Series de Fourier

Facultad de Ingeniería

Recorrido-SERIES DE FOURIER

Recorrido

Producto escalar de funciones en un intervalo dado

Recordemos el producto escalar entre vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\bar{\mathrm{u}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathrm{u}} \cdot \bar{\mathrm{v}} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i .$$

Producto escalar de funciones en un intervalo dado

Recordemos el producto escalar entre vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\bar{\mathrm{u}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathrm{u}} \cdot \bar{\mathrm{v}} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i .$$

$$\bar{\mathrm{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathrm{u}} \cdot \bar{\mathrm{v}} = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Producto escalar de funciones en un intervalo dado

Recordemos el producto escalar entre vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\bar{\mathrm{u}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathrm{u}} \cdot \bar{\mathrm{v}} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i.$$

$$\bar{\mathrm{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathrm{u}} \cdot \bar{\mathrm{v}} = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Definición

Dadas dos funciones f y g definidas en $[a, b]$, el producto escalar usual entre ellas es

Producto escalar de funciones en un intervalo dado

Recordemos el producto escalar entre vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\bar{\mathrm{u}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathrm{u}} \cdot \bar{\mathrm{v}} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i.$$

$$\bar{\mathrm{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathrm{u}} \cdot \bar{\mathrm{v}} = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Definición

Dadas dos funciones f y g definidas en $[a, b]$, el producto escalar usual entre ellas es

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Producto escalar de funciones en un intervalo dado

Recordemos el producto escalar entre vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}; \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}; \quad \bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i .$$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \bar{u} \cdot \bar{v} = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Definición

Dadas dos funciones f y g definidas en $[a, b]$, el producto escalar usual entre ellas es

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Las funciones f y g son ortogonales en $[a, b]$ si $f \cdot g = 0$ en $[a, b]$.

Producto escalar de funciones en un intervalo dado

Ejemplo

Analice la ortogonalidad de las funciones dadas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = 1$ en $[0, 2\pi]$, en $[0, \pi]$ y en $[-\pi, \pi]$.

Producto escalar de funciones en un intervalo dado

Ejemplo

Analice la ortogonalidad de las funciones dadas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = 1$ en $[0, 2\pi]$, en $[0, \pi]$ y en $[-\pi, \pi]$.

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = 0 : \; f \text{ y } g \text{ son ortogonales en } [0, 2\pi];$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2 : \; f \text{ y } g \text{ no son ortogonales en } [0, \pi];$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 : \; f \text{ y } g \text{ son ortogonales en } [-\pi, \pi].$$

Producto escalar de funciones en un intervalo dado

Ejemplo

Analice la ortogonalidad de las funciones dadas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = 1$ en $[0, 2\pi]$, en $[0, \pi]$ y en $[-\pi, \pi]$.

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = 0 : \; f \text{ y } g \text{ son ortogonales en } [0, 2\pi];$$
$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2 : \; f \text{ y } g \text{ no son ortogonales en } [0, \pi];$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 : \; f \text{ y } g \text{ son ortogonales en } [-\pi, \pi].$$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \bar{u} \cdot \bar{v} = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Familias ortogonales de funciones

Definición

Una familia de funciones es ortogonal en $[a, b]$ si cada miembro de la familia es ortogonal a cada una de las restantes funciones de la familia en $[a, b]$.

Familias ortogonales de funciones

Definición

Una familia de funciones es ortogonal en $[a, b]$ si cada miembro de la familia es ortogonal a cada una de las restantes funciones de la familia en $[a, b]$.

Ejemplo

Las familias $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ y $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ son ortogonales en $[-p, p]$ y en $[0, 2p]$.

