

Unidad 5:

Control Discreto de Sistemas Continuos e Híbridos



Control Discreto de Sistemas Continuos e Híbridos

Plan General:

- 1. Introducción: Autómatas y Control Discreto**
 - Aplicaciones y Fundamentos. Autómatas / FSM. STATEFLOW. GRAFCET.
- 2. Autómatas Programables – IEC61131: Arq. y Lenguajes**
 - PLCs, arquitecturas. Entorno de desarrollo. Configuración. Lenguajes ST / SFC.
- 3. Diseño de Sists. Control Secuencial**
 - Métodos clásicos. Métodos sistemáticos. Aplicación.
- 4. Comunicaciones Industriales: Redes y Protocolos**
 - Arquitecturas distribuidas. Buses de Campo y Protocolos industriales.
- 5. Control Discreto de Sistemas Continuos e Híbridos**
 - Sistemas muestreados. Simulación y Control. Sistemas Híbridos. Aplicación.

Control Discreto de Sistemas Continuos e Híbridos

Plan de la Unidad 5:

A. Control en Tiempo Discreto

- Control Digital Directo (DDC, Control Regulatorio o de Lazo Cerrado en Tiempo Discreto) de Sistemas de Estados Continuos Muestreados.
- Método de Emulación Discreta de Controlador Continuo.
- Implementación. Simulación “Híbrida” (TC-TD, Sistema de Datos Muestreados).

B. Control Híbrido

- Integración con Control Secuencial Supervisor (Control de Estados Discretos activados por Eventos).
- Simulación Híbrida conjunta (Sistema de Datos Muestreados y de Estados Discretos activados por Eventos).

