Integrales de línea de campos escalares. Campos vectoriales. Integrales de línea de campos vectoriales.

Recorrido

Recorrido

Definición

Definición

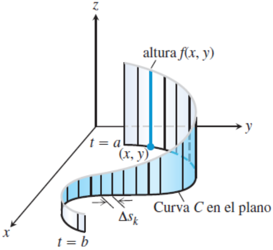
Dada una curva suave C y una representación paramétrica suave de la misma, $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, y dado un campo escalar f definido y continuo en una región abierta D, que contiene a C, se define la integral de línea de f a lo largo de C por

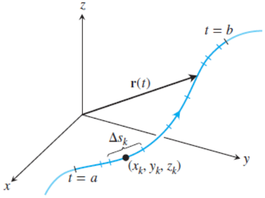
$$\int_C f\, ds := \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt.$$

Observación:

El valor de la integral de línea es independiente de la representación paramétrica suave de la curva C.

Justificación

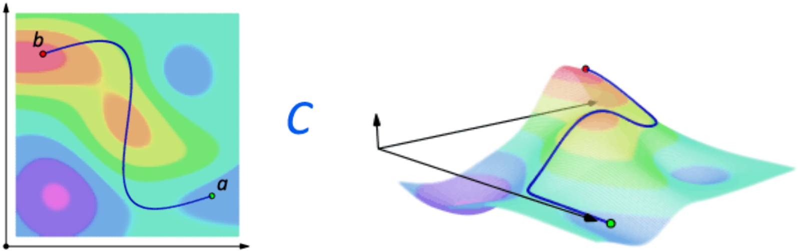




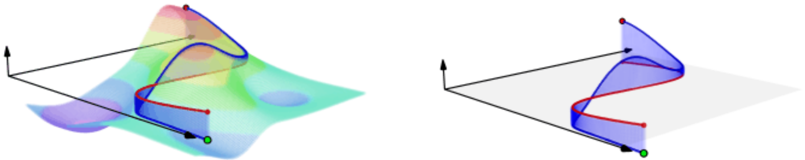
Una partición en $[a, b]$ induce una partición en C.

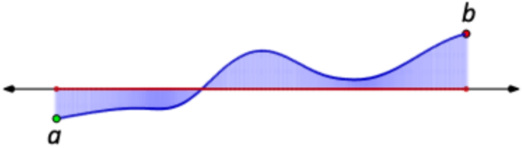
$$\sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{r}(t_k))\Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{r}(t_k))|\mathbf{r}'(t_k)|\Delta t_k.$$

Interpretación



Interpretación





$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\,dt.$$

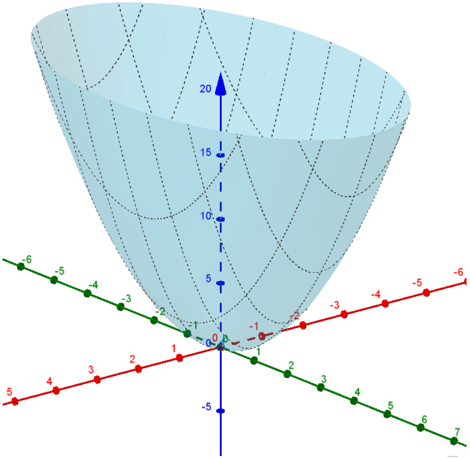
Imágenes tomadas del sitio web de Khan Academy.

Ejemplo: integral de línea-concepto

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

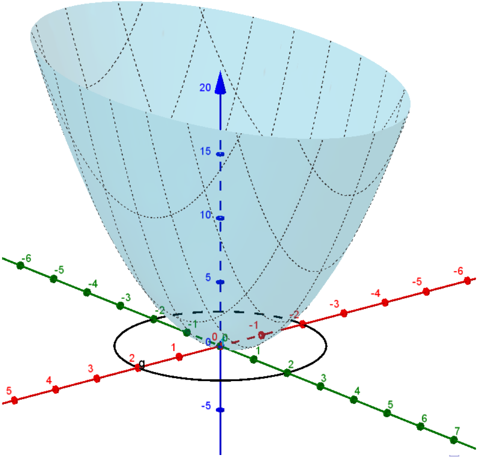


Ejemplo: concepto de integral de línea

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

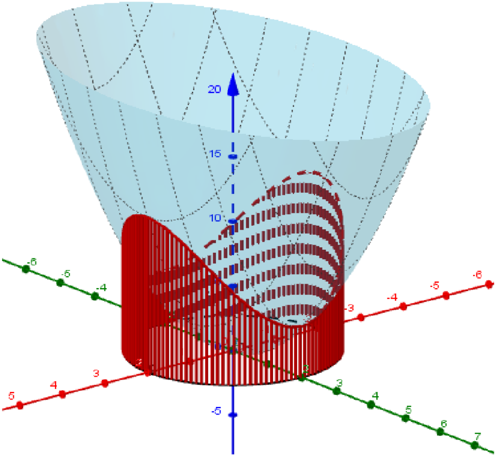


Ejemplo: concepto de integral de línea

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.



Ejemplo: concepto de integral de línea

$$C : \mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t)),\ 0 \leq t \leq 2\pi; \quad \mathbf{r}'(t) = (-2\,\mathrm{sen}(t), 2\cos(t))$$

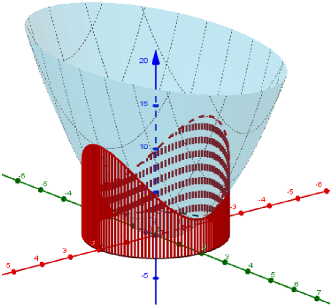
$$\int_C (3x^2 + y^2)\, ds = \int_0^{2\pi'} f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)| dt =$$

Ejemplo: concepto de integral de línea

$$C : \mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t)),\ 0 \le t \le 2\pi; \quad \mathbf{r}'(t) = (-2\,\mathrm{sen}(t), 2\cos(t))$$

$$\int_C (3x^2 + y^2)\, ds = \int_0^{2\pi'} f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt = \int_0^{2\pi} (3\cdot 4\cos^2(t) + 4\sin^2(t))\, 2dt$$

$$= 24\int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt + 8\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2(t)dt = 24\pi + 8\pi = 32\pi.$$



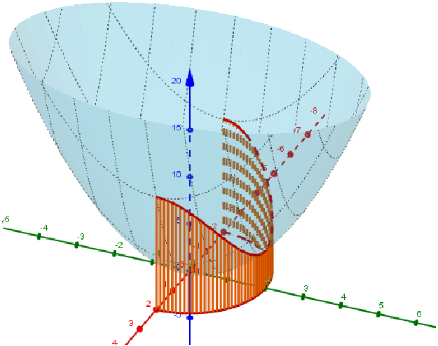
Propiedades

(Sin demostración)

1. **Aditividad:** si la curva C se forma uniendo dos curvas suaves, C_1 y C_2, de manera que el extremo final de C_1 es el extremo inicial de C_2, entonces $\int_C f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds$.
2. **Independencia de la parametrización:** $\int_{C_1} f\,ds = \int_{C_2} f\,ds$ si C_1 y C_2 están formadas por el mismo conjunto de puntos del plano.
3. **Dependencia de la trayectoria:** en general, $\int_{C_1} f\,ds \neq \int_{C_2} f\,ds$ si C_1 y C_2 son dos curvas suaves distintas, aún en el caso en que las curvas tengan los mismos punto inicial y punto final.

Ejemplo: independencia de la parametrización, dependencia de la trayectoria

Calcule el área bajo el gráfico de $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ y sobre la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$.



Ejemplo: independencia de la parametrización, dependencia de la trayectoria

Calcule el área bajo el gráfico de $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ y sobre la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$.
$\mathbf{r}_1(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$; $\mathbf{r}_1'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t)$; $|\mathbf{r}_1'(t)| = 2$

$$A = \int_{C_1} f\,ds = \int_0^{\pi} f(\mathbf{r}_1(t))|\mathbf{r}_1'(t)|dt = \int_0^{\pi} (12\cos^2 t + 4\operatorname{sen}^2 t)\,2\,dt = 16\pi$$

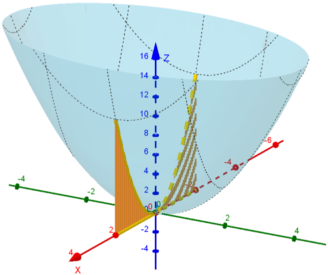
$\mathbf{r}_2(t) = (2\cos(2t), 2\operatorname{sen}(2t))$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;
$\mathbf{r}_2'(t) = (-4\operatorname{sen}(2t), 4\cos(2t))$; $|\mathbf{r}_2'(t)| = 4$

$$A = \int_{C_2} f\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\mathbf{r}_2(t))|\mathbf{r}_2'(t)|dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (12\cos^2(2t) + 4\operatorname{sen}^2(2t))\,4\,dt$$

Ejemplo: independencia de la parametrización, dependencia de la trayectoria

Calcule el área bajo el gráfico de $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ y sobre el segmento desde $(2,0)$ hasta $(-2,0)$.
$\mathbf{r}_3(t) = (2-t, 0)$, $0 \leq t \leq 4$; $\mathbf{r}_3'(t) = (-1,0)$; $|\mathbf{r}_3'(t)| = 1$

$$A = \int_{C_3} f\,ds = \int_0^4 f(\mathbf{r}_3(t))|\mathbf{r}_3'(t)|dt = \int_0^4 3(2-t)^2\,dt = 16$$



Ejercicio

Ejercicio del TP4A:

2. Calcule:

   $c)$ $\displaystyle\int_C x\,ds$, donde C es el segmento de recta $\mathbf{r}(t) = (t, \frac{t}{2})$, $0 \leq t \leq 4$.

Recorrido

Campo vectorial

Definición

Un campo vectorial es una función $\mathbf{F}$ que asigna un vector a cada punto de su dominio,

$$\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Así, a cada vector $(x_1, ..., x_n) \in A$, $\mathbf{F}$ le asigna un vector de $\mathbb{R}^m$ dado por

$$\mathbf{F}(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n));$$

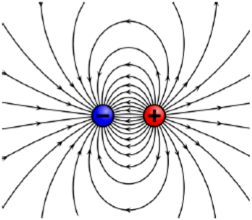
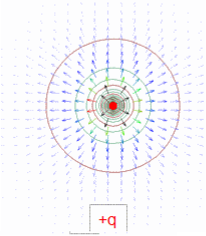
las funciones $f_1, ..., f_m$ se llaman funciones componentes de $\mathbf{F}$.