Familias ortogonales de funciones

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

Familias ortogonales de funciones

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} 1 \cos\frac{n\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\Big|_0^{2p} = 0 = \int_0^{2p} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{p}\Big|_0^{2p}$$

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} 1 \cos\frac{n\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\Big|_0^{2p} = 0 = \int_0^{2p}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{p}\Big|_0^{2p}$$

$$\int_0^{2p}\cos\frac{n\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p}dx =$$

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} 1 \cos\frac{n\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\bigg|_0^{2p} = 0 = \int_0^{2p} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{p}\bigg|_0^{2p}$$

$$\int_0^{2p} \cos\frac{n\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p}\,dx =$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$$

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} 1 \cos\frac{n\pi x}{p}\, dx = \frac{p}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\Big|_0^{2p} = 0 = \int_0^{2p}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\, dx = \frac{p}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{p}\Big|_0^{2p}$$

$$\int_0^{2p}\cos\frac{n\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p} dx = \frac{1}{2}\int_0^{2p}\left(\operatorname{sen}\frac{(m+n)\pi x}{p} + \operatorname{sen}\frac{(m-n)\pi x}{p}\right) dx$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$$

Familias ortogonales de funciones

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} 1 \cos\frac{n\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\Big|_0^{2p} = 0 = \int_0^{2p}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{p}\Big|_0^{2p}$$

$$\int_0^{2p}\cos\frac{n\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p}dx = \frac{1}{2}\int_0^{2p}\left(\operatorname{sen}\frac{(m+n)\pi x}{p} + \operatorname{sen}\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)dx$$

$$= \left(-\frac{p}{(m+n)\pi}\cos\frac{(m+n)\pi x}{p} - \frac{p}{(m-n)\pi}\cos\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)\Big|_0^{2p} = 0.$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$$

Familias ortogonales de funciones

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} 1 \cos\frac{n\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\Big|_0^{2p} = 0 = \int_0^{2p}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{p}\Big|_0^{2p}$$

Si $m \neq n$:

$$\int_0^{2p}\cos\frac{n\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p}dx = \frac{1}{2}\int_0^{2p}\left(\operatorname{sen}\frac{(m+n)\pi x}{p} + \operatorname{sen}\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)dx$$

$$= \left(-\frac{p}{(m+n)\pi}\cos\frac{(m+n)\pi x}{p} - \frac{p}{(m-n)\pi}\cos\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)\Big|_0^{2p} = 0.$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$$

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} \cos\frac{n\pi x}{p}\cos\frac{m\pi x}{p}\,dx = 0 = \int_0^{2p} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p}\,dx,\ \ n \neq m.$$

Familias ortogonales de funciones

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} \cos\frac{n\pi x}{p}\cos\frac{m\pi x}{p}\,dx = 0 = \int_0^{2p} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p}\,dx,\ \ n \neq m.$$

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[-p, p]$ y en $[0, 2p]$.

Familias ortogonales de funciones

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} \cos\frac{n\pi x}{p}\cos\frac{m\pi x}{p}\,dx = 0 = \int_0^{2p} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p}\,dx,\ \ n \neq m.$$

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[-p, p]$ y en $[0, 2p]$. Cada una de las funciones $\cos\frac{n\pi x}{p}$ es periódica, con periodo fundamental $\frac{2p}{n}$; lo mismo ocurre con $\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}$, $n = 1, 2, \cdots$.

Familias ortogonales completas

Definición

Una familia ortogonal de funciones en $[a, b]$ es completa si la única función definida en $[a, b]$ que es ortogonal a todos los miembros de la familia es la función constante 0.

Familias ortogonales completas

Definición

Una familia ortogonal de funciones en $[a, b]$ es completa si la única función definida en $[a, b]$ que es ortogonal a todos los miembros de la familia es la función constante 0.

Ejemplo:

La familia $\{\cos \frac{n\pi x}{p},\ n = 0, 1, 2, 3, ...\} = \{1, \cos \frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, 3, ...\}$ es ortogonal en $[-p, p]$ pero no es completa.

