

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro “Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera” de Zill y Wright, octava edición, Cengage Learning.

Los ejercicios (o secciones) pueden ser obligatorios (o), recomendados no obligatorios (r) y opcionales (*).

Abreviaturas usadas:

EDO significa Ecuación Diferencial Ordinaria;

PVI significa Problema de Valor/es Inicial/es;

PVF significa Problema de Valor/es en la Frontera.

1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

1.1. Introducción: soluciones, PVI, PVF y diagramas de direcciones

1. (o) Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son o no lineales; indique el orden; distinga variable dependiente y variable independiente.

a) $(x - y)y' - 4xy + 5y = \cos x.$

f) $t \frac{dQ}{dt} + Q = t^4 \ln t.$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y-x}.$

g) $(2x + y + 1)y' = 1.$

c) $(x + 1)\frac{dy}{dx} = -y + 10.$

h) $(2x + \ln x + 1)y' = 1.$

d) $(y^2 + 1)dx = y \sec^2 x dy.$

i) $(1 - x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x.$

e) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x.$

j) $t^5y^{(4)} - t^3y'' + 6y = 0.$

k) $(\sin \theta)y'' - (\cos \theta)y' = 2.$

2. Compruebe que la función indicada es solución explícita de la EDO dada. Indique el intervalo de definición I apropiado para cada solución.

a) (o) $2y' + y = 0; y = e^{-x/2}.$

b) (r) $y' + 20y = 24; y = 6/5 - 6/5e^{-20x}.$

c) (o) $(y - x)y' = y - x + 8; y = x + 4\sqrt{x+2}.$

3. Compruebe que la función indicada es solución implícita de la EDO dada.

a) (o) $y' = (y - 1)(1 - 2y); \ln \frac{2y - 1}{y - 1} = x.$

b) (r) $2xy + (x^2 - y)y' = 0; -2x^2y + y^2 = 1.$

4. Compruebe que la familia de funciones indicada es solución explícita de la ecuación diferencial dada. Indique el intervalo de definición I apropiado para cada solución.

a) (o) $y'' - 4y' + 4y = 0; y = Ae^{2x} + Bxe^{2x}.$

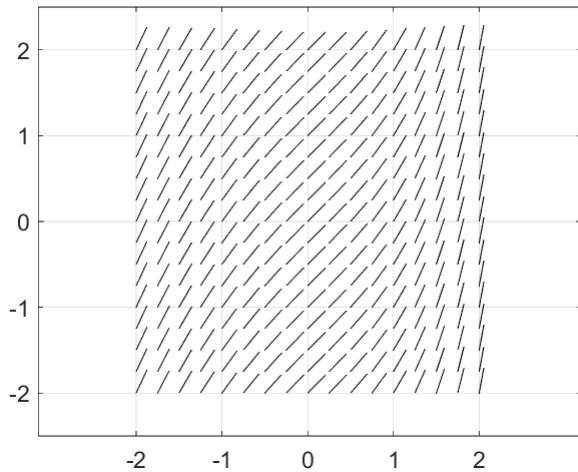
b) (r) $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 12x^2; y = Ax^{-1} + Bx + Cx \ln x + 4x^2.$

5. (r) Sea la ecuación diferencial $y^2y' = \frac{1}{3}$.

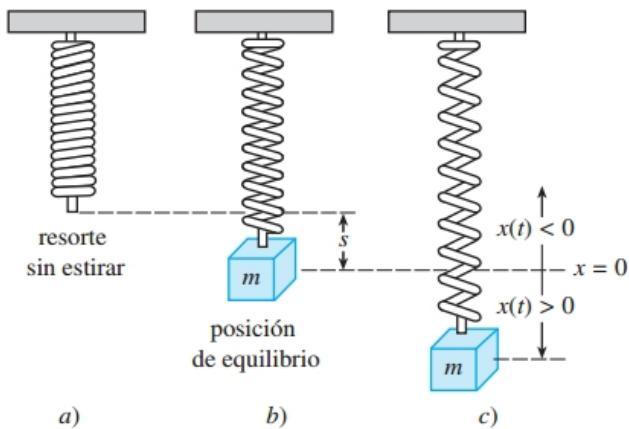
a) Verifique que $y(x) = \sqrt[3]{x}$ es solución de la EDO dada.

b) Para la solución presentada en el ítem a), indique cuál es un intervalo dominio.