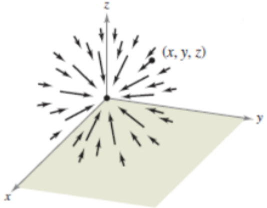
Un campo de vectores en $\mathbb{R}^3$ es de la forma

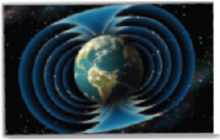
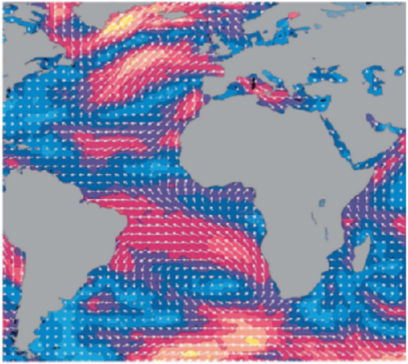
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)),$$

y se presenta, por ejemplo, en los campos de velocidades en un fluido; en los campos gradientes; en los campos de fuerzas en el espacio; en los campos eléctricos, magnéticos o gravitatorios en el espacio, etc.

Campos vectoriales



El gradiente de un campo escalar f, es un campo vectorial.

Ejemplos

- Represente gráficamente los campos vectoriales

$$\mathbf{F}_1(x,y) = (1,x) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}_2(x,y) = (1,y).$$

Trabajen con puntos en el rectángulo $[-2,2] \times [-2,2]$ por lo menos.

Ejemplos

- Represente gráficamente los campos vectoriales

$$\mathbf{F}_1(x,y) = (1,x) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}_2(x,y) = (1,y).$$

  Trabajen con puntos en el rectángulo $[-2,2] \times [-2,2]$ por lo menos.
- Represente gráficamente el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x,y) = (y,x)$.

Campo eléctrico

Una carga puntual q_1 ubicada en (x_1, y_1, z_1) genera un campo eléctrico que, en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ vale $\mathbf{E}_1(x_0, y_0, z_0)$. Este vector $\mathbf{E}_1(x_0, y_0, z_0)$ es

$$E_1(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r},$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector posición del punto P_0 y ε es la permitividad del medio. Una partícula de carga q_0, ubicada en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, se ve afectada por una fuerza $\mathbf{F}_1(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{E}_1(x_0, y_0, z_0) \cdot q_0$.

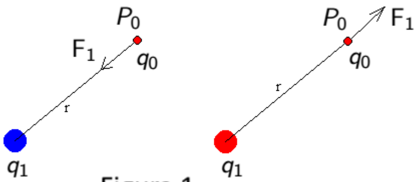


Figura 1

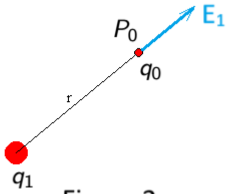
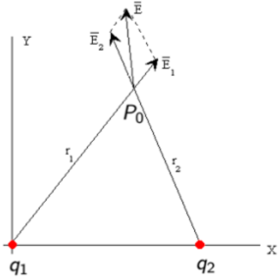


Figura 2

Suma de campos vectoriales (aditividad)

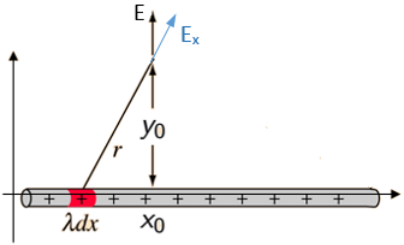
Si una carga puntual q_1 ubicada en $P_1(x_1, y_1, z_1)$ genera un campo eléctrico que, en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ vale $\mathbf{E}_1(x_0, y_0, z_0)$
y si otra carga puntual q_2 ubicada en $P_2(x_2, y_2, z_2)$ genera un campo eléctrico que, en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ vale $\mathbf{E}_2(x_0, y_0, z_0)$,
la presencia de ambas cargas (q_1 y q_2) genera un campo eléctrico que, en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ vale $\mathbf{E}_1(x_0, y_0, z_0) + \mathbf{E}_2(x_0, y_0, z_0)$.



Suma de campos vectoriales (aditividad)

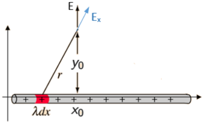
Si en una región plana se tiene un elemento lineal cargado (digamos que se trata del eje x), con una densidad lineal de carga $\lambda(x)$, este genera un campo eléctrico que, en el punto $P_0(x_0, y_0)$ vale
la suma de los efectos producidos por cada elemento de carga en la ubicación $(x, 0)$, que planteamos a través de una integral en la que $\mathbf{r} = (x_0, y_0)$:

$$\mathbf{E}(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\lambda(x)}{|(x_0 - x, y_0)|^3}(x_0 - x, y_0)dx$$



Suma de campos vectoriales (aditividad)

$$\mathbf{E}(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\lambda(x)}{|(x_0 - x, y_0)|^3}(x_0 - x, y_0)dx$$



y, si λ es constante,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(x_0, y_0) =& \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_0 - x, y_0)}{((x_0 - x)^2 + y_0^2)^{3/2}} dx \\
=& \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_0 - x}{((x_0 - x)^2 + y_0^2)^{3/2}} dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0}{((x_0 - x)^2 + y_0^2)^{3/2}} dx \right) \\
=& \frac{\lambda y_0}{4\pi\varepsilon} \left(0, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{((x_0 - x)^2 + y_0^2)^{3/2}} dx \right) \\
=& \frac{\lambda y_0}{4\pi\varepsilon} \left(0, \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{c} \frac{1}{((x_0 - x)^2 + y_0^2)^{3/2}} dx \right) \\
=& \frac{\lambda y_0}{4\pi\varepsilon} \left(0, \lim_{c \to \infty} \left. \frac{x - x_0}{y_0^2 \sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2}} \right|_{-c}^{c} \right) = \left(0, \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon y_0} \right).
\end{aligned}$$

Recorrido

Recorrido

Definición de integrales de línea de campos vectoriales

Definición

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial acotado y con componentes continuas definidas sobre una curva suave C. Se define la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de C como la integral de línea de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ y se denota por:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds.$$

Definición

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial acotado y con componentes continuas definidas sobre una curva suave C. Se define la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de C como la integral de línea de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ y se denota por:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds.$$

Fórmula de cálculo: si C está parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =$$

Definición de integrales de línea de campos vectoriales

Definición

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial acotado y con componentes continuas definidas sobre una curva suave C. Se define la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de C como la integral de línea de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ y se denota por:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds.$$

Fórmula de cálculo: si C está parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt.$$

Notación de integrales de línea

La integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

de un campo vectorial $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva C en el dominio de $\mathbf{F}$, parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, se puede anotar de distintas maneras:

Notación de integrales de línea

La integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

de un campo vectorial $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva C en el dominio de $\mathbf{F}$, parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, se puede anotar de distintas maneras:

1. Si la curva C es cerrada

Notación de integrales de línea

La integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

de un campo vectorial $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva C en el dominio de $\mathbf{F}$, parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, se puede anotar de distintas maneras:

1. Si la curva C es cerrada, se puede anotar

   $$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad \ointctrclockwise_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{o} \quad \ointclockwise_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

   donde las flechas indican el sentido (antihorario u horario).

Notación de integrales de línea

La integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

de un campo vectorial $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva C en el dominio de $\mathbf{F}$, parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, se puede anotar de distintas maneras:

1. Si la curva C es cerrada, se puede anotar

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad \circlearrowleft\!\!\!\!\!\!\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{o} \quad \circlearrowright\!\!\!\!\!\!\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

   donde las flechas indican el sentido (antihorario u horario).

2. Si la curva C une los puntos $A = \mathbf{r}(a)$ y $B = \mathbf{r}(b)$,

Notación de integrales de línea

La integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

de un campo vectorial $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva C en el dominio de $\mathbf{F}$, parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, se puede anotar de distintas maneras:

1. Si la curva C es cerrada, se puede anotar

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad \ointctrclockwise_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{o} \quad \ointclockwise_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

   donde las flechas indican el sentido (antihorario u horario).

2. Si la curva C une los puntos $A = \mathbf{r}(a)$ y $B = \mathbf{r}(b)$, se puede escribir

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

Notación de integrales de línea

La integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

de un campo vectorial $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva C en el dominio de $\mathbf{F}$, parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, se puede anotar de distintas maneras:

1. Si la curva C es cerrada, se puede anotar

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad \ointctrclockwise_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{o} \quad \ointclockwise_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

donde las flechas indican el sentido (antihorario u horario).

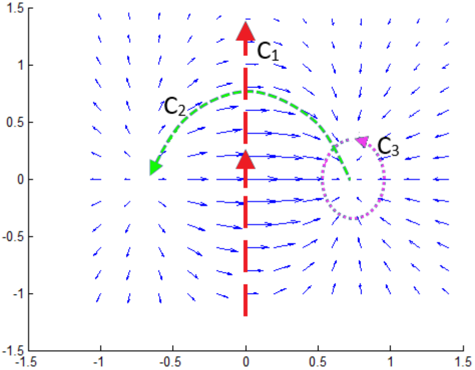
2. Si la curva C une los puntos $A = \mathbf{r}(a)$ y $B = \mathbf{r}(b)$, se puede escribir

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

entendiendo que en general **importa** cuál es la trayectoria C que une A con B.

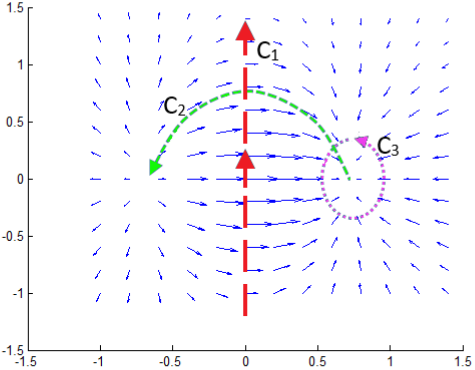
Ejemplo

Sean el campo vectorial $\mathbf{F}$ y las curvas C_1, C_2 y C_3 dados en el siguiente gráfico:



Ejemplo

Sean el campo vectorial $\mathbf{F}$ y las curvas C_1, C_2 y C_3 dados en el siguiente gráfico:



El valor de $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ es 0; el valor de $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ es negativo; el valor de $\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ es cercano a 0.