Recorrido

Series trigonométricas de Fourier. Motivación

Dada la familia ortogonal de funciones en $[-p, p]$ (o en $[0, 2p]$)

$$\left\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p};\ n = 1, 2, 3, \cdots\right\},$$

se busca coeficientes c_0, a_n y b_n, $n = 1, 2, \ldots$ tales que

$$f(x) = c_0 \cdot 1 + a_1 \cos\frac{1\pi x}{p} + b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{p} + b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p} + \cdots$$

Coeficientes de Fourier

$$
\begin{aligned}
f(x) = {} & c_0 + a_1 \cos\frac{1\pi x}{p} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{p} + \cdots \\
& + b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} + b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p} + \cdots \\
\int_{-p}^{p} f(x)dx = {} & \int_{-p}^{p} c_0 dx + \int_{-p}^{p} a_1 \cos\frac{1\pi x}{p} dx + \int_{-p}^{p} a_2 \cos\frac{2\pi x}{p} dx + \cdots \\
& + \int_{-p}^{p} b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} dx + \int_{-p}^{p} b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p} dx + \cdots \\
= {} & \int_{-p}^{p} c_0 dx + 0 + 0 + \cdots \\
= {} & 2pc_0
\end{aligned}
$$

$$c_0 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)dx$$

Coeficientes de Fourier

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & c_0 & +a_1 \cos\frac{1\pi x}{p} \quad & +a_2 \cos\frac{2\pi x}{p} + \cdots \\ & & +b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} \quad & +b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p} + \cdots \\ f(x)\cos\frac{1\pi x}{p} = \quad & c_0 \cos\frac{1\pi x}{p} & +a_1 \cos\frac{1\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p} \quad & +a_2 \cos\frac{2\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p} + \cdots \\ & & +b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p} \quad & +b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p} + \cdots \end{aligned}$$

Coeficientes de Fourier

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & c_0 && +a_1 \cos\frac{1\pi x}{p} && +a_2 \cos\frac{2\pi x}{p} + \cdots \\
& && +b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} && +b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p} + \cdots \\
f(x)\cos\frac{1\pi x}{p} = \quad & c_0 \cos\frac{1\pi x}{p} && +a_1 \cos\frac{1\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p} && +a_2 \cos\frac{2\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p} + \cdots \\
& && +b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p} && +b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{1\pi x}{p}dx &= \int_{-p}^{p} c_0 \cos\frac{1\pi x}{p}dx + \int_{-p}^{p} a_1 \cos\frac{1\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p}dx + \\
&+ \int_{-p}^{p} a_2 \cos\frac{2\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p}dx + \cdots + \int_{-p}^{p} b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p}dx + \\
&+ \int_{-p}^{p} b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p}\cos\frac{1\pi x}{p}dx + \cdots \\
&= 0 + \int_{-p}^{p} a_1 \cos^2\frac{1\pi x}{p}dx + 0 + 0 + \cdots = pa_1
\end{aligned}
$$

Coeficientes de Fourier

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & c_0 && + a_1 \cos \frac{1\pi x}{p} && + a_2 \cos \frac{2\pi x}{p} + \cdots \\
& && + b_1 \operatorname{sen} \frac{1\pi x}{p} && + b_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{p} + \cdots \\
f(x) \cos \frac{1\pi x}{p} = \quad & c_0 \cos \frac{1\pi x}{p} && + a_1 \cos \frac{1\pi x}{p} \cos \frac{1\pi x}{p} && + a_2 \cos \frac{2\pi x}{p} \cos \frac{1\pi x}{p} + \cdots \\
& && + b_1 \operatorname{sen} \frac{1\pi x}{p} \cos \frac{1\pi x}{p} && + b_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{p} \cos \frac{1\pi x}{p} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{1\pi x}{p} dx = & \int_{-p}^{p} c_0 \cos \frac{1\pi x}{p} dx + \int_{-p}^{p} a_1 \cos \frac{1\pi x}{p} \cos \frac{1\pi x}{p} dx + \\
& + \int_{-p}^{p} a_2 \cos \frac{2\pi x}{p} \cos \frac{1\pi x}{p} dx + \cdots + \int_{-p}^{p} b_1 \operatorname{sen} \frac{1\pi x}{p} \cos \frac{1\pi x}{p} dx + \\
& + \int_{-p}^{p} b_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{p} \cos \frac{1\pi x}{p} dx + \cdots \\
= 0 + \int_{-p}^{p} a_1 \cos^2 \frac{1\pi x}{p} dx + 0 + 0 + \cdots = p a_1 \rightarrow & \; a_1 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{1\pi x}{p} dx
\end{aligned}
$$