6. (r) Determine el o los valores de m para que $y = e^{mx}$ sea solución de la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 0$.
7. Determine los valores de los coeficientes que aparecen en la solución dada de la EDO en cada caso, para resolver el PVI o PVF, según corresponda:
- (o) solución $y = A \cos x + B \sen x$ de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$, con valores iniciales con $y(0) = -1$ y $y'(0) = 8$.
 - (r) solución $y = Ae^x + Be^{-x}$ de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$, con valores iniciales
 - $y(0) = 1, y'(0) = 2$.
 - $y(-1) = 5, y'(-1) = -5$.
 - (o) solución $y = A \cos(2x) + B \sen(2x)$ de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$, con valores de frontera $y(0) = 0$ y $y(\frac{\pi}{4}) = 3$.
 - (r) solución $y = A \cos(2x) + B \sen(2x)$ de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$, con valores de frontera $y(\frac{\pi}{4}) = 0$ y $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.
8. (o) Se desea encontrar una función $y = f(x)$ cuya gráfica en cada punto tenga una pendiente dada por $e^x - x$ y cuyo gráfico interseca al eje y en el punto $(1, -\frac{1}{2})$.
- Plantee un PVI que permita hallarla.
 - Observe el diagrama de direcciones asociado a esta EDO y note que la pendiente en cada punto no depende de la ordenada, sino solo de la abscisa del mismo. Trace la solución de este PVI en el gráfico.



9. (r) Una masa m se fija a un extremo de un resorte. El resorte se estira s unidades y cuelga en reposo en su posición de equilibrio tal como se muestra en la figura. Posteriormente, el sistema se pone en movimiento, siendo $x(t)$ la distancia dirigida del punto de equilibrio a la masa. Suponga que la dirección hacia abajo es positiva y que las fuerzas que actúan sobre el sistema son el peso, la fuerza de restauración del resorte, la fuerza debida a la fricción, que ocasiona un amortiguamiento del movimiento del cuerpo y una fuerza externa que fuerza el movimiento. Determine una ecuación diferencial del desplazamiento (Ley de Hooke: la fuerza de restauración de un resorte es proporcional a su elongación total), para cada caso:



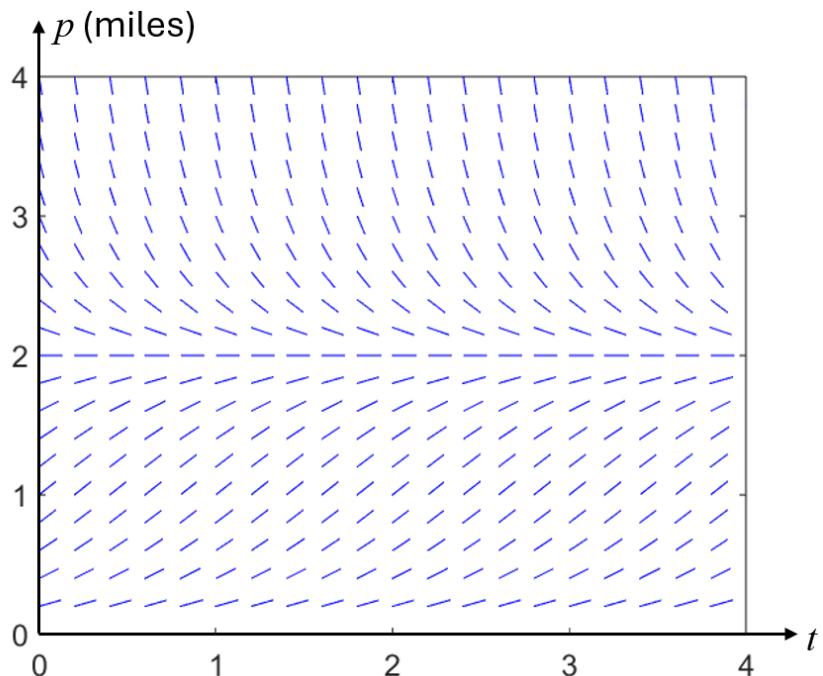
- a) Movimiento libre no amortiguado.
- b) Movimiento libre amortiguado.
- c) Movimiento forzado.