Observaciones

Observación 1:
El valor de la integral de línea es independiente de la representación paramétrica suave de la curva C, en tanto se mantenga el sentido de recorrido de la curva.

Observación 2:
Si $-C$ es la curva formada por los mismos puntos que C, pero recorrida en sentido contrario, se tiene que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Observación 3:
Se puede calcular integrales de línea en curvas suaves por partes, sumando las integrales de las porciones suaves que la forman.

Integral de línea a través de una curva cerrada

Si C es una curva plana simple, cerrada y positivamente orientada, la integral de línea de $\mathbf{F}$ a través de C es la integral de línea de la componente normal hacia fuera de $\mathbf{F}$ a lo largo de C:

Integral de línea de $\mathbf{F}$ a través de $C = \displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{n}\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt.$

Integral de línea a través de una curva cerrada

Si C es una curva plana simple, cerrada y positivamente orientada, la integral de línea de $\mathbf{F}$ a través de C es la integral de línea de la componente normal hacia fuera de $\mathbf{F}$ a lo largo de C:

Integral de línea de $\mathbf{F}$ a través de $C = \displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{n}\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt.$

Supongamos $\mathbf{F} = (M, N)$ y C es una curva suave y positivamente orientada dada por $\mathbf{r}(t)$ ($a \leq t \leq b$). Entonces

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \int_C \mathbf{n}\cdot\mathbf{F}\,ds = \int_C \mathbf{T}\times\mathbf{k}\cdot\mathbf{F}\,ds \\
&= \int_C \mathbf{k}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds \qquad \text{por propiedad del producto mixto} \\
&= \int_C (-N, M)\cdot\mathbf{T}\,ds, \quad \text{ya que } \mathbf{k}\times\mathbf{F} = (-N, M) \\
&= \int_a^b (-N(\mathbf{r}(t)), M(\mathbf{r}(t)))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt
\end{aligned}$$

Recorrido

Aplicaciones a la física

Si $\mathbf{F}$ representa un campo de fuerzas (una fuerza variable), el **trabajo** que realiza $\mathbf{F}$ sobre un cuerpo que se mueve a lo largo de una curva C es $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial (por ejemplo de velocidades), la integral de línea de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ se llama flujo de $\mathbf{F}$ a lo largo de C.

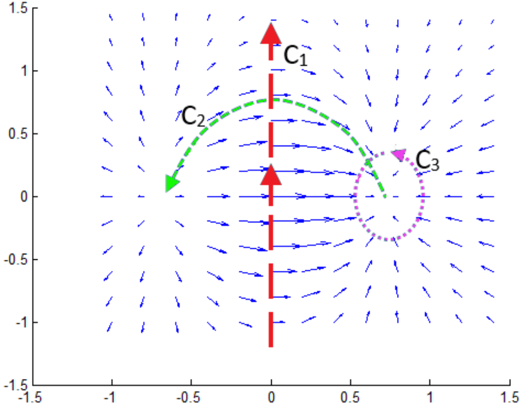
Si C es cerrada, el flujo de $\mathbf{F}$ a lo largo de C se llama circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de C.

Si C es una curva plana simple, cerrada y positivamente orientada, el flujo de $\mathbf{F}$ a través de C es la integral de línea de la componente normal hacia fuera de $\mathbf{F}$ a lo largo de C:

$$\text{Flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds.$$

Ejemplo

Sean el campo vectorial $\mathbf{F}$ y las curvas C_1, C_2 y C_3 dados en el siguiente gráfico:



Indique el signo de $\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$.

Ejemplo:
Dados $\mathbf{F}(x, y) = (x - y, x)$ y la circunferencia C dada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)\,(0 \leq t \leq 2\pi)$, determinar
a) la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de C.
b) el flujo de $\mathbf{F}$ a través y hacia fuera de C.

---

a) Circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de C:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos t - \operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - \operatorname{sen} t \cos t) dt = 2\pi$$

Ejemplo

Ejemplo: Dado $\mathbf{F}(x, y) = (x - y, x)$ determinar
a) la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la circunferencia dada por
$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)\,(0 \leq t \leq 2\pi)$.
b) Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través y hacia fuera de C.

---

b) Flujo de $\mathbf{F}$ a través y hacia fuera de C: $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$

Una manera:
$\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{n}\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t) dt = \pi$$

Ejemplo

Ejemplo: Dado $\mathbf{F}(x,y) = (x-y, x)$ determinar
a) la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la circunferencia dada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)\,(0 \le t \le 2\pi)$.
b) Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través y hacia fuera de C.

---

b) Flujo de $\mathbf{F}$ a través y hacia fuera de C: $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$

Una manera:
$\mathbf{n} = \mathbf{T}\times\mathbf{k} = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{n}\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t)dt = \pi$$

Otra manera: integrar a lo largo de C el campo $\mathbf{G} = (-N, M)$.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds =$$
$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t)dt = \pi$$

Ejemplo

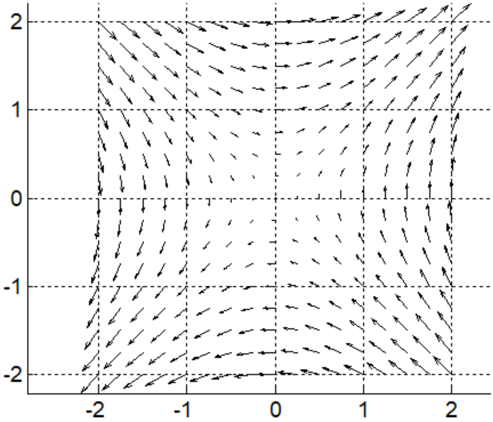
Analice los signos de las integrales de línea (gráficamente, sin calcular), para $\mathbf{F}(x, y) = (y, x)$.

$$\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$C_1 : \mathbf{r}_1(t) = (t, t),\ 0 \leq t \leq 1;$

$C_2 : \mathbf{r}_2(t) = (t, t),\ -1 \leq t \leq 1;$

$C_3 : \mathbf{r}_3(t) = (0, t),\ -1 \leq t \leq 1;$



Otra notación para $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$

Observación: sean $\mathbf{F} = (M, N)$ y C, dada por $\mathbf{r}(t)$ ($a \le t \le b$):

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt \\
&= \int_a^b [M(x(t), y(t))\,x'(t) + N(x(t), y(t))\,y'(t)]dt \\
&= \int_a^b M(x(t), y(t))x'(t)\,dt + \int_a^b N(x(t), y(t))y'(t)dt \\
&= \int_C M\,dx + \int_C N\,dy = \int_C M\,dx + N\,dy
\end{aligned}$$

Otra notación para $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$

Observación: sean $\mathbf{F}=(M,N)$ y C, dada por $\mathbf{r}(t)$ $(a\le t\le b)$:

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \int_C \mathbf{n}\cdot\mathbf{F}\,ds\\ &= \int_C \mathbf{T}\times\mathbf{k}\cdot\mathbf{F}\,ds\\ &= \int_C \mathbf{k}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds, \qquad \text{donde } \mathbf{k}\times\mathbf{F}=(-N,M)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \int_C (-N,M)\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_a^b [-N\,x'(t)+M\,y'(t)]\,dt\\ &= \int_C M\,dy - N\,dx = \int_C M\,dy - \int_C N\,dx\end{aligned}$$

Integral de línea con respecto a los ejes coordenados

Sean $\mathbf{F} = (M, N)$ y C, dada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. A partir de

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds &= \int_a^b M(x(t), y(t))x'(t)\, dt + \int_a^b N(x(t), y(t))y'(t)dt \\ &= \int_C M\, dx + \int_C N\, dy,\end{aligned}$$

si f es un campo escalar, definimos

$$\int_C f\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t)\, dt \quad \text{y} \quad \int_C f\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t))y'(t)\, dt.$$

Calcular $\displaystyle\int_C (x + y^2)dy$ para $C : \mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

$$\int_C (x + y^2)dy = \int_0^\pi (\cos t + \operatorname{sen}^2 t) \cos t\, dt = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Recorrido

Independencia de la trayectoria, campos conservativos y funciones potenciales

Definición

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial definido en una región abierta D tal que para cualesquiera dos puntos A y B de D, la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de una curva suave por partes C desde A hasta B en D es la misma sobre todas las trayectorias suaves por partes desde A hasta B. Entonces la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D y el campo vectorial $\mathbf{F}$ se llama conservativo en D.

Independencia de la trayectoria, campos conservativos y funciones potenciales

Definición

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial definido en una región abierta D tal que para cualesquiera dos puntos A y B de D, la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de una curva suave por partes C desde A hasta B en D es la misma sobre todas las trayectorias suaves por partes desde A hasta B. Entonces la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D y el campo vectorial $\mathbf{F}$ se llama conservativo en D.

Definición

Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial definido en una región abierta D y $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función escalar f en D, entonces f se llama función potencial de $\mathbf{F}$. Si $\mathbf{F}$ está definido en $\mathbb{R}^3$, las superficies de nivel de f se llaman superficies equipotenciales de $\mathbf{F}$; si está definido en $\mathbb{R}^2$, hablamos de curvas equipotenciales.

Líneas de flujo de campos vectoriales

Las líneas de flujo de un campo vectorial $\mathbf{F}$ son aquellas curvas en el dominio de $\mathbf{F}$, tales que el vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ es tangente a la curva en cada punto (x, y, z) del dominio de $\mathbf{F}$. Es decir, son curvas que admiten una parametrización $\mathbf{r}(t)$ tal que

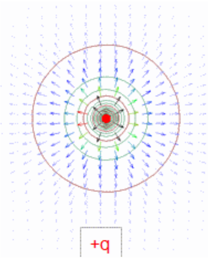
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{r}'(t),\ t \in [a, b].$$

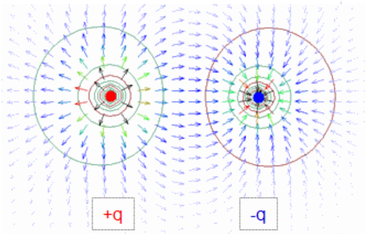
Líneas de flujo de campos vectoriales

Las líneas de flujo de un campo vectorial $\mathbf{F}$ son aquellas curvas en el dominio de $\mathbf{F}$, tales que el vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ es tangente a la curva en cada punto (x, y, z) del dominio de $\mathbf{F}$. Es decir, son curvas que admiten una parametrización $\mathbf{r}(t)$ tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{r}'(t),\ t \in [a, b].$$

¿Cuáles son las líneas de flujo en campos eléctricos generados por una carga puntual o por un dipolo?