Coeficientes de Fourier

$$a_1 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{1\pi x}{p}dx$$

Coeficientes de Fourier

$$a_1 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{1\pi x}{p}dx$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots$$

Coeficientes de Fourier

$$a_1 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{1\pi x}{p} dx$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx, n = 1, 2, \cdots$$

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) dx; \qquad c_0 = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} f(x) dx \rightarrow c_0 = \frac{a_0}{2}$$

Coeficientes de Fourier

$$
\begin{array}{rcccc}
f(x) = & c_0 & +a_1 \cos \frac{1\pi x}{p} & +a_2 \cos \frac{2\pi x}{p} + \cdots \\
 & & +b_1 \,\mathrm{sen}\, \frac{1\pi x}{p} & +b_2 \,\mathrm{sen}\, \frac{2\pi x}{p} + \cdots \\
f(x) \,\mathrm{sen}\, \frac{1\pi x}{p} = & c_0 \,\mathrm{sen}\, \frac{1\pi x}{p} & +a_1 \cos \frac{1\pi x}{p} \,\mathrm{sen}\, \frac{1\pi x}{p} & +a_2 \cos \frac{2\pi x}{p} \,\mathrm{sen}\, \frac{1\pi x}{p} + \cdots \\
 & & +b_1 \,\mathrm{sen}\, \frac{1\pi x}{p} \,\mathrm{sen}\, \frac{1\pi x}{p} & +b_2 \,\mathrm{sen}\, \frac{2\pi x}{p} \,\mathrm{sen}\, \frac{1\pi x}{p} + \cdots
\end{array}
$$

Coeficientes de Fourier

$$
\begin{array}{rlccc}
f(x) = & c_0 & +a_1 \cos \frac{1\pi x}{p} & +a_2 \cos \frac{2\pi x}{p} + \cdots \\
 & & +b_1 \operatorname{sen} \frac{1\pi x}{p} & +b_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{p} + \cdots \\
f(x) \operatorname{sen} \frac{1\pi x}{p} = & c_0 \operatorname{sen} \frac{1\pi x}{p} & +a_1 \cos \frac{1\pi x}{p} \operatorname{sen} \frac{1\pi x}{p} & +a_2 \cos \frac{2\pi x}{p} \operatorname{sen} \frac{1\pi x}{p} + \cdots \\
 & & +b_1 \operatorname{sen} \frac{1\pi x}{p} \operatorname{sen} \frac{1\pi x}{p} & +b_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{p} \operatorname{sen} \frac{1\pi x}{p} + \cdots
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-p}^{p} f(x) \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} dx &= \int_{-p}^{p} c_0 \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} dx + \int_{-p}^{p} a_1 \cos \tfrac{1\pi x}{p} \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} dx + \\
&+ \int_{-p}^{p} a_2 \cos \tfrac{2\pi x}{p} \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} dx + \cdots + \int_{-p}^{p} b_1 \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} dx + \\
&+ \int_{-p}^{p} b_2 \operatorname{sen} \tfrac{2\pi x}{p} \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} dx + \cdots \\
&= 0 + \int_{-p}^{p} b_1 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1\pi x}{p} dx + 0 + 0 + \cdots = pb_1
\end{aligned}
$$

