarto de círculo $x^2 + y^2 \le 1$ en el primer cuadrante? Calcúlelos para responder.

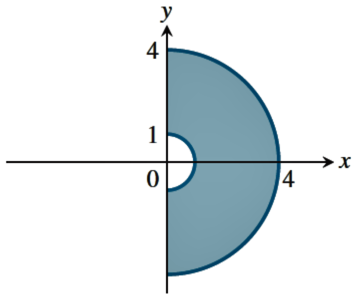
Integrales dobles en forma polar

24. (o) En los ejercicios dados a continuación, describa, en coordenadas polares, la región dada.

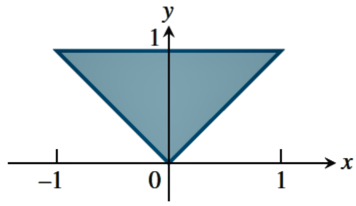
1.



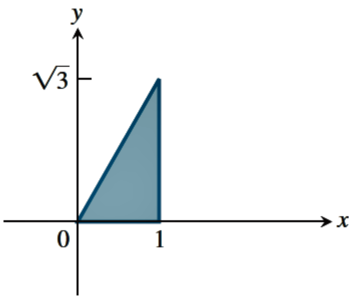
2.



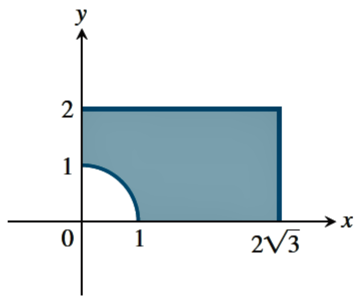
3.



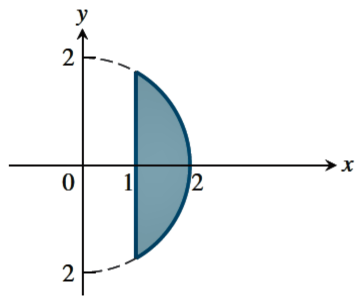
4.



5.



6.



25. (r) Cambie la integral cartesiana por una integral polar equivalente. Luego evalúe la integral polar.

   a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

   b) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \int_{\sqrt{4-y^2}}^{y} dxdy$

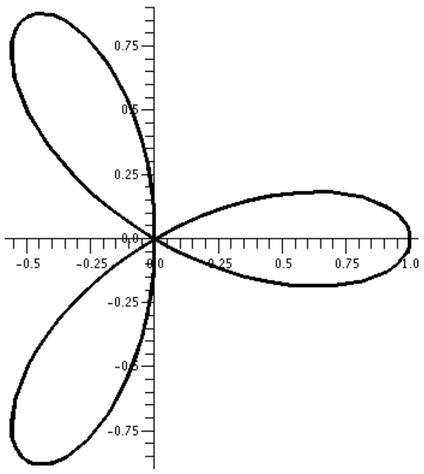
   c) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dydx$

   d) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}dydx$

26. (r) Dada $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta drd\theta$, expresada en coordenadas polares, grafique la región de integración y exprese la misma integral usando coordenadas cartesianas. No evalúe la integral.

27. (r) Obtenga el área de la región que se encuentra dentro de la cardioide $r = 1+\cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$.

28. (r) Obtenga el área encerrada en el pétalo de una rosa $r = \cos(3\theta)$.



29. (r) Determine la altura promedio de la superficie hemisférica $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ sobre el disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ en el plano xy.

30. (r) Obtenga la distancia promedio desde un punto $P(x, y)$ del disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ hasta el origen.

31. (r) Integre $f(x, y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}$ sobre la región $1 \leq x^2 + y^2 \leq e$.

32. (r) La región que se encuentra dentro de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ y afuera de la circunferencia $r = 1$ es la base de un cilindro recto sólido. La parte superior del cilindro está en el plano $z = x$. Determine el volumen del cilindro.

33. (r) La manera usual de evaluar la integral impropia $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ es calcular primero su cuadrado:

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy\right) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$

Evalúe la última integral usando coordenadas polares y despeje I de la ecuación resultante.

Integrales triples en coordenadas rectangulares

34. (r) Escriba seis diferentes integrales triples iteradas que permitan calcular el volumen del sólido rectangular en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$. Evalúe una de ellas.

35. (o) Escriba seis diferentes integrales triples iteradas que permitan calcular el volumen del tetraedro determinado en el primer octante por el plano $6x + 3y + 2z = 6$. Evalúe una de las integrales.