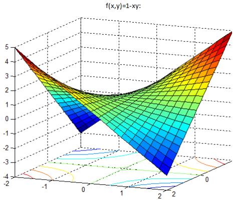


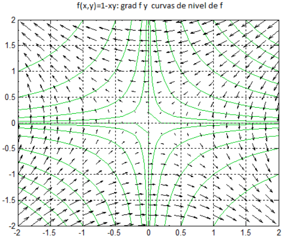


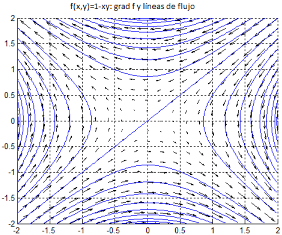
Líneas de flujo de campos vectoriales

Observación 1: En un campo de **velocidades** de un fluido que no varía con el tiempo (estacionario), en general las líneas de flujo coinciden con la trayectoria de una partícula. Pero en un campo de **fuerzas**, aún estacionario, las líneas de fuerza en general no coinciden con las trayectorias (pensar en un cuerpo que cae con velocidad inicial no vertical).

Observación 2: Si el campo vectorial $\mathbf{F}$ es el gradiente de alguna función potencial f, las líneas de flujo de $\mathbf{F}$ son ortogonales a los conjuntos de nivel de f (superficies o curvas equipotenciales) en cada punto.



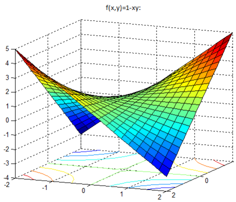


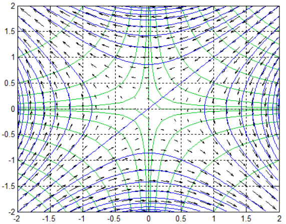


Líneas de flujo de campos vectoriales

Observación 1: En un campo de velocidades de un fluido que no varía con el tiempo (estacionario), en general las líneas de flujo coinciden con la trayectoria de una partícula. Pero en un campo de fuerzas, aún estacionario, las líneas de fuerza no coinciden en general con las trayectorias (pensar en un cuerpo que cae con velocidad inicial no vertical).

Observación 2: Si el campo vectorial $\mathbf{F}$ es el gradiente de alguna función potencial f, las líneas de flujo de $\mathbf{F}$ son ortogonales a los conjuntos de nivel de f (superficies o curvas equipotenciales) en cada punto.





Recorrido

Rotacional y divergencia de campos vectoriales

Definición

Dado $\mathbf{F} = (M, N, P)$, se definen el **rotacional** o rotor y la **divergencia** de $\mathbf{F}$, respectivamente por

Rotacional y divergencia de campos vectoriales

Definición

Dado $\mathbf{F} = (M, N, P)$, se definen el **rotacional** o rotor y la **divergencia** de $\mathbf{F}$, respectivamente por $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y)$

Rotacional y divergencia de campos vectoriales

Definición

Dado $\mathbf{F} = (M, N, P)$, se definen el **rotacional** o rotor y la **divergencia** de $\mathbf{F}$, respectivamente por $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y)$ y $\operatorname{div}\mathbf{F} = M_x + N_y + P_z$.

Rotacional y divergencia de campos vectoriales

Definición

Dado $\mathbf{F} = (M, N, P)$, se definen el **rotacional** o rotor y la **divergencia** de $\mathbf{F}$, respectivamente por $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y)$ y $\operatorname{div} \mathbf{F} = M_x + N_y + P_z$.
Dado un campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N)$ se definen la **componente** $\mathbf{k}$ **del rotacional** y la **divergencia** de $\mathbf{F}$, respectivamente por $\operatorname{rot} \mathbf{F} = N_x - M_y$ y $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) = M_x + N_y$.

Rotacional y divergencia de campos vectoriales

Definición

Dado $\mathbf{F} = (M, N, P)$, se definen el **rotacional** o rotor y la **divergencia** de $\mathbf{F}$, respectivamente por $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y)$ y $\operatorname{div}\mathbf{F} = M_x + N_y + P_z$.
Dado un campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N)$ se definen la **componente k del rotacional** y la **divergencia** de $\mathbf{F}$, respectivamente por $\operatorname{rot}\mathbf{F} = N_x - M_y$ y $\operatorname{div}\mathbf{F}(x, y) = M_x + N_y$.

Observación: una forma conveniente de recordar estas definiciones es por medio del operador **nabla**: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Así, si $\mathbf{F}$ está definido en $\mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

y

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

Rotacional y divergencia de campos vectoriales

Ejemplo:
Si $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2z, xyz^2, x^2yz)$, su rotacional es $\nabla \times \mathbf{F}$:

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z & xyz^2 & x^2yz \end{vmatrix} = (x^2z - 2xyz, xy^2 - 2xyz, yz^2 - 2xyz),$$

y la divergencia de $\mathbf{F}$ es $\nabla \cdot \mathbf{F}$:

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2z) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz) = y^2z + xz^2 + x^2y.$$

Ejemplo

Para $\mathbf{F}(x,y) = (y,x)$ calcule la componente k del rotacional y la divergencia e indique si se trata de un campo irrotacional y/o solenoidal. Además, calcule $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, con C una circunferencia centrada en el origen, con radio $R > 0$.

Ejemplo

Para $\mathbf{F}(x, y) = (y, x)$ calcule la componente k del rotacional y la divergencia e indique si se trata de un campo irrotacional y/o solenoidal. Además, calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, con C una circunferencia centrada en el origen, con radio $R > 0$.

$N_x - M_y = 0,$ $\qquad$ $M_x + N_y = 0,$ $\qquad$ $\mathbf{F}$ es irrotacional y solenoidal.

Ejemplo

Para $\mathbf{F}(x,y)=(y,x)$ calcule la componente k del rotacional y la divergencia e indique si se trata de un campo irrotacional y/o solenoidal. Además, calcule $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, con C una circunferencia centrada en el origen, con radio $R>0$.

$$N_x - M_y = 0, \qquad M_x + N_y = 0, \qquad \mathbf{F} \text{ es irrotacional y solenoidal.}$$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} R\,\mathrm{sen}(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R\,\mathrm{sen}(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix} dt = 0.$$

Recorrido

Conjuntos abiertos conexos y simplemente conexos

Definición

Un conjunto D **abierto** es **conexo** si todo par de puntos de D se pueden unir por una curva suave por partes incluida en D.

Conjuntos abiertos conexos y simplemente conexos

Definición

Un conjunto D **abierto** es **conexo** si todo par de puntos de D se pueden unir por una curva suave por partes incluida en D.

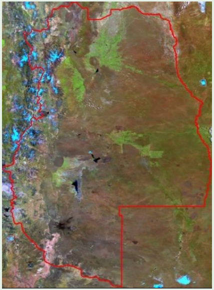
Definición

Un conjunto abierto conexo D es **simplemente conexo** si toda vez que dos puntos de la región se unen por curvas suaves por partes incluidas en D, existe una deformación continua de una curva a la otra también incluida en D.
Equivalentemente:
Un conjunto abierto conexo D es **simplemente conexo** si todo lazo incluido en D puede contraerse continuamente, siempre dentro de D, a un punto incluido en D.

Conjuntos abiertos conexos y simplemente conexos

Ejemplo

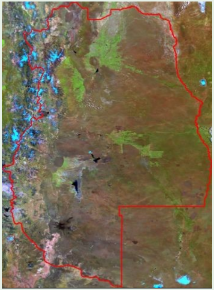
1) Mapa de Mendoza (conexo, simplemente conexo);



Conjuntos abiertos conexos y simplemente conexos

Ejemplo

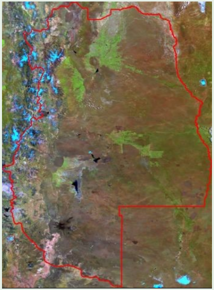
1) Mapa de Mendoza (conexo, simplemente conexo);
2) Mapa de Argentina (no conexo);

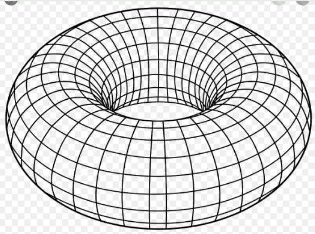


Conjuntos abiertos conexos y simplemente conexos

Ejemplo

1) Mapa de Mendoza (conexo, simplemente conexo);
2) Mapa de Argentina (no conexo);
3) Un toroide (rosquita) (conexo, no simplemente conexo)

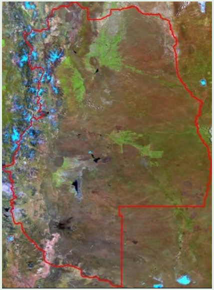


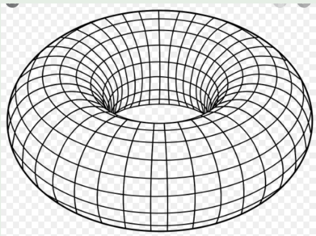


Conjuntos abiertos conexos y simplemente conexos

Ejemplo

1) Mapa de Mendoza (conexo, simplemente conexo);
2) Mapa de Argentina (no conexo);
3) Un toroide (rosquita) (conexo, no simplemente conexo)
4) $\mathbb{R}^2$ sin un punto (conexo, no simplemente conexo);

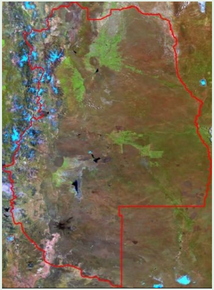


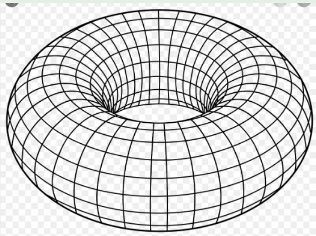


Conjuntos abiertos conexos y simplemente conexos

Ejemplo

1) Mapa de Mendoza (conexo, simplemente conexo);
2) Mapa de Argentina (no conexo);
3) Un toroide (rosquita) (conexo, no simplemente conexo)
4) $\mathbb{R}^2$ sin un punto (conexo, no simplemente conexo);
5) $\mathbb{R}^3$ sin un punto (conexo, simplemente conexo);