Coeficientes de Fourier

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & c_0 && +a_1 \cos \tfrac{1\pi x}{p} && +a_2 \cos \tfrac{2\pi x}{p} + \cdots \\
& && +b_1 \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} && +b_2 \operatorname{sen} \tfrac{2\pi x}{p} + \cdots \\
f(x) \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} = \quad & c_0 \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} && +a_1 \cos \tfrac{1\pi x}{p} \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} && +a_2 \cos \tfrac{2\pi x}{p} \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} + \cdots \\
& && +b_1 \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} && +b_2 \operatorname{sen} \tfrac{2\pi x}{p} \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-p}^{p} f(x) \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} dx = & \int_{-p}^{p} c_0 \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} dx + \int_{-p}^{p} a_1 \cos \tfrac{1\pi x}{p} \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} dx + \\
& + \int_{-p}^{p} a_2 \cos \tfrac{2\pi x}{p} \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} dx + \cdots + \int_{-p}^{p} b_1 \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} dx + \\
& + \int_{-p}^{p} b_2 \operatorname{sen} \tfrac{2\pi x}{p} \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} dx + \cdots \\
= 0 + \int_{-p}^{p} b_1 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1\pi x}{p} dx + 0 + 0 + \cdots = pb_1 \rightarrow & \; b_1 = \tfrac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} dx
\end{aligned}
$$

Coeficientes de Fourier

$$b_1 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{1\pi x}{p}dx$$

Coeficientes de Fourier

$$b_1 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \operatorname{sen} \frac{1\pi x}{p} dx$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} dx, n = 1, 2, \cdots$$

Coeficientes de Fourier

$$b_1 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{1\pi x}{p}dx$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots$$

Serie de Fourier generada por f

Dada f definida en $[-p, p]$, definimos

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x)dx;$$

Serie de Fourier generada por f

Dada f definida en $[-p, p]$, definimos

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots ;$$

Serie de Fourier generada por f

Dada f definida en $[-p, p]$, definimos

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx, n = 1, 2, \cdots ;$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} dx, n = 1, 2, \cdots$$

Serie de Fourier generada por f

Dada f definida en $[-p, p]$, definimos

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx,\ n = 1, 2, \cdots;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx,\ n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{p} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\right).$$

Serie de Fourier generada por f

Observación: lo mismo se hace en $[0, 2p]$: dada f definida en $[0, 2p]$, definimos

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots ;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{p} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\right).$$

Convergencia de series de Fourier

Teorema

Sean f y f' continuas por partes (i.e., tienen un número finito de discontinuidades de salto) en $[-p, p]$. Entonces para toda $x \in (-p, p)$ la serie de Fourier de f converge a

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

donde $f(x+)$ y $f(x-)$ denotan los límites laterales de f en x por derecha e izquierda, respectivamente.

Convergencia de series de Fourier

Teorema

Sean f y f' continuas por partes (i.e., tienen un número finito de discontinuidades de salto) en $[-p, p]$. Entonces para toda $x \in (-p, p)$ la serie de Fourier de f converge a

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

donde $f(x+)$ y $f(x-)$ denotan los límites laterales de f en x por derecha e izquierda, respectivamente.

Observación: si x es un punto de continuidad de f, la serie de Fourier converge a $f(x)$ en es punto.

Ejemplos

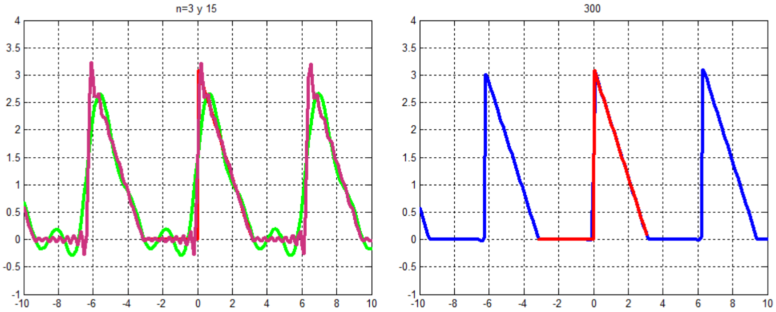
1

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ -x + \pi, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

1

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ -x+\pi, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} \cos(nx) + \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \right)$$



Gráficos de sumas parciales.

