

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro “Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera” de Zill y Wright, octava edición, Cengage Learning.

Los ejercicios (o secciones) pueden ser obligatorios (o), recomendados no obligatorios (r) y opcionales (*).

Producto escalar o interior en un intervalo I : $\langle f, g \rangle = \int_I f(x)g(x)dx$

Desarrollo en serie de Fourier de una función f definida en el intervalo $(-p, p)$.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Desarrollo en serie de Fourier de una función f definida en el intervalo $(0, L)$, $L = 2p$.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right)$$

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Desarrollo en serie de senos de Fourier de una función f definida en el intervalo $(0, p)$.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Desarrollo en serie de senos de Fourier de una función f definida en el intervalo $(0, p)$.

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

1. Funciones Ortogonales y familias ortogonales completas

1. (r) Demuestre que las siguientes funciones son ortogonales en el intervalo indicado.

- a) $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, (-2, 2)$.
- b) $f_1(x) = e^x, f_2(x) = xe^{-x} - e^{-x}, (0, 2)$.

2. En los siguientes problemas demuestre que los conjuntos son ortogonales en el intervalo indicado.

- a) (r) $\{\sin(nx), n = 1, 2, 3, 4, \dots\}, [0, \pi]$.
 b) (o) $\{1, \cos(nx), n = 1, 2, 3, 4, \dots\}, [0, \pi]$.
 c) (r) $\{\sin(\frac{n\pi}{p}x), n = 1, 2, 3, 4, \dots\}, [0, 0p]$.
 d) (r) $\{\sin(nx), n = 1, 2, 3, 4, \dots\}, [0, \pi]$.
 e) (r) $\{1, \cos(\frac{n\pi}{p}x), \sin(\frac{n\pi}{p}x), n = 1, 2, 3, 4, \dots\}, [-p, p]$.

3. Justifique que los siguientes conjuntos de funciones ortogonales no son completos en $[-\pi, \pi]$:

- a) (o) $\{\sin(nx), n = 1, 2, 3, 4, \dots\}$.
 b) (r) $\{1, \cos(nx), n = 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

4. (r) Indique si la familia ortogonal de funciones $\left\{\cos \frac{n\pi x}{p}, n = 1, 2, 3, \dots\right\}$ es o no completa en $[0, 2p]$. Justifique.

2. Series de Fourier

5. Encuentre la serie de Fourier de f en el intervalo dado:

- a) (r) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -1 < x < 0, \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1. \end{cases}$
 b) (r) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$
 c) (r) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$
 d) (o) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -2 < x < 0, \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } 1 \leq x < 2. \end{cases}$
 e) (r) $f(x) = x + \pi, \quad -\pi < x < \pi.$
 f) (r) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ \sin x, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$
 g) (o) $f(x) = \sin(x), \quad -\pi < x < \pi.$
 h) (o) $f(x) = 5 \sin(3x), \quad -\pi < x < \pi.$
 i) (o) $f(x) = \sin(x) + 5 \sin(3x), \quad -\pi < x < \pi.$

6. (r) Utilizando la serie del ejercicio 5c, demuestre que:

- a) $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$
 b) $\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$

7. (*)

- a) Utilice las formas exponenciales complejas del seno y del coseno,

$$\cos \frac{n\pi x}{p} = \frac{e^{in\pi x/p} + e^{-in\pi x/p}}{2}, \quad \sin \frac{n\pi x}{p} = \frac{e^{in\pi x/p} - e^{-in\pi x/p}}{2i},$$

para demostrar que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

se puede expresar en la forma compleja

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx/p},$$

donde

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

b) Demuestre que c_0 , c_n y c_{-n} del inciso anterior se pueden escribir como

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) e^{-inx/p} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

8. (r) Utilice los resultados del problema 7 para encontrar la forma compleja de la serie de Fourier de $f(x) = e^x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

9. (r) Considere la función $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0; \\ \pi - x, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Represente gráficamente a esta función y halle la serie trigonométrica de Fourier para dicha función. Indique condiciones de convergencia para una serie de Fourier y analice si esta función las cumple o no.

10. (r) Si $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = x$,

- a) plantee fórmulas para los coeficientes de la serie de Fourier generada por f .
- b) Si F es la función definida por la serie de Fourier generada por f , indique cuánto vale $F(L)$.

11. (r) Halle la serie de Fourier generada por la función f definida en $[0, 2]$, dada por $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ y $f(x) = 1$ si $1 \leq x \leq 2$.