10. (o) La población p (en miles) de determinada especie en el instante t está dada por la ecuación:

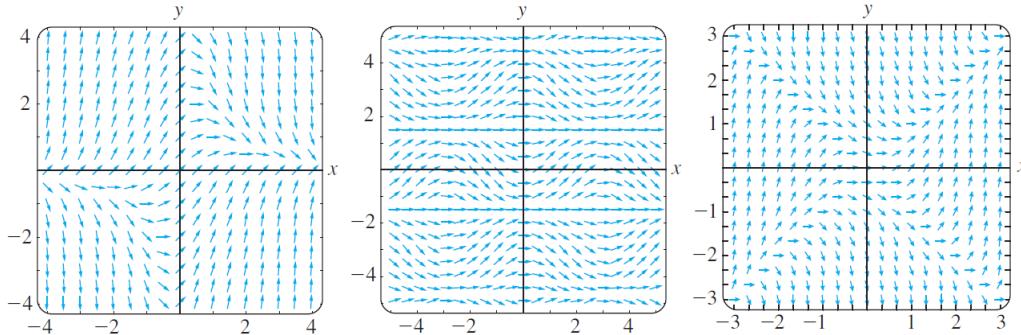
$$\frac{dp}{dt} = p(2 - p).$$

En la siguiente figura se muestra el campo de direcciones correspondiente, analice y responda:

- a) Si la población inicial es 3000 (es decir $p(0) = 3$), ¿qué se puede decir acerca de la población en el límite $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$?
- b) ¿Puede una población de 1000 declinar hasta 500?
- c) ¿Puede una población de 1000 crecer hasta 3000?



11. (r) Dados los siguientes campos direccionales:



a) Indique a qué campo direccional corresponde cada ecuación:

$$i) y' = x^2 - y^2; \quad ii) y' = 1 - xy; \quad iii) \frac{dy}{dx} = \sin(x) \cos(y).$$

b) Para la ecuación dada en ii) represente en el gráfico correspondiente las curvas solución correspondientes a las siguientes condiciones iniciales:

- 1) $y(0) = 0;$
- 2) $y(2) = 2.$

1.2. EDO Separables

12. Resuelva la ecuación diferencial dada por separación de variables, si es posible:

- a) (r) $\frac{dy}{dx} = \sin(5x).$
- b) (o) $dx + e^{3x}dy = 0.$
- c) (r) $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{1 - y^2}$ (Encuentre dos soluciones singulares).

13. (o) Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ y encuentre una solución singular.

14. (o) Resuelva los PVIs que aparecieron en los ejercicios 8 y 10; trace las soluciones en los gráficos correspondientes y constate que coinciden con las halladas anteriormente.

15. (r) Resuelva el siguiente PVI: $\frac{dx}{dt} = 4(x^2 + 1), x(\frac{\pi}{4}) = 1.$

16. (r) De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, si un objeto de temperatura T se introduce en un medio a temperatura M , la razón de cambio de la temperatura es proporcional a la diferencia $M - T$. Esto produce la ecuación diferencial $dT/dt = k(M - T)$.

- a) Resuelva la ecuación diferencial en términos de T .
- b) Una cerveza fría, inicialmente a $2^\circ C$, se calienta hasta $5^\circ C$ en 3 minutos estando en un cuarto a $21^\circ C$. Determine la temperatura de la cerveza si uno se demora 30 minutos en tomarla.