Ejemplos

1

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ -x+\pi, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} \cos(nx) + \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \right)$$

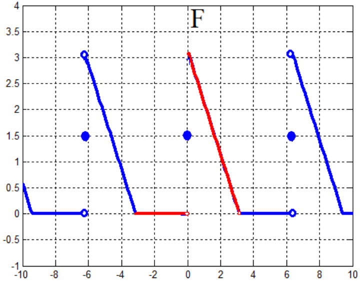


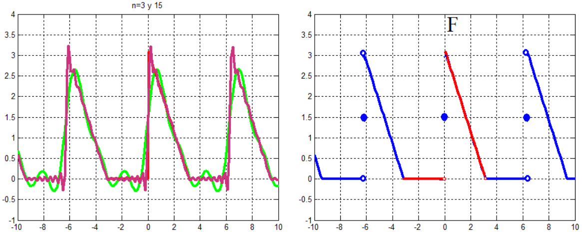
Gráfico de la función F dada por la serie de Fourier generada por f.

Ejemplos

1

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ -x + \pi, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} \cos(nx) + \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \right)$$



Llamando F a la función definida por la serie de Fourier generada por f:
F está definida en $\mathbb{R}$.
$F(x) = f(x)$ para todo $x \in (-\pi, 0)$ y todo $x \in (0, \pi)$, ya que f es continua en esos puntos.

Ejemplos

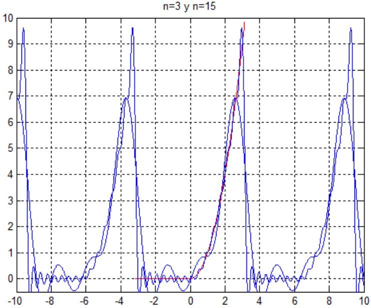
2

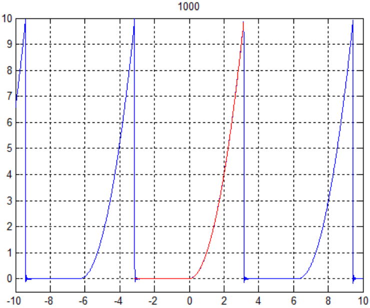
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

2

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \le x < 0; \\ x^2, & \text{si } 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3}((-1)^n - 1) \right) \operatorname{sen}(nx) \right)$$





Gráficos de sumas parciales.

2

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \le x < 0; \\ x^2, & \text{si } 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3}((-1)^n - 1) \right) \text{sen}(nx) \right)$$

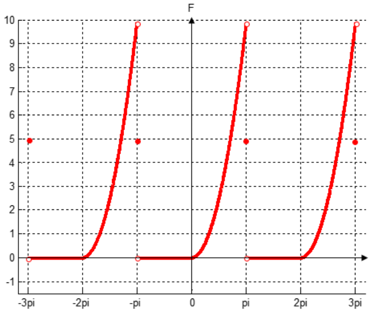


Gráfico de la función F dada por la serie de Fourier generada por f.

Recorrido

Funciones pares e impares

Sean $f : [-p, p] \to \mathbb{R}$ y $g : [-p, p] \to \mathbb{R}$.

Si f es par, $\int_{-p}^{p} f(x)dx = 2\int_{0}^{p} f(x)dx$.

Si f es impar, $\int_{-p}^{p} f(x)dx = 0$.

Si f y g son ambas pares o ambas impares, $f \cdot g$ es par.

Si f es par y g es impar, $f \cdot g$ es impar.

Funciones periódicas

Una función f es periódica si $f(x+P) = f(x)$ para todo x. P es una constante positiva. Cualquier número positivo P con esta propiedad se llama periodo o período. El menor de los periodos se llama periodo fundamental.