36. (o) Sea D la región acotada por los paraboloides $z = 8 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$. Escriba algunas integrales triples que permitan calcular el volumen de D. Evalúe una de ellas.

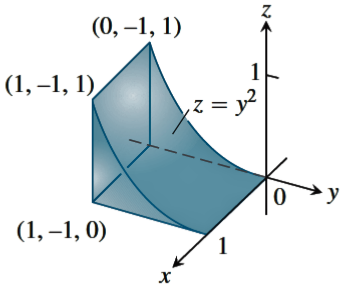
37. (r) Calcule:

$a)$ $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dzdydx$

$b)$ $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dzdydx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} dzdydx$

38. (o) La siguiente es la región de integración de la integral $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^{0} \int_0^{y^2} dzdydx$.



Replantee la integral como una integral iterada equivalente en el orden:

a) $dy\,dz\,dx$

b) $dx\,dy\,dz$

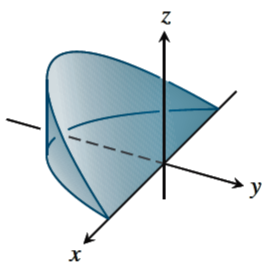
c) $dz\,dx\,dy$

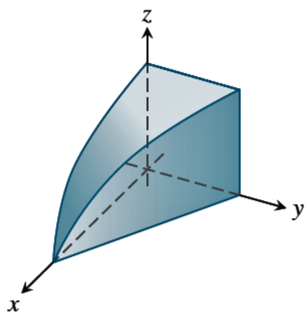
39. (r) Calcule el volumen de

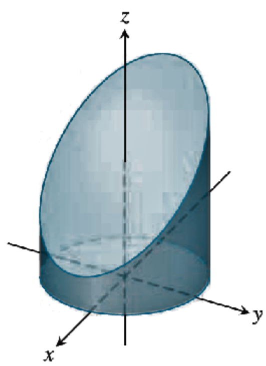
a) la cuña definida en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ por los planos $z = -y$ y $z = 0$ (gráfico 1);

b) la región del primer octante acotada por los planos coordenados, el plano $y = 1 - x$ y la superficie $z = \cos(\pi x/2)$, $0 \le x \le 1$ (gráfico 2);

c) la región cortada en el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ por el plano $z = 0$ y el plano $x + z = 3$ (gráfico 3).







40. (r) Calcule el valor promedio de F en la región dada:

a) $F(x, y, z) = x^2 + 9$ sobre un cubo en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 2$, $y = 2$ y $z = 2$.

b) $F(x, y, z) = x + y - z$ sobre un sólido rectangular en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 2$.

41. (r) Evalúe la siguiente integral cambiando el orden de integración de manera adecuada:
$\displaystyle\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^{2} \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dxdydz$

Momentos y centros de masa (r)

42. Determine el centro de masa de una placa delgada de densidad $\delta = 3$ acotada por las rectas $x = 0$, $y = x$ y la parábola $y = 2 - x^2$ en el primer cuadrante.

43. Determine el centroide (centro de masa en un sólido de densidad constante) de la placa fina ubicada en el primer cuadrante, acotada por el eje x, la parábola $y^2 = 2x$ y la recta $x + y = 4$.

44. Calcule la masa de una placa delgada que ocupa la pequeña región determinada por la elipse $x^2 + 4y^2 = 12$ y por la parábola $x = 4y^2$ si la densidad es $\delta(x, y) = 5x$.

45. Calcule el centro de masa y el momento de inercia, con respecto al eje y, de una placa rectangular delgada cortada en el primer cuadrante por las recctas $x = 6$ y $y = 1$, si $\delta(x, y) = x + y + 1$.

46. Encuentre el centro de masa y el momento de inercia con respecto al eje y, de una placa delgada acotada por la recta $y = 1$ y la parábola $y = x^2$ si la densidad es $\delta(x, y) = y + 1$.

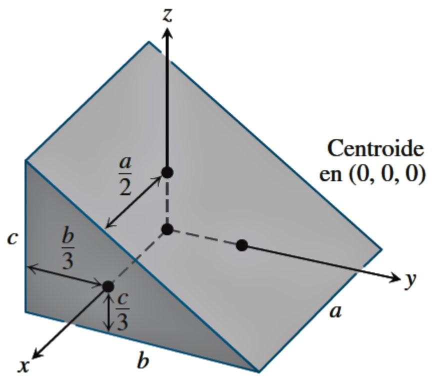
47. Obtenga los momentos de inercia del prisma sólido delimitado por los planos coordenados y los planos $x = a$, $y = b$ y $z = c$ (a, b y c positivos) con respecto a sus aristas mediante el cálculo de I_x, I_y e I_z.