1.3. EDO Lineales

17. En cada caso, verifique que la ecuación diferencial dada es lineal; halle la solución general y el intervalo I en el que está definida.
- (r) $\frac{dy}{dx} = 5y$.
 - (o) $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$.
 - (r) $y' + 3x^2y = x^2$.
18. (o) Resuelva el siguiente PVI: $\frac{dy}{dx} = x + 5y$, $y(0) = 3$.
19. (r) Al determinar el factor integrante en la solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden no usamos una constante de integración en la integral de $P(x)$, indique por qué.

1.4. EDO Exactas

20. (o) Determine si la ecuación diferencial dada es exacta. Si es exacta resuélvala.
- $(2x + y)dx - (x + 6y)dy = 0$.
 - $(y \ln y - e^{-xy})dx + (\frac{1}{y} + x \ln y)dy = 0$.
 - $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)dx + (\cos x + x \cos y - y)dy = 0$.
21. (r) Considere la ecuación diferencial $M(x, y) + N(x, y)y'(x) = 0$. Suponga que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ es conservativo en \mathbb{R}^2 y que f es una función potencial de \mathbf{F} en \mathbb{R}^2 . Si es posible, dé una solución para la ecuación planteada. Si no es posible, explique por qué.

22. (o) Resuelva el siguiente PVI:

$$(4y - 2t - 5)dt + (6y + 4t - 1)dy = 0, y(-1) = 2.$$

23. (r) Determine el valor de k para el que la ecuación diferencial es exacta:

$$(6xy^3 + \cos y)dx + (2kx^2y^2 - x \operatorname{sen} y)dy = 0.$$

24. (r)

- Muestre que una familia de soluciones uniparamétrica de la ecuación $(4xy + 3x^2)dx + (2y + 2x^2)dy = 0$ es $x^3 + 2x^2y + y^2 = c$.
 - Demuestre que las condiciones iniciales $y(0) = -2$ y $y(1) = 1$ determinan la misma solución implícita.
 - Encuentre las soluciones explícitas $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de la ecuación diferencial dada, tales que $y_1(0) = -2$ y $y_2(1) = 1$.
25. (r) Justifique que toda EDO de primer orden separable $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ es exacta.

1.5. EDO con soluciones por sustitución

26. Resuelva las siguientes *ecuaciones de Bernoulli* usando sustituciones adecuadas:

a) (o) $x \frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}$.

b) (r) $\frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$.

c) (o) $x \frac{dy}{dx} + y = x^2y^2$.

27. (o) Resuelva el ejercicio 10 como EDO de Bernoulli. Compare las soluciones halladas gráficamente con las soluciones analíticas correspondientes a los PVIs.

28. (r) En el estudio de la dinámica de población, uno de los más famosos modelos para un crecimiento poblacional limitado es la ecuación logística

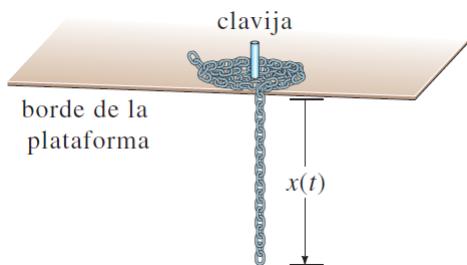
$$P'(t) = P(t)(a - bP(t)),$$

donde a y b son constantes positivas. Resuelva la ecuación, notando que es tanto separable como de Bernoulli. Indique en qué instante la tasa de crecimiento de la población es máxima.

29. (r) Una parte de una cadena de 8 pies de longitud está enrollada sin apretar alrededor de una clavija en el borde de una plataforma horizontal, y la parte restante de la cadena cuelga sobre el borde de la plataforma. Suponga que la longitud de la cadena que cuelga es de 3 pies, que la cadena pesa 2 lb/pie y que la dirección positiva es hacia abajo. Comenzando en $t = 0$ segundos, el peso de la cadena que cuelga causa que la cadena sobre la plataforma se desenrolle suavemente y caiga al piso. Si $x(t)$ denota la longitud de la cadena que cuelga de la mesa al tiempo $t > 0$, entonces $v = dx/dt$ es su velocidad. Cuando se desprecian todas las fuerzas de rozamiento se puede demostrar que un modelo matemático que relaciona v con x está dado por

$$x v v' + v^2 = 32x.$$

Resuelva la ecuación.