Funciones periódicas

Una función f es periódica si $f(x+P) = f(x)$ para todo x. P es una constante positiva. Cualquier número positivo P con esta propiedad se llama periodo o período. El menor de los periodos se llama periodo fundamental.

Ejemplos:

La función $f(x) = \text{sen}(x)$ tiene periodos 2π, 4π, 6π,... y su periodo fundamental es 2π.

La función $g(x) = \text{sen}(2x)$ tiene periodos π, 2π, 3π,... y su periodo fundamental es π.

Cada término de la serie

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} \cos(nx) + \frac{1}{n} \text{sen}(nx) \right)$$

tiene periodo 2π. Luego la serie tiene periodo 2π.

Serie de Fourier generada por una función par

Sea $f : [-p, p] \to \mathbb{R}$. Buscamos los coeficientes de Fourier de f:

1) Si f es par,

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots ;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx = 0, n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p}\right) \leftarrow \text{Serie de cosenos de Fourier de } f.$$

Serie de Fourier generada por una función impar

Sea $f : [-p, p] \to \mathbb{R}$. Buscamos los coeficientes de Fourier de f:

2) Si f es impar,

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = 0,\ n = 1, 2, \cdots ;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx,\ n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p} \leftarrow \text{Serie de senos de Fourier de } f.$$

Extensiones par e impar de una función definida en un semiintervalo

Dada $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, se puede definir una nueva función, extensión de f al intervalo $[-L, L]$, que sea par o impar (esta última, si $f(0) = 0$):
Extensión par:

$$g : [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = \begin{cases} f(-x) \text{ si } -L \leq x < 0; \\ f(x) \text{ si } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Extensión impar (asumimos $f(0) = 0$):

$$h : [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } h(x) = \begin{cases} -f(-x) \text{ si } -L \leq x < 0; \\ 0 \text{ si } x = 0; \\ f(x) \text{ si } 0 < x \leq L. \end{cases}$$

La **serie de cosenos de Fourier** de una función definida en un semiintervalo $[0, L]$ es la serie de Fourier generada por la **extensión par de** f.

Serie de cosenos de Fourier

Para $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, la extensión par es:

$$g : [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = \begin{cases} f(-x) \text{ si } -L \leq x < 0; \\ f(x) \text{ si } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Coeficientes para la serie de cosenos de Fourier de f:

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(x)dx = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx = 0, n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p}\right) \leftarrow \text{Serie de cosenos de Fourier de } f.$$

Serie de senos de Fourier

La **serie de senos de Fourier** de una función definida en un semiintervalo $[0, L]$ es la serie de Fourier generada por la **extensión impar de** f.

Serie de senos de Fourier

Para $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, la extensión impar es:

$$h : [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } h(x) = \begin{cases} -f(-x) \text{ si } -L \leq x < 0; \\ 0 \text{ si } x = 0; \\ f(x) \text{ si } 0 < x \leq L. \end{cases}$$

Coeficientes para la serie de senos de Fourier de f:

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} h(x) dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} h(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx = 0, n = 1, 2, \cdots ;$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} h(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} dx = \frac{2}{p} \int_{0}^{p} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} dx, n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} \leftarrow \text{Serie de senos de Fourier de } f.$$

Serie de Fourier de una función definida en un semiintervalo

Si se desarrolla la función $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ en serie de Fourier, igualando $[0, L] = [0, 2p]$ y $L = 2p$, se obtienen los coeficientes de Fourier