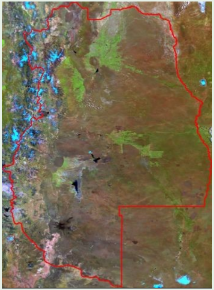


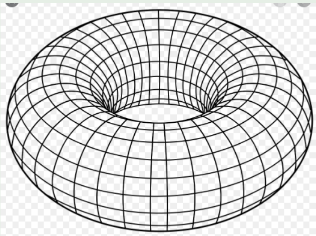


Conjuntos abiertos conexos y simplemente conexos

Ejemplo

1) Mapa de Mendoza (conexo, simplemente conexo);
2) Mapa de Argentina (no conexo);
3) Un toroide (rosquita) (conexo, no simplemente conexo)
4) $\mathbb{R}^2$ sin un punto (conexo, no simplemente conexo);
5) $\mathbb{R}^3$ sin un punto (conexo, simplemente conexo);
6) $\mathbb{R}^3$ sin una recta (conexo, no simplemente conexo);





Teorema Fundamental de integrales de línea

Teorema (Teorema Fundamental de integrales de línea)

Sea C una curva suave que une el punto A con el punto B en el plano o en el espacio. Sea f una función diferenciable con un vector gradiente continuo en una región abierta conexa D que contiene a C. Entonces

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

Idea de la demostración:

Teorema Fundamental de integrales de línea

Teorema (Teorema Fundamental de integrales de línea)

Sea C una curva suave que une el punto A con el punto B en el plano o en el espacio. Sea f una función diferenciable con un vector gradiente continuo en una región abierta conexa D que contiene a C. Entonces

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

Idea de la demostración:
Sea C parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, con $\mathbf{r}(a) = A$ y $\mathbf{r}(b) = B$.
Por la definición de integral de línea de un campo vectorial aplicada al campo vectorial ∇f,

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt. \tag{1}$$

Teorema Fundamental de integrales de línea

Podemos aplicar la regla de la cadena para derivar la función compuesta $f \circ \mathbf{r}$, ya que en todos los puntos de C, f es diferenciable y $\mathbf{r}$ es derivable por hipótesis. Así:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t) = f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \qquad (2)$$

y, sustituyendo (2) en (1) queda

$$\begin{aligned} \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t)\, dt \qquad \text{(Estudiar la aplicación del TFC1)} \\ &= (f \circ \mathbf{r})(t)\Big|_a^b = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) \\ &= f(B) - f(A). \end{aligned}$$

Teorema: los campos conservativos son campos gradientes

Teorema

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ *un campo vectorial cuyos componentes son continuos en una región conexa abierta* D *en el espacio. Entonces* $\mathbf{F}$ *es un campo conservativo si y sólo si* $\mathbf{F}$ *es el gradiente de alguna función (potencial) diferenciable* f*.*

Sin demostración.

REPASO: Independencia de la trayectoria, campos conservativos y funciones potenciales

1. Enuncie las definiciones de campo vectorial conservativo y de integral de línea independiente de la trayectoria en una región D.
2. ¿Todo campo vectorial $\mathbf{F}$ tiene una función potencial?

Teorema: propiedad de lazos en campos conservativos

Teorema

El campo vectorial $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D *si y sólo si para todo lazo* C *en* D*, se tiene* $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$.

Teorema: propiedad de lazos en campos conservativos

Teorema

El campo vectorial $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D *si y sólo si para todo lazo* C *en* D*, se tiene* $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

Idea de la demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que $\mathbf{F}$ es conservativo en D y que la curva C es un lazo en D.

Teorema: propiedad de lazos en campos conservativos

Teorema

El campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo en D si y sólo si para todo lazo C en D, se tiene $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

Idea de la demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que $\mathbf{F}$ es conservativo en D y que la curva C es un lazo en D. Sean A y B dos puntos distintos pertenecientes a la curva C.

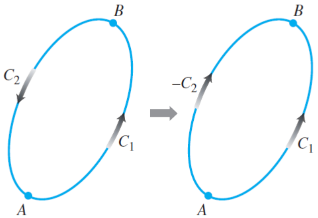
Teorema: propiedad de lazos en campos conservativos

Teorema

El campo vectorial $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D *si y sólo si para todo lazo* C *en* D*, se tiene* $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

Idea de la demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que $\mathbf{F}$ es conservativo en D y que la curva C es un lazo en D. Sean A y B dos puntos distintos pertenecientes a la curva C. Llamemos C_1 a la porción de la curva que va desde A hasta B recorriendo el mismo sentido que lo hacía C y llamemos C_2 a la otra porción.



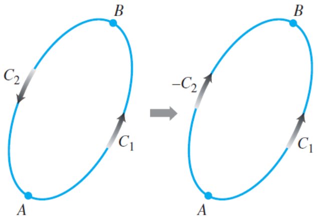
Teorema: propiedad de lazos en campos conservativos

Teorema

El campo vectorial $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D *si y sólo si para todo lazo* C *en* D*, se tiene* $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$

Idea de la demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que $\mathbf{F}$ es conservativo en D y que la curva C es un lazo en D. Sean A y B dos puntos distintos pertenecientes a la curva C. Llamemos C_1 a la porción de la curva que va desde A hasta B recorriendo el mismo sentido que lo hacía C y llamemos C_2 a la otra porción.



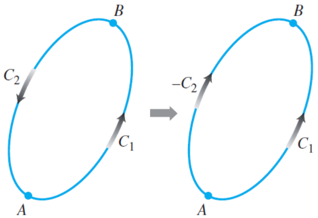
Entonces ambas curvas C_1 y $-C_2$ van desde A hasta B.

Teorema

El campo vectorial $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D *si y sólo si para todo lazo* C *en* D*, se tiene* $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$.

Idea de la demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que $\mathbf{F}$ es conservativo en D y que la curva C es un lazo en D. Sean A y B dos puntos distintos pertenecientes a la curva C. Llamemos C_1 a la porción de la curva que va desde A hasta B recorriendo el mismo sentido que lo hacía C y llamemos C_2 a la otra porción.



Entonces ambas curvas C_1 y $-C_2$ van desde A hasta B. Por hipótesis $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{-C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ y

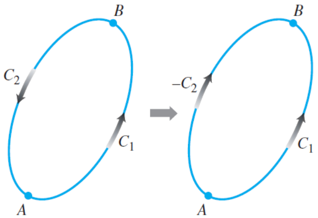
Teorema: propiedad de lazos en campos conservativos

Teorema

El campo vectorial $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D *si y sólo si para todo lazo* C *en* D*, se tiene* $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$.

Idea de la demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que $\mathbf{F}$ es conservativo en D y que la curva C es un lazo en D. Sean A y B dos puntos distintos pertenecientes a la curva C. Llamemos C_1 a la porción de la curva que va desde A hasta B recorriendo el mismo sentido que lo hacía C y llamemos C_2 a la otra porción.



Entonces ambas curvas C_1 y $-C_2$ van desde A hasta B. Por hipótesis $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{-C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ y

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Teorema: propiedad de lazos en campos conservativos

Teorema

El campo vectorial $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D *si y sólo si para todo lazo* C *en* D*, se tiene* $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo lazo C en D.

Teorema: propiedad de lazos en campos conservativos

Teorema

El campo vectorial $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D *si y sólo si para todo lazo* C *en* D*, se tiene* $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

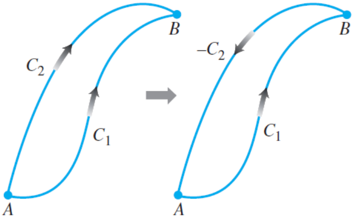
$\Leftarrow$) Supongamos que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo lazo C en D. Sean A y B dos puntos cualesquiera de D y sean C_1 y C_2 dos curvas desde A hasta B.

Teorema: propiedad de lazos en campos conservativos

Teorema

El campo vectorial $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D *si y sólo si para todo lazo* C *en* D*, se tiene* $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo lazo C en D. Sean A y B dos puntos cualesquiera de D y sean C_1 y C_2 dos curvas desde A hasta B. Llamemos C_3 al lazo que se obtiene al tomar C_1 seguida de $-C_2$.

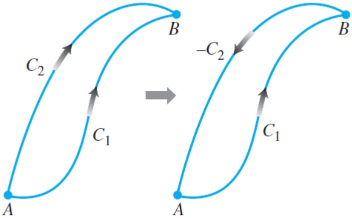


Teorema: propiedad de lazos en campos conservativos

Teorema

El campo vectorial $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D *si y sólo si para todo lazo* C *en* D*, se tiene* $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo lazo C en D. Sean A y B dos puntos cualesquiera de D y sean C_1 y C_2 dos curvas desde A hasta B. Llamemos C_3 al lazo que se obtiene al tomar C_1 seguida de $-C_2$.



Por hipótesis

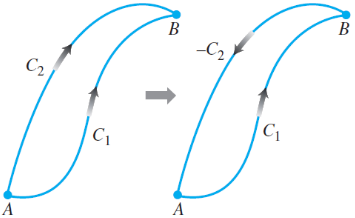
$0 = \int_{C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$

Teorema: propiedad de lazos en campos conservativos

Teorema

El campo vectorial $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D *si y sólo si para todo lazo* C *en* D*, se tiene* $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo lazo C en D. Sean A y B dos puntos cualesquiera de D y sean C_1 y C_2 dos curvas desde A hasta B. Llamemos C_3 al lazo que se obtiene al tomar C_1 seguida de $-C_2$.



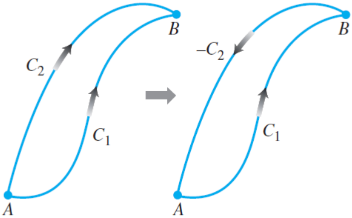
Por hipótesis

$$0 = \int_{C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

Teorema

El campo vectorial $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D *si y sólo si para todo lazo* C *en* D*, se tiene* $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$*.*

$\Leftarrow$) Supongamos que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo lazo C en D. Sean A y B dos puntos cualesquiera de D y sean C_1 y C_2 dos curvas desde A hasta B. Llamemos C_3 al lazo que se obtiene al tomar C_1 seguida de $-C_2$.