48. Un sólido con densidad constante está acotado abajo por la superficie $z = 4y^2$, arriba por el plano $z = 4$ y en los extremos por los planos $x = 1$ y $x = -1$. Obtenga el centro de masa y los momentos de inercia con respecto a los tres ejes.

49.
    a) Calcule el centro de masa de un sólido de densidad costante acotado abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba por el plano $z = 4$.

    b) Encuentre el plano $z = c$ que divide al sólido en dos partes de igual volumen. Este plano no pasa por el centro de masa.

50. La cuña de la figura tiene las siguientes dimensiones: $a = 4$, $b = 6$ y $c = 3$. Trace una gráfica para convencerse de que el cuadrado de la distancia de un punto típico (x, y, z) de la cuña a la recta $L:\ z = 0\, y = 6$ es $r^2 = (y - 6)^2 + z^2$. Luego calcule el momento de inercia de la cuña con respecto a L.



51. Una región sólida en el primer octante está acotada por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 2$. La densidad del sólido es $\delta(x, y, z) = 2x$. Obtenga la masa y el centro de masa del sólido.

Integrales en coordenadas cilíndricas y esféricas

52. Evalúe las siguientes integrales en coordenadas cilíndricas:

    a) (o) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{r^2/3}^{\sqrt{18-r^2}} dz\, r\, dr d\theta$

    b) (r) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\theta}{2\pi}}\int_0^{3+24r^2} dz\, r\, dr d\theta$

    c) (o) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\theta}{\pi}}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{3\sqrt{4-r^2}} z\, dz\, r\, dr d\theta$

53. (r) Calcule: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{z/3} r^3 dr dz d\theta.$

54. (r) Sea D la región acotada abajo por el plano $z = 0$, arriba por la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$, y a los lados por el cilindro $x^2+y^2 = 1$. Enuncie las integrales triples en coordenadas cilíndricas que dan el volumen de la región D, usando los siguientes órdenes de integración:

    a) $dz\, dr\, d\theta$

    b) $dr\, dz\, d\theta$

55. (r) Dé los límites de integración para evaluar la integral $\displaystyle\iiint f(r,\theta,z) dz\, r\, dr\, d\theta$ como una integral sobre la región acotada abajo por el plano $z = 0$, a los lados por el cilindro $r = \cos\theta$ y arriba por el paraboloide $z = 3r^2$.

56. (o) Convierta la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{x} (x^2+y^2) dz dx dy$ en una integral equivalente en coordenadas cilíndricas y evalúe el resultado.

57. En los siguientes ejercicios, enuncie la integral iterada para evaluar $\iiint_D f(r,\theta,z) dz\, r\, dr\, d\theta$ sobre la región D dada.

    a) (r) D es el cilindro circular recto cuya base es la circunferencia $r = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$ en el plano xy cuya parte superior está en el plano $z = 4 - y$. (Figura 1.)

    b) (r) D es el cilindro recto sólido cuya base es la región del plano xy que está dentro de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ fuera de la circunferencia $r = 1$ y cuya parte superior está en el plano $z = 4$. (Figura 2.)

    c) (o) D es el cilindro recto sólido cuya base es la región entre las circunferencias $r = \cos\theta$ y $r = 2\cos\theta$ y cuya parte superior está en el plano $z = 3 - y$. (Figura 3.)

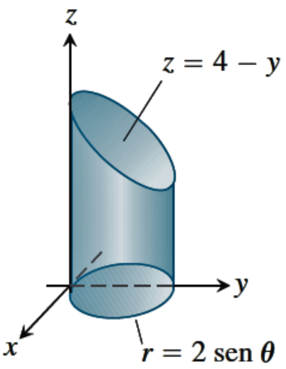


Figura 1

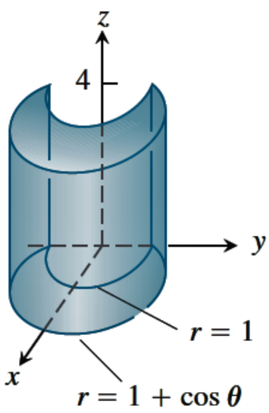


Figura 2

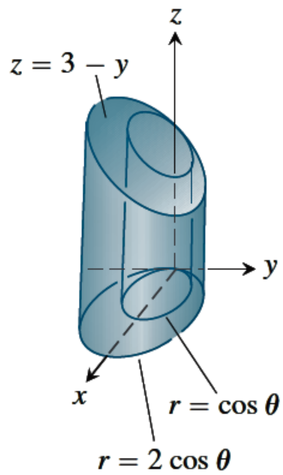


Figura 3

58. (r) Evalúe las siguientes integrales (dadas en coordenadas esféricas).