1.6. (r) Ejercicios integradores

30. Clasifique cada ecuación diferencial como separable, exacta, lineal, Bernoulli o ninguna. Algunas ecuaciones pueden ser de más de una clase. No las resuelva.

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x}$.

d) $(y^2 + 1)dx = y \sec^2 x dy$.

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y-x}$.

e) $y(\ln x - \ln y)dx = (x \ln x - x \ln y - y)dy$.

c) $(x+1)\frac{dy}{dx} = -y + 10$.

f) $t \frac{dQ}{dt} + Q = t^4 \ln t$.

g) $(2x+y+1)y' = 1$.

31. Clasifique cada ecuación diferencial y resuelva.
- $y' = (xy)^{1/4}$.
 - $y' + y = xe^{-x} + 1$.
 - $2ydx - xdy = 0$.
 - $(2x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + y^2)dy = 0$.
 - $xy' + y = x^4y^3$.
32. Encuentre, si existe, $M(x, y)$ para que la ecuación $M(x, y)dx + (xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x})dy = 0$ sea exacta.
33. Indique si la ecuación diferencial $2xy + x^2y' = 0$ es o no separable, si es o no lineal y si es o no exacta. Justifique.
34. La ecuación diferencial $y^2 + 2xyy' = 0$ es exacta y corresponde a otros tipos también. Usando solamente el hecho de que es exacta, resuelva el problema de valor inicial dado por la ecuación diferencial $y^2 + 2xyy' = 0$, sujeto a la condición $y(1) = 2$.
35. Resuelva $x^2y dx = (y - \frac{x^3}{3}) dy$, tal que $y(1) = 2$.
36. Encuentre una solución general de la siguiente ecuación diferencial: $y' - 2y = x$.

2. Ecuaciones diferenciales de orden superior

2.1. Problemas de valores iniciales y de valores en la frontera

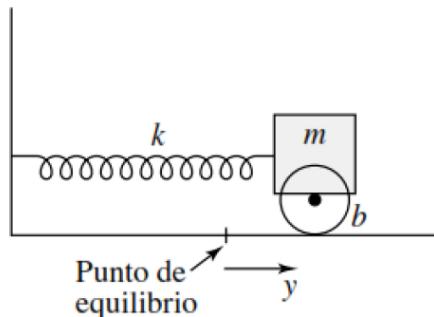
37. En los siguientes problemas se dan las soluciones generales de la ecuación diferencial en el intervalo que se indica. Encuentre el miembro de esta familia que resuelve el problema propuesto de valor inicial o de frontera.
- (r) $y = C_1x + C_2x \ln x$, $x^2y'' - xy' + y = 0$, $(0, \infty)$, $y(1) = 3$, $y'(1) = -1$.
 - (o) $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$, $y'' - y = 0$, $(-\infty, \infty)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
 - (r) $y = C_1e^x \cos x + C_2e^x \sin x$, $y'' - 2y' + 2y = 0$, $(-\infty, \infty)$, $y(0) = 1$, $y'(\pi) = 1$.

2.2. EDO Homogéneas

38. (r) En los siguientes problemas encuentre un intervalo centrado en $x = 0$ para el cual el problema de valor inicial dado tiene una solución única.
- $(x - 2)y'' + 3y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
 - $y'' + (\tan x)y = e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
39. Determine si las siguientes funciones son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, \infty)$:
- (o) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = 4x - 3x^2$.
 - (r) $f_1(x) = 5$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = \sin^2 x$.
 - (r) $f_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$.
40. (r) ¿Qué deben cumplir las funciones y_1 e y_2 definidas en un mismo intervalo I para que $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ sea una solución general de la ecuación diferencial $y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0$ en I , cualesquiera sean las constantes c_1 y c_2 ?