3. Series de Fourier de cosenos y de senos

12. (r) Determine si la función dada es par, impar o ninguna:

a) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$

c) $f(x) = x^2 + x$

d) $f(x) = e^{|x|}$

e) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

13. (r) Pruebe las siguientes propiedades de funciones pares o impares (suponga f definida en un intervalo simétrico $[-a, a]$).

- a) El producto de dos funciones pares es par.
- b) El producto de dos funciones impares es par.
- c) El producto de una función impar y una función par es impar.

d) Si f es par, entonces $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$

e) Si f es impar, entonces $\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$

14. Sin calcular ningún coeficiente, en los siguientes ejercicios grafique en el intervalo $[-3\pi, 3\pi]$ las series de Fourier, de senos y de cosenos generadas por las funciones dadas. En caso de presentarse una discontinuidad, marque claramente el valor de la serie en ese punto.

a) (r) $f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad 0 < x < \pi.$

b) (o) $f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

c) (r) $f(x) = \cos(x), \quad 0 < x < \pi.$

d) (r) $f(x) = \cos(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

e) (r) $f(x) = e^x, \quad 0 < x < 1.$

15. Desarrolle cada una de las funciones dadas en una serie adecuada de cosenos o senos:

a) (o) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ x + 1, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

b) (r) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

c) (r) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } -1 < x < 0, \\ 1 - x, & \text{si } 0 \leq x < 1. \end{cases}$

d) (r) $f(x) = \begin{cases} -\pi, & \text{si } -2\pi < x < -\pi, \\ x, & \text{si } -\pi \leq x < \pi, \\ \pi, & \text{si } \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$

16. Desarrolle la función dada en tres series: una de Fourier, una de cosenos y otra de senos, en el semiintervalo dado:

a) (o) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$

b) (r) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{si } 1 \leq x < 2. \end{cases}$

c) (r) $f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad 0 < x < \pi.$

d) (r) $f(x) = x^2, (0, 2\pi).$

e) (r) $f(x) = x + 1, (0, 1).$

17. (r) Sea F la serie de senos de Fourier generada por $f(x) = x + 1$, con $0 < x < p$.

a) Represente gráficamente la función F en $[-2p, 2p]$.

b) Indique cuánto valen $F(-p)$, $F(\frac{3}{2}p)$ y $F(100p)$.

c) Dé fórmulas para calcular los coeficientes de Fourier correspondientes a la serie de senos de Fourier de f .

18. (o) Dada la función f por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 1; \\ x^2, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

a) Plantee fórmulas para los coeficientes correspondientes a una serie de Fourier generada por f .

b) Si F es una serie de senos de Fourier generada por f , indique cuánto valen:

$$F(2), \quad F(-1), \quad F\left(\frac{5}{2}\right).$$

19. (r) Considere la función f dada por $f(x) = x$, $0 < x < \pi$.

- a) Extienda f al intervalo $-\pi < x < \pi$ de modo que f sea impar en dicho intervalo. Grafique.
- b) Halle la serie trigonométrica de Fourier para dicha función.
- c) Indique condiciones de convergencia para una serie de Fourier y analice si esta función las cumple o no.

20. (r) Considere la función f dada por $f(x) = x^2$, $0 < x < \pi$.

- a) Extienda f al intervalo $-\pi < x < \pi$ de modo que f sea impar en dicho intervalo. Grafique.
- b) Halle la serie trigonométrica de Fourier para dicha función.
- c) Indique condiciones de convergencia para una serie de Fourier y analice si esta función las cumple o no.

21. (r) Dada la función $f(x) = e^x$, $0 < x < \pi$, y conociendo las antiderivadas en (1)-(4) (no necesita calcularlas):

- a) Exprese la serie de Fourier generada por f .
- b) Indique cuánto valen las series de Fourier, de senos y de cosenos (son tres series) cuando las evalúa en $x = 2\pi$.
- c) (agregado al TP en 2022) Indique cuánto valen las series de Fourier, de senos y de cosenos (son tres series) cuando las evalúa en $x = 200\pi$ y en $x = 111\pi$.

$$\int e^x \cos(2nx) dx = \frac{e^x}{4n^2 + 1} (2n \operatorname{sen}(2nx) + \cos(2nx)) \quad (1)$$

$$\int e^x \operatorname{sen}(2nx) dx = \frac{e^x}{4n^2 + 1} (\operatorname{sen}(2nx) - 2n \cos(2nx)) \quad (2)$$

$$\int e^x \cos(nx) dx = \frac{e^x}{n^2 + 1} (n \operatorname{sen}(nx) + \cos(nx)) \quad (3)$$

$$\int e^x \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{e^x}{n^2 + 1} (\operatorname{sen}(nx) - n \cos(nx)) \quad (4)$$

22. (r) Supongamos que f es una función continua en el intervalo $(0, L)$, $L > 0$. Consideraremos la extensión impar de f y llamemos F a la serie trigonométrica de Fourier generada por dicha extensión.