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\phi} \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

   b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{(1-\cos\phi)/2} \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

   c) $\displaystyle\int_0^{2}\int_{-\pi}^{0}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^3\,\mathrm{sen}(2\phi)\, d\phi\, d\theta\, d\rho$

59. (r) Sea D la región del ejercicio **??**. Enuncie las integrales triples en coordenadas esféricas que dan el volumen de D, usando los siguientes órdenes de integración:

   a) $d\rho\, d\phi\, d\theta$

   b) $d\phi\, d\rho\, d\theta$

60. (o) Para cada uno de los siguientes sólidos, (i) determine los límites en coordenadas esféricas para la integral que da el volumen del sólido dado y (ii) evalúe la integral.

   a) El sólido entre la esfera $\rho = \cos\phi$ y el hemisferio $\rho = 2$, $z \geq 0$. (Figura 4.)

   b) El sólido acotado abajo por la esfera $\rho = 2\cos\phi$ y arriba por el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$. (Figura 5.)

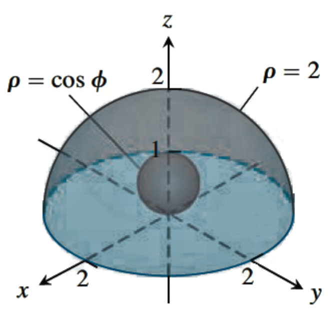


Figura 4

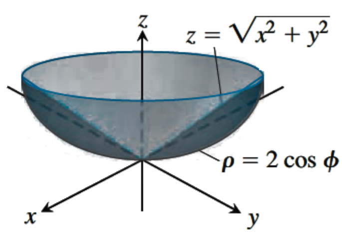
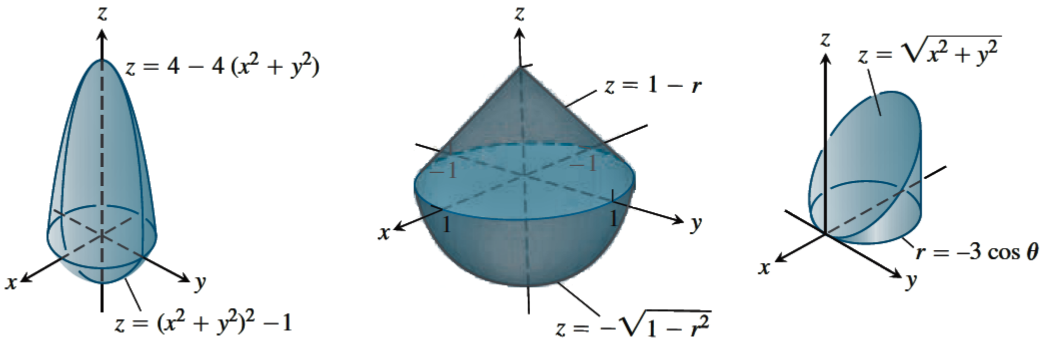


Figura 5

61. (r) Plantee las integrales triples para el volumen de la esfera $\rho = 2$ en coordenadas (i) esféricas, (ii) cilíndricas y (iii) rectangulares.

62. (r) Calcule los volúmenes de los sólidos cuyos gráficos se muestra a continuación.



63. (r) Calcule el volumen de la región más pequeña de la esfera sólida $\rho \leq 2$ cortada por el plano $z = 1$.

64. (r) Calcule el volumen del sólido encerrado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre los planos $z = 1$, $z = 2$.

65. (r) Calcule el volumen de la región que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

66. (r) Calcule el volumen de la región encerrada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y por los planos $z = 0$ y $x + y + z = 4$.

67. (r) Calcule el volumen de la región del cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 1$ cortada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

68. (r) Calcule el volumen de la región acotada arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

69. (r) Calcule el valor promedio de la función dada por $f(r, \theta, z) = r$ sobre la región acotada por el cilindro $r = 1$ que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$.