Por hipótesis
$0 = \int_{C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.
Así

$$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

Hemos probado que la integral de línea es independiente de la trayectoria en D.

Teorema: criterio de componentes para campos conservativos

Teorema

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ *un campo vectorial definido en un dominio abierto conexo* D*, cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces:*

1. *Si* $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D*, entonces* $\mathbf{rotF} = \mathbf{0}$*.*
2. *Si* D *es simplemente conexo y* $\mathbf{rotF} = \mathbf{0}$ *en* D*, entonces* $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D*.*

Demostración:

1. Supongamos que $\mathbf{F}$ es conservativo y probemos que $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$. TAREA EN AULA.
2. Se probará después de haber probado el Teorema de Stokes.

Hallar la función potencial de un campo conservativo

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, x, 0)$.
a) Determine si $\mathbf{F}$ es o no conservativo (¿dónde?)
b) En caso afirmativo, halle una función potencial de $\mathbf{F}$, f. Si no, explique por qué.

---

a) $\mathbf{rot F} = (0, 0, 0)$ y $D(\mathbf{F}) = \mathbb{R}^3$, luego $\mathbf{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^3$.

Hallar la función potencial de un campo conservativo OJO!!!

$\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y, x, 0)$; halle una función potencial de $\mathbf{F}$, f.

Se busca f tal que $(x+y, x, 0) = (f_x, f_y, f_z)$.

$$f(x,y,z) = \int (x+y)\,dx = \frac{x^2}{2} + xy + g(y,z),$$ donde *g(y,z)* es la constante

$$f_y(x,y,z) = x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + xy + g(y,z)\right) = x \Rightarrow x + g_y(y,z) = x$$

$$\Rightarrow g_y(y,z) = 0 \Rightarrow g(y,z) = h(z)$$

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xy + h(z)$$

$$f_z(x,y,z) = 0 \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = cte.$$

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xy + C.$$

Recorrido

Principio del trabajo y la energía

Si $\mathbf{F}$ representa un **campo de fuerzas** y una partícula de masa m se mueve a lo largo de una curva suave C incluida en el dominio de $\mathbf{F}$, ocupando la posición $\mathbf{r}(t)$, durante un intervalo de tiempo $a \leq t \leq b$, entonces el **trabajo** realizado por $\mathbf{F}$ en ese intervalo es

$$W = \int_{\mathbf{r}(a)}^{\mathbf{r}(b)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt. \tag{3}$$

Según la segunda Ley de Newton, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t)$ con lo cual

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)) = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\|\mathbf{r}'(t)\|^2). \tag{4}$$

Sustituyendo (4) en (3),

$$W = \int_a^b \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\|\mathbf{r}'(t)\|^2)\, dt = \frac{m}{2}\|\mathbf{r}'(t)\|^2\Big|_a^b = \frac{m}{2}\left(\|\mathbf{r}'(b)\|^2 - \|\mathbf{r}'(a)\|^2\right).$$

Recordando que la energía cinética de la partícula está definida por $\frac{1}{2}m\, v^2(t)$, hemos probado que el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ durante un intervalo de tiempo es la variación de la energía cinética en ese intervalo.

Principio de conservación de la energía mecánica

Sea $\mathbf{F}$ un campo de fuerzas continuo con un potencial f en un conjunto conexo abierto D. El T.F. de integrales de línea dice que el trabajo realizado para mover una partícula desde A hasta (x, y, z) a lo largo de una curva suave por partes en D es $f(x, y, z) - f(A)$; antes probamos que el trabajo es la variación de la energía cinética de la partícula, $k(x, y, z) - k(A)$. Luego

$$\begin{aligned} k(x, y, z) - k(A) &= f(x, y, z) - f(A), \\ k(x, y, z) - f(x, y, z) &= k(A) - f(A). \end{aligned} \tag{5}$$

Llamamos energía potencial de la partícula a $-f(x, y, z)$.
Si A se mantiene fijo y (x, y, z) varía en D, (5) dice que $k(x, y, z) + (-f(x, y, z)) = cte$.

Principio de conservación de la energá mecánica

Si un campo de fuerzas es un gradiente, la suma de las energías cinética y potencial de una partícula que se desplaza en dicho campo es constante.

Recorrido

Formas diferenciales exactas

Definición

Cualquier expresión $M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + P(x,y,z)dz$ es una *forma diferencial*. Una *forma diferencial es* **exacta** *en un dominio* D en el espacio si

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$$

para alguna función escalar f en D.

$$\begin{aligned}
\int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz &= \int_C \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \\
&= \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} \qquad (\nabla f \text{ es conservativo}) \\
&= f(B) - f(A) \qquad (\text{T.Fundamental de int. de línea.})
\end{aligned}$$

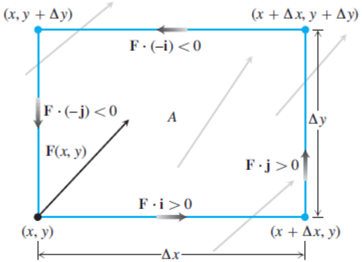
Formas diferenciales exactas

Teorema (Criterio para determinar si una forma diferencial es exacta)

Sea D un conjunto abierto, conexo y simplemente conexo.
La forma diferencial $M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + P(x,y,z)dz$ es exacta en D si y solo si $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ para el campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N, P)$, es decir, si $\mathbf{F}$ es conservativo en D.

Recorrido

Componente k del rotacional



Arriba: $\mathbf{F}(x, y + \Delta y) \cdot (-\mathbf{i})\, \Delta x = -M(x, y + \Delta y)\Delta x$

Abajo: $\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{i}\, \Delta x = M(x, y)\Delta x$

Derecha: $\mathbf{F}(x + \Delta x, y) \cdot \mathbf{j}\, \Delta y = N(x + \Delta x, y)\Delta y$

Izquierda: $\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j})\, \Delta y = -N(x, y)\Delta y.$

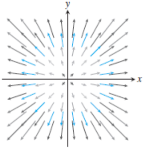
Arriba y abajo: $$-(M(x, y + \Delta y) - M(x, y))\Delta x \approx -\left(\frac{\partial M}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x$$

Derecha e izquierda: $$(N(x + \Delta x, y) - N(x, y))\Delta y \approx \left(\frac{\partial N}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y.$$

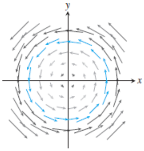
La densidad de circulación de un campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N)$ en el punto (x, y) es el componente k del $\operatorname{rot}\mathbf{F}$: $(\operatorname{rot}\mathbf{F}) \cdot k$:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Componente k del rotacional



(a)



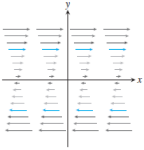
(b)

(a) *Expansión o compresión uniforme:* $\mathbf{F}(x, y) = cx\,\mathbf{i} + cy\,\mathbf{j}$

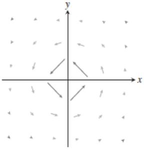
(a) *Expansión uniforme:* $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \dfrac{\partial}{\partial x}(cy) - \dfrac{\partial}{\partial y}(cx) = 0.$

(b) *Rotación uniforme:* $\mathbf{F}(x, y) = -cy\,\mathbf{i} + cx\,\mathbf{j}$

(b) *Rotación:* $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \dfrac{\partial}{\partial x}(cx) - \dfrac{\partial}{\partial y}(-cy) = 2c.$



(c)



(d)

(c) *Flujo cortante:* $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i}$

(c) *Corte:* $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = -\dfrac{\partial}{\partial y}(y) = -1.$

(d) *Efecto remolino:* $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\,\mathbf{i} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,\mathbf{j}$

(d) *Remolino:*

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

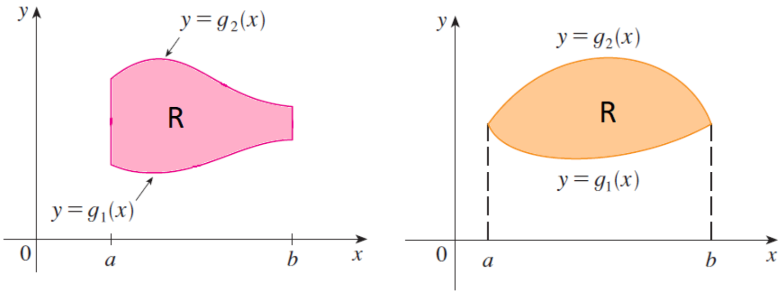
Regiones simples

Una región plana R es de **tipo 1** cuando se puede describir de la siguiente manera:

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

para funciones continuas g_1 y g_2 definidas en $[a,b]$. La figura muestra ejemplos de regiones tipo 1.

Figura: Regiones de tipo 1.



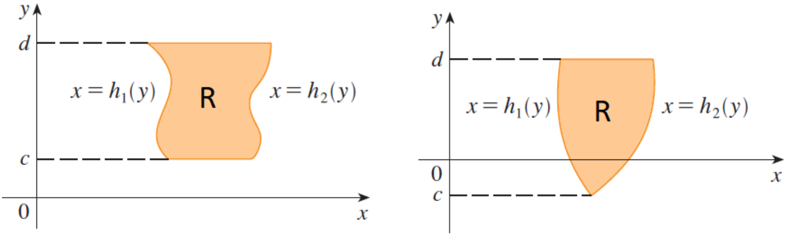
Regiones simples

Una región R es de **tipo 2** cuando se puede describir como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

para funciones continuas h_1 y h_2 definidas en $[c, d]$. La figura muestra ejemplos de regiones de tipo 2.

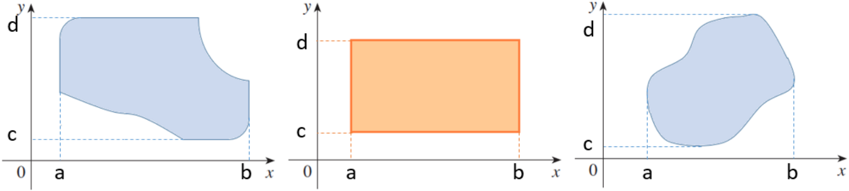
Figura: Regiones de tipo 2.