2.3. EDO homogéneas con coeficientes constantes

41. (r) Compruebe que las siguientes funciones forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo dado. Forme la solución general.
- $y'' - y' - 12y = 0; y_1 = e^{-3x}, y_2 = e^{4x}, (-\infty, \infty).$
 - $y^{(4)} + y'' = 0; y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = \cos x, y_4 = \sin x, (-\infty, \infty).$
42. Obtenga la solución general de las siguientes ecuaciones:
- (o) $4y'' + y' = 0.$
 - (o) $y'' + 8y' + 16y = 0.$
 - (o) $y'' - 3y' + 2y = 0.$
 - (r) $2y'' + 2y' + y = 0.$
 - (o) $y''' - 4y'' - 5y' = 0.$
 - (r) $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0.$
 - (o) $y''' + y'' - y' - y = 0.$
 - (r) $y^{(4)} - y'' = 0.$
43. (r) Un cuerpo de masa $m = 1kg$ se cuelga de un resorte cuya constante es $k = 25N/m$. Exprese la ecuación del movimiento para los casos en que el movimiento está amortiguado, considerando que el amortiguamiento se modela a través de un término proporcional a la velocidad (de sentido contrario), cuya constante de proporcionalidad es b . Identifique la frecuencia natural del sistema. Resuelva para los casos en que b vale 0, 6, 10 y 12 (kg/s), con condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$. Interprete cada solución en términos de movimiento subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado.
44. (r) Un oscilador masa-resorte amortiguado está formado por una masa m unida a un resorte fijo en un extremo, como se muestra en la figura. Proponga una ecuación diferencial que gobierne el movimiento de este oscilador, teniendo en cuenta las fuerzas que actúan sobre él debido a la elasticidad del resorte y la fricción (amortiguamiento). Posteriormente, resuelva la ecuación diferencial suponiendo que el amortiguamiento es cero. Determine la frecuencia de oscilación del sistema.



2.4. EDO no Homogéneas

45. (r) En los siguientes problemas compruebe que la familia dada es solución de la ecuación diferencial no homogénea:
- $y'' - 7y' + 10y = 24e^x, y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x} + 6e^x, (-\infty, \infty).$
 - $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x, y = C_1x^{-\frac{1}{2}} + C_2x^{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x, (0, \infty).$

2.5. EDO no Homogéneas con coeficientes constantes

46. En cada caso, obtenga la solución general usando coeficientes indeterminados:
- a) (o) $y'' + y' - 6y = 2x$.
 - b) (o) $y'' + y' - 6y = e^{2x}$.
 - c) (o) $y'' + y' - 6y = 2x - e^{2x}$.
 - d) (r) $y'' + 3y' + 2y = 6$.
 - e) (r) $y'' + 3y' + 2y = 2e^{-x}$.
 - f) (r) $y'' + 3y' + 2y = -6 + e^{-x}$.
 - g) (o) $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$.
 - h) (r) $4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$.
 - i) (r) $y'' + y = \cos x$.
 - j) (r) $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6xe^{2x}$.
 - k) (o) $y^{(4)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}$.
47. En cada caso, obtenga la solución general usando variación de parámetros:
- a) (o) $y'' + y = \sec x$.
 - b) (r) $y'' + y = \tan x$.
 - c) (r) $y'' + y = 2\sec x - \tan x$.
 - d) (o) $y'' + y = \sec^2 x$.
 - e) (r) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$.
 - f) (r) $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$.
 - g) (r) $y'' + 3y' + 2y = 2\operatorname{sen}(e^x) + \frac{5}{1+e^x}$.
48. Obtenga la solución para los siguientes problemas de valor inicial:
- a) (r) $4y'' - y = xe^{\frac{x}{2}}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 - b) (r) $y'' + y' - y = x + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 - c) (o) $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$.
 - d) (r) $y'' + y = x^2 + 1$, $y(0) = 5$, $y(1) = 0$.
49. (r) Un cuerpo de masa $m = 1kg$ se cuelga de un resorte cuya constante es $k = 2N/m$. Suponga que el amortiguamiento depende de $b = 2kg/s$ y se imprime una fuerza que mueve el extremo superior del resorte según $f(t) = 4\cos(t) + 2\operatorname{sen}(t)$. Halle la ecuación del movimiento. Distinga los términos transitorio y de estado estable de la solución.