70. (r) Calcule el valor promedio de la función dada por $f(\rho, \phi, \theta) = \rho$ sobre la bola sólida $\rho \leq 1$.

71. (r) Determine el momento de inercia de una esfera sólida de radio a con respoecto a un diámetro (use $\delta = 1$).

72. (r) Calcule el momento de inercia de un cono circular recto de altura h y base de readio a, con respecto a su eje. (Sugerencia: ponga el cono con su vértice en el origen y su eje a lo largo del eje z.)

73. (r) ¿Qué simetría tendrá una superficie con una ecuación de la forma $r = f(z)$ en coordenadas cilíndricas? Justifique su respuesta.

Sustitución en integrales múltiples (r)

74. Revise los ejemplos del libro.

75. *a*) Resuelva el sistema

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = 2x + y \end{cases}$$

para x y y en términos de u y v. Luego obtenga el valor del jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

b) Encuentre la imagen bajo la transformación $u = x - y$, $v = 2x + y$ de la región triangular con vértices $(0, 0), (1, 1)$ y $(1, -2)$ en el plano xy. Trace la región transformada en el plano uv.

76. Use la transformación del ejercicio anterior para evaluar la integral

$$\iint_R (2x^2 - xy - y^2)\, dx\, dy$$

para la región R del primer cuadrante, acotada por las rectas $y = -2x + 4$, $y = -2x + 7$, $y = x - 2$, $y = x + 1$.

Ejercicios de práctica (r)

77. *a*) Convierta a coordenadas esféricas $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dz\, dy\, dx.$

    b) Evalúe la integral.

78. Escriba una integral triple iterada para la integral de $f(x, y, z) = 6 + 4y$ sobre la región del primer octante acotada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos coordenados en (*i*) coordenadas rectangulares, (*ii*) coordenadas cilíndricas y (*iii*) coordenadas esféricas. Luego (*iv*) determine la integral de f evaluando una de las integrales triples.

79. Las integrales triples que implican formas esféricas no simpre requieren coordenadas esféricas para evaluarse de manera conveniente, algunos cálculos se realizan más fácilmente con coordenadas cilíndricas. Como ejemplo, calcule el volumen de la región acotada arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ y abajo por el plano $z = 2$ usando (*i*) coordenadas cilíndricas y (*ii*) coordenadas esféricas.

80. La base de una pila de arena cubre la región del plano xy acotada por la parábola $x^2+y = 6$ y la recta $y = x$. La altura de la arena sobre el punto (x, y) es x^2. Exprese el volumen de arena como (*i*) una integral doble (*ii*) una integral triple. Luego (*iii*) calcule el volumen.

81. Un tazón semiesférico de $5cm$ de radio se llena con agua hasta $3cm$ de la parte superior. Calcule el volumen de agua en el tazón.

82. Se perfora un agujero cilíndrico circular en una esfera sólida, donde el eje del agujero es un diámetro de la esfera. El volumen del sólido restante es

$$V = 2 \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\sqrt{3}} \int_{1}^{\sqrt{4-z^2}} r\, dr\, dz\, d\theta.$$

    a) Determine el radio del agujero y el de la esfera.

    b) Evalúe la integral.

83. La función gamma, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, amplía la función factorial de los números naturales a otros valores reales. De particular interés es el número

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{(1/2)-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt. \tag{1}$$

    a) Demuestre que $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (Recuerde el ejercicio **??**.)

b) Sustituya $y=\sqrt{t}$ en la ecuación (??) para demostrar que $\Gamma(\frac{1}{2})=2I=\sqrt{\pi}$.

84. *En los primeros tres ítems, indique, justificando su respuesta, si la integral dada representa el volumen de algún sólido. En caso afirmativo, describa el sólido y halle el volumen. En caso contrario, explique por qué no.

   a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{+\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{3} dz\,dy\,dx.$

   b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{+\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{3-x-y} dz\,dy\,dx.$

   c) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{+\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x-y} dz\,dy\,dx.$

   d) En general, para la integral $\displaystyle\int_0^1\int_0^{+\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{m-x-y} dz\,dy\,dx$, indique, justificando su respuesta, cuál debe ser el mínimo valor de m para que la integral represente el volumen de un sólido.