Regiones simples

Una región que es a la vez de tipo 1 y de tipo 2 se llama **región simple**. La figura muestra ejemplos de regiones simples.

Figura: Regiones simples



Enunciado del Teorema de Green

Teorema (Forma tangencial del Teorema de Green)

Sea C una curva suave por partes, cerrada, simple y positivamente orientada, que encierra una región D en el plano. Sea $\mathbf{F} = (M, N)$ un campo vectorial tal que M y N tienen derivadas parciales de primer orden continuas en una región abierta que contiene a D. Entonces la circulación en sentido antihorario de $\mathbf{F}$ alrededor de C es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy. \tag{6}$$

DEMOSTRAR

Demostración de un caso particular

Se prueba el caso especial en que la región D encerrada por la curva C es simple (debe completarla el estudiante).

Demostración de un caso particular

Se prueba el caso especial en que la región D encerrada por la curva C es simple (debe completarla el estudiante).

Dado que $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \oint_C M dx + N dy$, basta probar:

$$\int_C M(x,y)dx = -\iint_D \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dA \tag{7}$$

y

$$\int_C N(x,y)dy = \iint_D \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)dA \tag{8}$$

Demostración de un caso particular

Se prueba el caso especial en que la región D encerrada por la curva C es simple (debe completarla el estudiante).
Dado que $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \oint_C M\,dx + N\,dy$, basta probar:

$$\int_C M(x,y)dx = -\iint_D \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dA \tag{7}$$

y

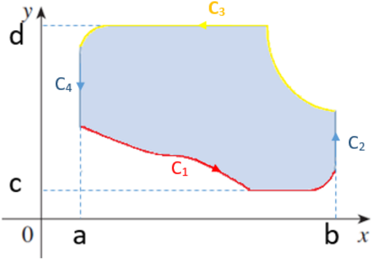
$$\int_C N(x,y)dy = \iint_D \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)dA \tag{8}$$

El lado derecho de la ecuación (7) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_a^b \left[M\left(x,g_2(x)\right) - M\left(x,g_1(x)\right)\right]dx. \end{aligned} \tag{9}$$

Demostración de un caso particular

Para escribir el lado izquierdo de la ecuación (7), sabiendo que D es de tipo 1, se descompone la curva C en cuatro curvas C_1, C_2, C_3 y C_4 (podría ocurrir que alguna de estas curvas solo fuera un punto):

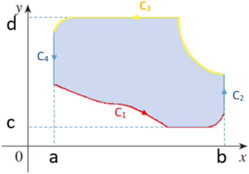


$$\int_C M(x,y)dx = \int_{C_1} M(x,y)dx + \int_{C_2} M(x,y)dx + \int_{C_3} M(x,y)dx + \int_{C_4} M(x,y)dx. \tag{10}$$

Demostración de un caso particular

Parametrizamos las curvas intervinientes (trabajamos con $-C_3$ y $-C_4$):

$$\begin{aligned}
C_1 &: \mathbf{r}_1(t) = (t, g_1(t)),\ (a \leq t \leq b)\\
C_2 &: \mathbf{r}_2(t) = (b, t),\ (c_1 \leq t \leq d_1)\\
-C_3 &: \mathbf{r}_3(t) = (t, g_2(t)),\ (a \leq t \leq b)\\
-C_4 &: \mathbf{r}_4(t) = (a, t),\ (c_2 \leq t \leq d_2)
\end{aligned}$$



Demostración de un caso particular

Aplicando la definición de integral de línea con respecto a x en (10), tenemos

$$\int_C M(x,y)dx =$$
$$\int_{C_1} M(x,y)dx + \int_{C_2} M(x,y)dx - \int_{-C_3} M(x,y)dx - \int_{-C_4} M(x,y)dx$$

Demostración de un caso particular

Aplicando la definición de integral de línea con respecto a x en (10), tenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_C M(x,y)dx = \\
&\int_{C_1} M(x,y)dx + \int_{C_2} M(x,y)dx - \int_{-C_3} M(x,y)dx - \int_{-C_4} M(x,y)dx \\
&= \int_a^b M(t,g_1(t))\,1\,dt + \int_{c_1}^{d_1} M(b,t)\,0dt - \int_a^b M(t,g_2(t))\,dt - \int_{c_2}^{d_2} M(a,t)\,0dt \\
&= \int_a^b M(t,g_1(t))\,dt - \int_a^b M(t,g_2(t))\,dt \\
&= \int_a^b M(x,g_1(x))dx - \int_a^b M(x,g_2(x))dx \\
&= \int_a^b \left[M\left(x,g_1(x)\right) - M\left(x,g_2(x)\right)\right]dx
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Las igualdades (9) y (11) prueban (7).

Demostración de un caso particular

Aplicando la definición de integral de línea con respecto a x en (10), tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_C M(x,y)dx = \\
&\int_{C_1} M(x,y)dx + \int_{C_2} M(x,y)dx - \int_{-C_3} M(x,y)dx - \int_{-C_4} M(x,y)dx \\
&= \int_a^b M(t,g_1(t))\,1\,dt + \int_{c_1}^{d_1} M(b,t)\,0dt - \int_a^b M(t,g_2(t))\,dt - \int_{c_2}^{d_2} M(a,t)\,0dt \\
&= \int_a^b M(t,g_1(t))\,dt - \int_a^b M(t,g_2(t))\,dt \\
&= \int_a^b M(x,g_1(x))dx - \int_a^b M(x,g_2(x))dx \\
&= \int_a^b \left[M\left(x,g_1(x)\right) - M\left(x,g_2(x)\right)\right]dx
\end{aligned} \tag{11}$$

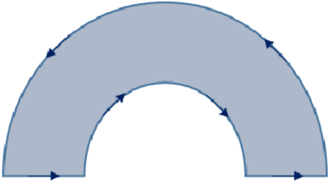
Las igualdades (9) y (11) prueban (7).
La ecuación (8) se puede probar análogamente, expresando D como una región de tipo 2:

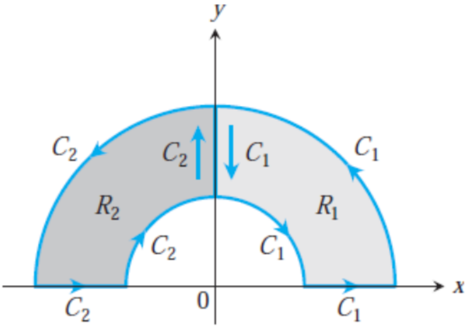
$$D = \{(x,y)\,|\,c \leq y \leq d,\; h_1(y) \leq y \leq h_2(y)\}$$

donde h_1 y h_2 son funciones continuas. Se deja los detalles al estudiante.
De esta manera queda probado el Teorema.

Teorema de Green-otras regiones

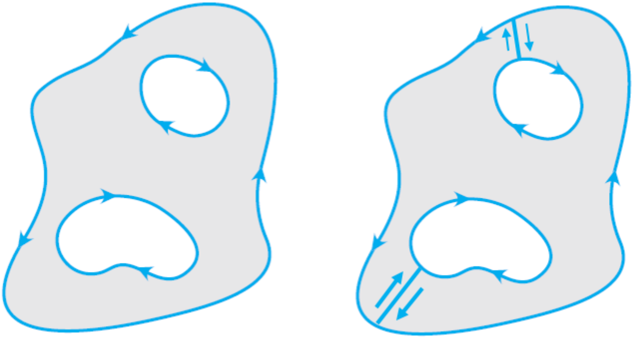
Dada una región que se puede descomponer en la unión disjunta de regiones simples, se puede aplicar el Teorema de Green a cada una de las regiones simples y luego sumar. Sin embargo en las "uniones" estaremos sumando dos integrales de línea en direcciones contrarias y la suma será nula. Véase la imagen presentada a continuación.



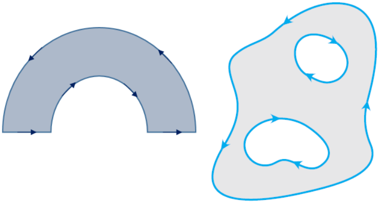


Teorema de Green-otras regiones

Para regiones más generales, la idea es la misma, como muestra la figura siguiente.



Teorema de Green-otras regiones



Preste especial atención a la región de la derecha de la figura, que no es simplemente conexa. Esto implica que tiene una curva frontera “dentro”. ¿Qué significa en este caso “positivamente orientada”? Se da a las curvas una orientación tal que la región R está siempre del lado izquierdo cuando las curvas son recorridas en las direcciones que se indican. Eso significa, en casos como este, que las curvas en la frontera están positivamente orientadas. Con esta convención, el teorema de Green es válido para regiones que no son simplemente conexas.

Teorema de Green-otras regiones

Finalmente hay que observar que, así como enunciamos el teorema de Green para el plano xy, también se aplica para cualquier región plana R contenida en algún plano en el espacio, limitada por una curva C.

Teorema de Green-forma normal

Teorema

Sea C una curva suave por partes, cerrada, simple y positivamente orientada, que encierra una región D en el plano. Sea $\mathbf{F} = (M, N)$ un campo vectorial tal que M y N tienen derivadas parciales de primer orden continuas en una región abierta que contiene a D. Entonces, el flujo de $\mathbf{F}$ a través hacia fuera de C es igual a la doble integral de la divergencia de $\mathbf{F}$ sobre la región D encerrada por C:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Teorema de Green-forma normal

Teorema

Sea C una curva suave por partes, cerrada, simple y positivamente orientada, que encierra una región D en el plano. Sea $\mathbf{F} = (M, N)$ un campo vectorial tal que M y N tienen derivadas parciales de primer orden continuas en una región abierta que contiene a D. Entonces, el flujo de $\mathbf{F}$ a través hacia fuera de C es igual a la doble integral de la divergencia de $\mathbf{F}$ sobre la región D encerrada por C:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Demostración: Vamos a probar que, si es cierta la forma tangencial del teorema, también vale la forma normal del mismo.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \oint_C (-N, M) \cdot \mathbf{T}\, ds.$$

Teorema de Green-forma normal

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \oint_C (-N, M)\cdot\mathbf{T}\,ds.$$

Esta última es la integral de línea de la componente tangencial del campo vectorial, $\mathbf{G} = (-N, M)$, cuyas componentes tienen todas las propiedades necesarias para aplicar el Teorema de Green en su forma tangencial.