- a) Para cualquier función f continua definida en $(0, L)$, plantee fórmulas para hallar los coeficientes a_0 , a_n y b_n que corresponden a la serie de Fourier F buscada.
- b) Para el caso especial en que f está dada por

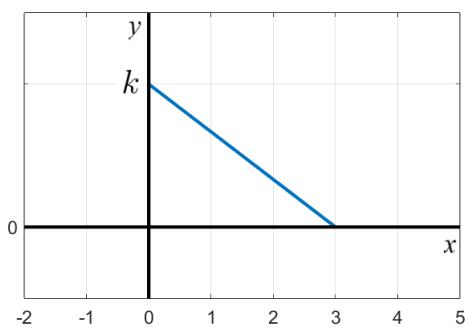
$$f(x) = x^2 - 1, \quad 0 < x < L,$$

indique cuáles son los siguientes valores: $F(0)$, $F(-L)$ y $F(\frac{3}{2}L)$.

- c) Enuncie el teorema de convergencia de series de Fourier.

4. Ejercicios integradores

23. (o) Sea f la función definida en el intervalo $(0, 3)$ cuyo gráfico se presenta a continuación. Cabe destacar que k es un número positivo.



a) Sabiendo que los coeficientes a_n correspondientes a la serie de Fourier generada por f son todos ellos nulos, para $n = 1, 2, \dots$, halle los restantes coeficientes y escriba la serie de Fourier generada por f .

b) Considerando las series de Fourier, la serie de senos y la serie de cosenos generadas por f , indique cuánto vale cada una de estas tres series en los puntos $x_1 = 0$ y $x_2 = 100$.

24. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 2x, & \text{si } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

a) (r) Escriba la serie de **cosenos** de Fourier generada por f .

b) (o) Complete el siguiente cuadro:

	$F(62)$	$F(79)$
Serie de cosenos generada por f		
Serie de senos generada por f		
Serie de Fourier generada por f		

25. (r) Sea la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{si } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Se sabe que

$$\int_1^2 1 dx = 1, \quad \int_1^2 \cos(n\pi x) dx = 0, \quad \int_1^2 \sin(n\pi x) dx = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi},$$

$$\int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = -\frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad \int_1^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = -\frac{2}{n\pi} \left((-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$$

- a) Escriba la serie de Fourier, la serie de cosenos y la serie de senos generadas por f . Para justificar su respuesta, plantee las fórmulas para hallar los coeficientes necesarios; no hace falta que calcule las integrales si aparecen en la lista de más arriba.
- b) Dé los valores de cada una de estas tres series evaluadas en -2 .
- c) Indique, para cada una de las funciones definidas por las series anteriores, si se trata de una función continua en $x = 4$ o no, justificando su respuesta.

26. (r) Considere la función dada por $f(x) = 10x - x^2$ en el intervalo $[0, 10]$.

- a) Plantee el desarrollo en serie de senos de Fourier de f . Para ello especifique (sin necesidad de resolver) claramente las integrales necesarias, y luego exprese la serie pedida.

- b) Indique, justificando su respuesta, si la serie obtenida es o no convergente al valor de la función f en $x \in [0, 10]$. En caso de no ser convergente en algunos valores x , debe indicar claramente a qué valor converge la serie obtenida, si es que lo hace.
- c) Represente gráficamente en el intervalo $[-10, 10]$ la función obtenida (serie de Fourier).
27. (r) Sea f la función definida en $(0, 2k)$ por $f(x) = k$, si $0 < x < k$ y $f(x) = 2k - x$, si $k \leq x < 2k$. Sabiendo que:

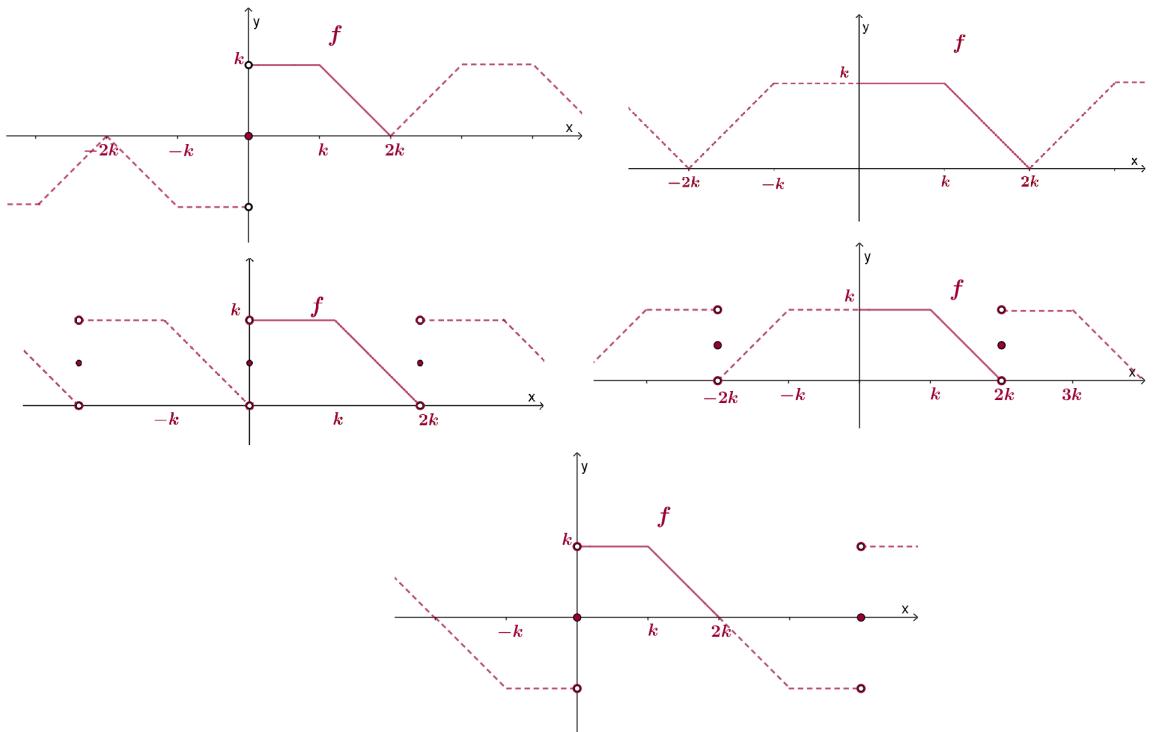
$$(1) \frac{1}{k} \int_0^{2k} f(x) dx = \frac{3k}{2};$$

$$(2) \frac{1}{k} \int_0^{2k} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2k}\right) dx = \frac{4k}{n^2\pi^2} \left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right);$$

$$(3) \frac{1}{k} \int_0^{2k} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2k}\right) dx = \frac{4k}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2k}{n\pi};$$

$$(4) \frac{1}{k} \int_0^{2k} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{k}\right) dx = \frac{k}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1); (5) \frac{1}{k} \int_0^{2k} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{k}\right) dx = \frac{k}{n\pi}$$

- a) (10 puntos) Exprese la serie de cosenos de Fourier generada por f y, si usa fórmulas de las anteriores, indique claramente cuál o cuáles usa.
- b) (10 puntos) Exprese la serie de senos de Fourier generada por f y, si usa fórmulas de las anteriores, indique claramente cuál o cuáles usa.
- c) (10 puntos) Exprese la serie de Fourier generada por f y, si usa fórmulas de las anteriores, indique claramente cuál o cuáles usa.
- d) (15 puntos) Indique si alguno de los siguientes gráficos corresponde a la serie de cosenos de Fourier generada por f , si alguno corresponde a la serie de senos de Fourier generada por f y si alguno corresponde a la serie de Fourier generada por f . Justifique.



5. Apéndice: fórmulas trigonométricas útiles

Identidad trigonométrica	Fórmulas derivadas
Identidad Pitagórica $(1) \cos^2(x) + \sen^2(x) = 1$	$1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$ $\tan^2 + 1 = \sec^2(x)$
Funciones trigonométricas de la suma o resta de ángulos $\sen(x \pm y) = \sen(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sen(y)$ $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sen(x) \sen(y)$	$\sen(x + y) + \sen(x - y) = 2 \sen(x) \cos(y)$ si $x = y$: $\sen(2x) = 2 \sen(x) \cos(x)$ $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos(x) \cos(y)$ $- \cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \sen(x) \sen(y)$ si $x = y$: $(2) \cos(2x) = \cos^2(x) - \sen^2(x)$ Combinando (1) y (2): $1 + \cos(2x) = 2 \cos^2(x)$ $1 - \cos(2x) = 2 \sen^2(x)$