Ejercicios tomados en exámenes (*)

85. Considere la función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z)=x^2-y^2+z^2$.

   a) Describa las superficies de nivel $f(x,y,z)=k$, para $k=1,0$ y -1.

   b) Halle los valores extremos de f, si solo se consideran los puntos de la superficie dada por la ecuación $y^2+z^2=1$.

   c) Halle, si existe, la diferencial (total) de f en el punto $(1,0,0)$.

   d) Calcule $\iiint_E f\,dV$, cuando E es el sólido comprendido entre el cilindro de ecuación $x^2+y^2=1$ y los planos $z=0$ y $z=2$.

86. Convierta la siguiente integral (dada en coordenadas rectangulares) a cilíndricas:

$$\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x\,y\,z^2\,dz\,dy\,dx.$$

87. Dada $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{4-x^2-y^2} dz\,dy\,dx,$

   a) Represente la región de integración.

   b) Calcule la integral planteada.

   c) Interprete el valor obtenido en *b*.

88. Plantee una integral para hallar la masa del sólido que está en el semiespacio $y\geq 0$, comprendido entre las superficies $y=4-x^2-z^2$ y $y=\sqrt{4-x^2-z^2}$, si la densidad en cada punto viene dada por $\delta(x,y,z)$.

89. Indique en cada caso si la afirmación dada es verdadera (V) o falsa (F), **justificando** su respuesta.

   a) $\boxed{}$ Sea f una función continua con valores reales definida en $\mathbb{R}^2$. Entonces

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

b) $\square$ $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{+\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{x+y} (x^2+y^2) z \, dz \, dy \, dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_{r^2}^{r(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)} r^3 z \, dz \, dr \, d\theta.$

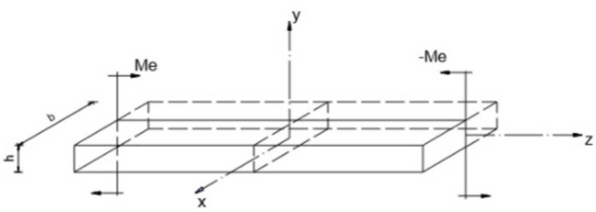
c) $\square$ La masa del sólido que es la parte del cilindro $x^2+y^2 \leq 4$ sobre el plano $z=0$ y bajo la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$, cuya densidad en cada punto viene dada por $\delta(x,y,z)$ se puede calcular como

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(\int_0^5 \delta(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\, dz + \int_5^{9-r^2} \delta(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\, dz \right) r \, dr \, d\theta.$$

Aplicación

En ingeniería estructural, el segundo momento de área, también denominado segundo momento de inercia o momento de inercia de área, es una propiedad geométrica de la sección transversal de elementos estructurales. Físicamente el segundo momento de inercia está relacionado con las tensiones y deformaciones máximas que aparecen por flexión en un elemento estructural y, por tanto, junto con las propiedades del material determina la resistencia máxima de un elemento estructural bajo flexión.

Consideramos una pieza prismática de eje recto y sección transversal cualquiera, sometida a la acción de dos pares iguales y opuestos, actuantes en un plano que también contiene al eje de la pieza.

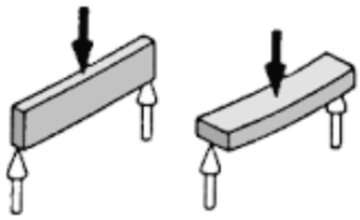


Bajo dicha solicitación se dice que la pieza está sometida a **flexión pura**. En este ejemplo se llama **eje neutro de la pieza** al lugar geométrico de los baricentros de las secciones transversales. Se puede probar que el momento de las fuerzas internas (que se producen en esta flexión) respecto al eje neutro es proporcional al momento de inercia de la sección transversal respecto al eje x.

Si la sección transversal plana S considerada se parametriza mediante coordenadas rectangulares (x,y), entonces podemos definir dos momentos de inercia asociados a la flexión según x o según y mediante:

$$I_x = \iint_S y^2 \, dx \, dy; \qquad I_y = \iint_S x^2 \, dy \, dx.$$

Físicamente representa una magnitud que cuanto mayor sea, corresponde a una menor deformación de la pieza, cuando ésta es solicitada a flexión, con x como eje neutro. La misma depende de la configuración de la sección transversal de la pieza prismática.



Para cada uno de las siguientes piezas, ponga medidas genéricas (b y h para el rectángulo, R para el radio y en el último llame a la base, b, a la altura, h, y al espesor, c) y calcule los momentos de inercia de las secciones transversales de cada una, respecto al eje x. Use una computadora para comparar los valores de I_x dando distintos valores a las dimensiones de cada pieza. Extraiga conclusiones.