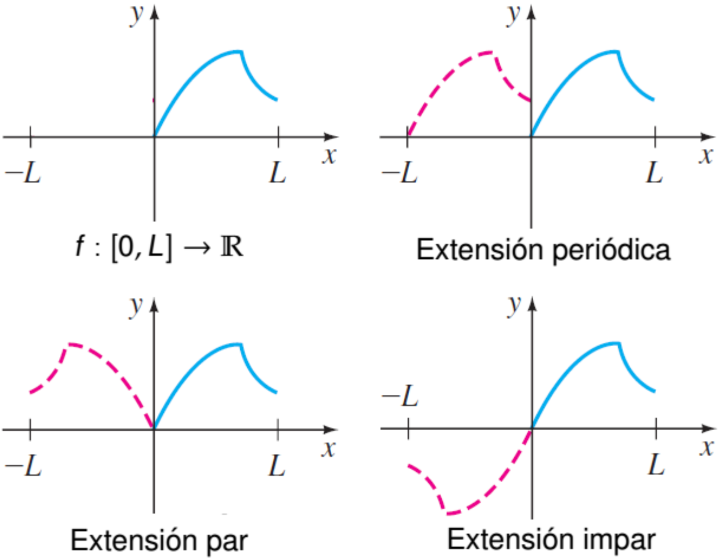
$$a_0 = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{L}dx, n = 1, 2, \cdots;$$

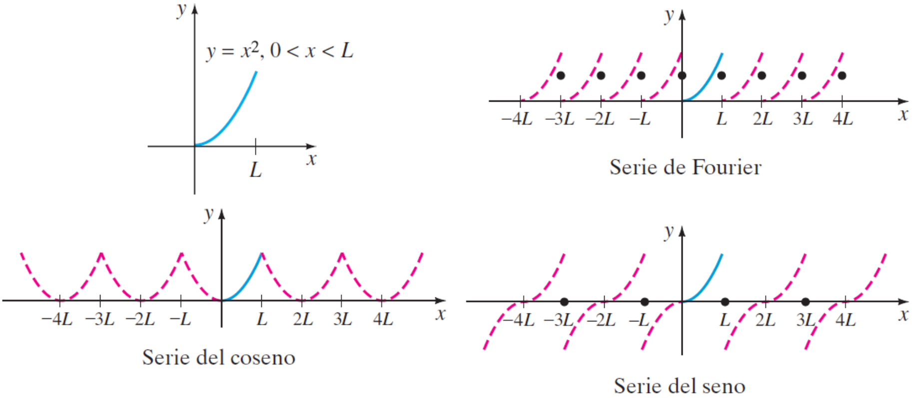
$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\,\text{sen}\,\frac{2n\pi x}{L}dx, n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{L} + b_n\,\text{sen}\,\frac{2n\pi x}{L}\right).$$

Ilustraciones de extensiones de funciones



Ilustraciones de tipos de series



Ejemplo

Sea $f(x) = x + 1$ con $0 \leq x < 1$.
Los coeficientes de Fourier de f son $a_0 = 3$, $a_n = 0$ y $b_n = -\frac{1}{n\pi}$, $n = 1, 2, ...$
Halle la serie de Fourier generada por f, F, e indique cuánto valen $F(0)$ y $F(-1)$.

Ejemplo

Sea $f(x) = x + 1$ con $0 \leq x < 1$.
Los coeficientes de Fourier de f son $a_0 = 3$, $a_n = 0$ y $b_n = -\frac{1}{n\pi}$, $n = 1, 2, \ldots$.
Halle la serie de Fourier generada por f, F, e indique cuánto valen $F(0)$ y $F(-1)$.

$$F(x) = \frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi x).$$

$$F(0) = 1,5; \quad F(-1) = 1,5.$$

Sea $f(x) = x + 1$ con $0 \leq x < 1$.

1. Plantee fórmulas para calcular los coeficientes de la serie de senos de Fourier de f, F.
   $a_0 = 0$, $a_n = 0$ y $b_n = 2\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{sen}(n\pi x)dx = \frac{2}{n\pi}(1 - 2(-1)^n)$, $n = 1, 2, \ldots$.
2. Represente gráficamente la función F en $[-3, 3]$.
3. Indique cuánto valen $F(-2)$ y $F(\frac{3}{2})$.