Teorema de Green-forma normal

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \oint_C (-N, M) \cdot \mathbf{T}\, ds.$$

Esta última es la integral de línea de la componente tangencial del campo vectorial, $\mathbf{G} = (-N, M)$, cuyas componentes tienen todas las propiedades necesarias para aplicar el Teorema de Green en su forma tangencial.
Luego, según la forma tangencial del Teorema de Green aplicada al campo vectorial $\mathbf{G}$,

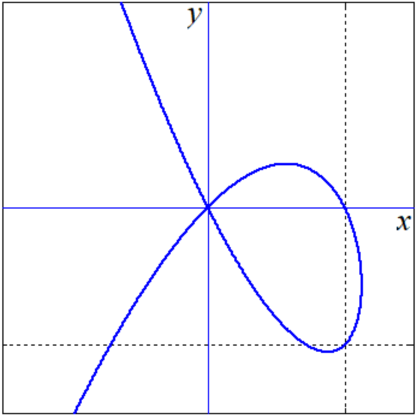
$$\oint_C \mathbf{G} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_D (M_x - (-N_y))\, dA = \iint_D (M_x + N_y)\, dA,$$

y así, hemos probado que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D (M_x + N_y)\, dA.$$

Aplicación

Se desea hallar el área de la región encerrada dentro del lazo que forma la curva dada por
$\mathbf{r}(t) = ((-1)(t+1)(t-2), t(t+1)(t-2)) = (-t^2+t+2, t^3-t^2-2t)$,
$t \in \mathbb{R}$, cuyo gráfico se incluye a continuación.



Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas

El área de una región plana se puede calcular mediante la fórmula $A = \iint_R 1\, dA$.

Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas

El área de una región plana se puede calcular mediante la fórmula $A = \iint_R 1\, dA$.

Si una curva cerrada simple positivamente orientada en el plano, C, y la región R que encierra satisfacen las hipótesis del teorema de Green, el área de R,

$$A = \iint_R 1\, dA,$$

Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas

El área de una región plana se puede calcular mediante la fórmula $A = \iint_R 1\, dA$.
Si una curva cerrada simple positivamente orientada en el plano, C, y la región R que encierra satisfacen las hipótesis del teorema de Green, el área de R,

$$A = \iint_R 1\, dA,$$

en virtud del Teorema de Green, se puede igualar a la integral de línea de un campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N)$ (cuyas componentes deben tener derivadas parciales de primer orden continuas en una región abierta que contenga a R), siempre que $N_x - M_y = 1$.

Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas

El área de una región plana se puede calcular mediante la fórmula $A = \iint_R 1\, dA$.
Si una curva cerrada simple positivamente orientada en el plano, C, y la región R que encierra satisfacen las hipótesis del teorema de Green, el área de R,

$$A = \iint_R 1\, dA,$$

en virtud del Teorema de Green, se puede igualar a la integral de línea de un campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N)$ (cuyas componentes deben tener derivadas parciales de primer orden continuas en una región abierta que contenga a R), siempre que $N_x - M_y = 1$. Por ejemplo si tomamos $\mathbf{F}(x, y) = (-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})$ se satisface esa condición. La condición $N_x - M_y = 1$ también se cumple si tomamos $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$ o $\mathbf{F}(x, y) = (-y, 0)$. Hay más campos vectoriales $\mathbf{F} = (M, N)$ que cumplen $N_x - M_y = 1$: cualquiera de ellos nos llevará al resultado correcto, en tanto se satisfagan las hipótesis del teorema de Green.

Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas

Así, por ejemplo, dado que por el Teorema de Green tenemos

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \oint_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

si se toma

$$M(x,y) := -\frac{y}{2},\ N(x,y) := \frac{x}{2},\ \mathbf{F}(x,y) = (-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})$$

entonces el área de la región R encerrada por la curva C es

$$A = \iint_R 1\,dA = \iint_R (N_x - M_y) dx\,dy = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C M dx + N dy$$

Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas

Así, por ejemplo, dado que por el Teorema de Green tenemos

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \oint_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

si se toma

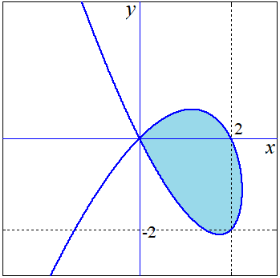
$$M(x,y) := -\frac{y}{2},\ N(x,y) := \frac{x}{2},\ \mathbf{F}(x,y) = (-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})$$

entonces el área de la región R encerrada por la curva C es

$$A = \iint_R 1\,dA = \iint_R (N_x - M_y) dx\,dy = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C M dx + N dy$$

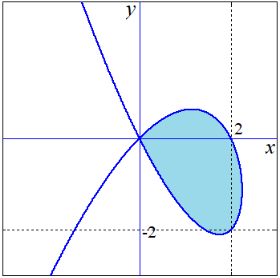
$$A = \frac{1}{2}\oint_C -y dx + x dy.$$

Se desea hallar el área de la región encerrada dentro del lazo que forma la curva dada por
$\mathbf{r}(t) = ((-1)(t+1)(t-2), t(t+1)(t-2)) = (-t^2+t+2, t^3-t^2-2t)$, $t \in \mathbb{R}$, cuyo gráfico se incluye a continuación.



Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas

Se desea hallar el área de la región encerrada dentro del lazo que forma la curva dada por
$\mathbf{r}(t) = ((-1)(t+1)(t-2), t(t+1)(t-2)) = (-t^2+t+2, t^3-t^2-2t)$, $t \in \mathbb{R}$, cuyo gráfico se incluye a continuación.

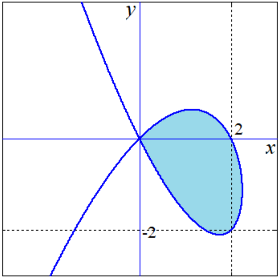


1. Hallar el intervalo para el lazo:

$$\mathbf{r}(-1) = \mathbf{r}(2) = (0,0)$$

Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas

Se desea hallar el área de la región encerrada dentro del lazo que forma la curva dada por
$\mathbf{r}(t) = ((-1)(t+1)(t-2), t(t+1)(t-2)) = (-t^2+t+2, t^3-t^2-2t)$,
$t \in \mathbb{R}$, cuyo gráfico se incluye a continuación.



1. Hallar el intervalo para el lazo:

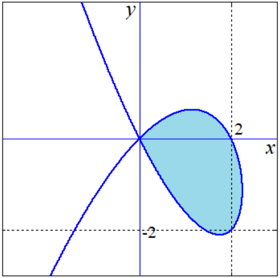
$$\mathbf{r}(-1) = \mathbf{r}(2) = (0,0)$$

2. Plantear y resolver:

$$\iint_R dA = \iint_R (N_x - M_y)\, dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas

Se desea hallar el área de la región encerrada dentro del lazo que forma la curva dada por
$\mathbf{r}(t) = ((-1)(t+1)(t-2), t(t+1)(t-2)) = (-t^2+t+2, t^3-t^2-2t)$,
$t \in \mathbb{R}$, cuyo gráfico se incluye a continuación.



1. Hallar el intervalo para el lazo:

$$\mathbf{r}(-1) = \mathbf{r}(2) = (0,0)$$

2. Plantear y resolver:

$$\iint_R dA = \iint_R (N_x - M_y)\, dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

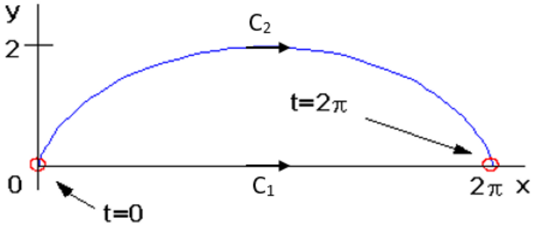
$$A = \int_{-1}^{2} \begin{pmatrix} -t^3+t^2+2t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2t+1 \\ 3t^2-2t-2 \end{pmatrix} dt = -4{,}05$$

Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas

Ejemplo para casa:
Determinar el área de la región encerrada por el arco de la cicloide dado por $\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y el eje x.

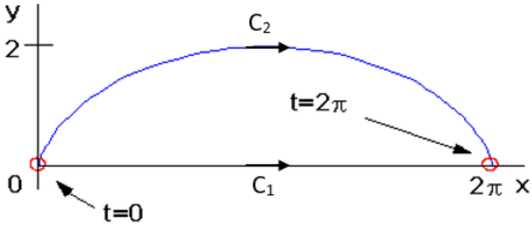
Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas

Ejemplo para casa:
Determinar el área de la región encerrada por el arco de la cicloide dado por $\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y el eje x.



Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas

Ejemplo para casa:
Determinar el área de la región encerrada por el arco de la cicloide dado por $\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y el eje x.



Parametrizamos la curva C_1 que es la porción del eje x entre 0 y 2π: $\mathbf{s}(t) = (t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Y llamamos C_2 a la curva parametrizada por $\mathbf{r}$ que recorre el arco de cicloide de izquierda a derecha; vemos que para cerrar una curva simple necesitamos recorrer este arco en sentido contrario y llamamos a la curva recorrida de derecha a izquierda $-C_2$.

Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas

$$A = \iint_R dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) \cdot \mathbf{s}'(t) dt - \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas

$$A = \iint_R dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) \cdot \mathbf{s}'(t) dt - \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Eligiendo el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$ y resolviendo las integrales que se van presentando, tenemos:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} (0, t) \cdot (1, 0) dt - \int_0^{2\pi} (0, t - \operatorname{sen} t) \cdot (1 - \cos t, \operatorname{sen} t) dt \\ &= 0 - \int_0^{2\pi} (t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t) dt \\ &= -\left(-t \cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt - \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \right) = 3\pi. \end{aligned}$$

Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas

$$A = \iint_R dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) \cdot \mathbf{s}'(t)dt - \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt.$$

Eligiendo el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$ y resolviendo las integrales que se van presentando, tenemos:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} (0, t) \cdot (1, 0)dt - \int_0^{2\pi} (0, t - \operatorname{sen} t) \cdot (1 - \cos t, \operatorname{sen} t)dt \\ &= 0 - \int_0^{2\pi} (t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t)dt \\ &= -\left(-t \cos t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt - \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \right) = 3\pi. \end{aligned}$$

Luego el área buscada es $A = 3\pi$ unidades de área.