3. (r) Ejercicios integradores

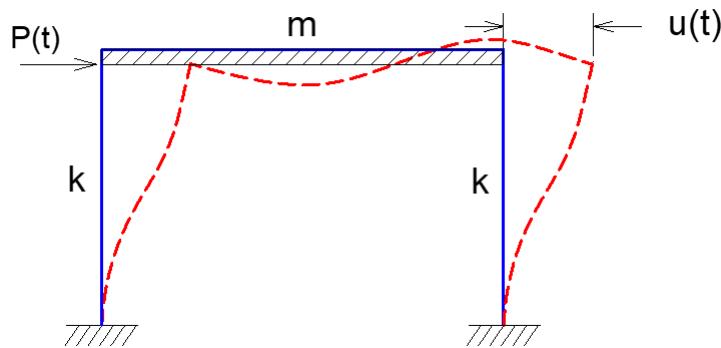
50. Halle la solución general de $y'' - 2y' + y = x^{-2}e^x$, para $x > 0$.
51. Resuelva: $4y'' + 36y = \operatorname{cosec}(3x)$.
52. a) Encuentre una solución general de la siguiente ecuación diferencial:
- $$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 10y = 0. \quad (1)$$
- b) Halle una solución (general) para la siguiente ecuación diferencial:
- $$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 10y = 25\cos(4t). \quad (1)$$
- c) ¿Es verdad que toda solución de (1) es de la forma que usted obtuvo en el ítem anterior? Justifique.
53. Resuelva la ecuación diferencial $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$.
54. Dada la ecuación $y'' - y = 2^x$, se sabe que $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{-x}$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada, $y'' - y = 0$, en el intervalo $(-\infty, \infty)$. ¿Es verdad que una solución general de $y'' - y = 2^x$ es $y_G = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{2^x}{\ln^2 2 - 1}$? Justifique su respuesta mediante la aplicación del o de los teoremas correspondientes.
Si le resulta útil, recuerde que $2^x = e^{x \ln 2}$.

55. Encuentre una solución general de cada ecuación diferencial:

- a) $y'' + y' - 2y = x^2 - x + 2.$
- b) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}.$

4. (o) Aplicación: estructura de pórtico

La figura muestra el esquema de una estructura de pórtico (formada por dos columnas y una viga). Sobre esta estructura actúa una fuerza $P(t)$ variable en el tiempo, por lo cual la estructura vibra y se deforma lateralmente. En un instante dado, el desplazamiento lateral, en correspondencia con el nivel donde se aplica la fuerza $P(t)$, es $u(t)$.



Para obtener un modelo simplificado, apreciamos la semejanza que presenta esta estructura a un sistema masa-resorte, tal como los planteados en los ejercicios 43 y 44 (sobre todo este último ya que, en este caso, las oscilaciones son horizontales). En este caso se deben tener en cuenta la rigidez k de las columnas (propiedad que cuantifica el desplazamiento que experimenta la estructura cuando se aplica una fuerza unitaria) y la masa m , que se supone concentrada en el nivel de la viga (k y m son positivos). Se puede demostrar, mediante principios de dinámica estructural, que la ecuación que representa el fenómeno es:

$$m\ddot{u} + ku = P(t), \quad \text{donde } \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}.$$

- a) Sabiendo que la fuerza que actúa sobre esta estructura es una carga armónica:

$$P(t) = P_0 \sin(\omega t),$$

responda: ¿Qué tipo de EDO es? Clasifíquela. ¿Qué tipo de movimiento armónico representa? (Libre o forzado, amortiguado o no amortiguado).

- b) Asumiendo que, en el instante inicial $t = 0$, el desplazamiento y la velocidad son nulos (es decir que la estructura está en reposo), justifique que la solución de la ecuación diferencial es:

$$u(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)} (\sin(\omega t) - \beta \sin(\omega_n t)),$$

explicando qué representan β y ω_n .