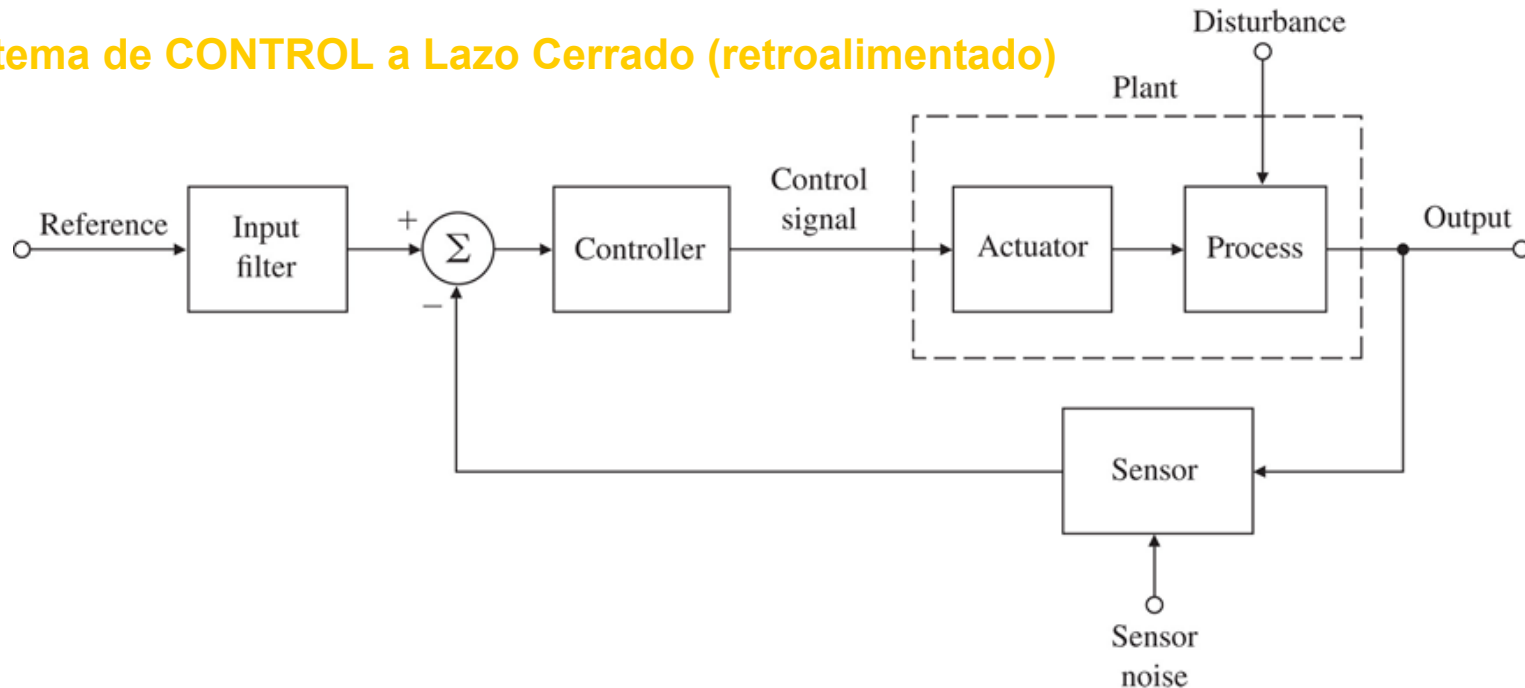
C. Aplicaciones

- Implementación. Aspectos prácticos. Características y aplicaciones.
- Resumen y Consultas.
- Próximos Pasos...

CONTROL: Objetivos y Especificaciones

1. **ESTABILIDAD** → Seguridad y Disponibilidad para operación.
2. **ROBUSTEZ** frente a Incertidumbre de Modelo o Perturbaciones externas.
3. **DESEMPEÑO (Performance)** → Optimización (índices o especificaciones)
 - Rechazo a Perturbaciones o Cargas.
 - Seguimiento de Consignas o Comandos de Referencia.
 - Esfuerzos o acciones de Control razonables.

Sistema de CONTROL a Lazo Cerrado (retroalimentado)



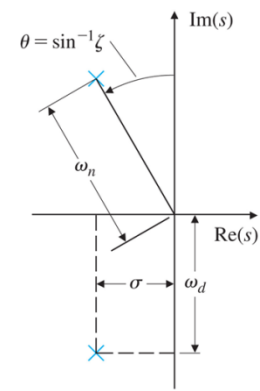
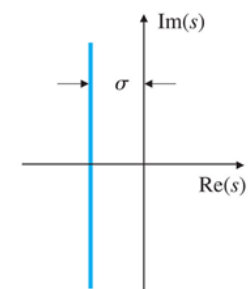
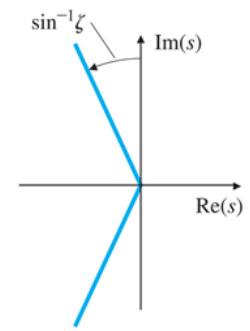
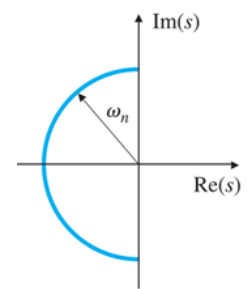
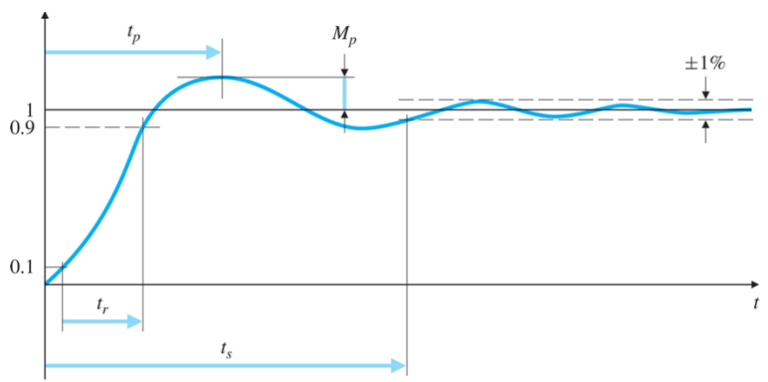
CONTROL: Objetivos y Especificaciones

OBJETIVOS: [cualitativos] del Sistema de CONTROL a Lazo Cerrado (retroalimentado)

1. **ESTABILIDAD**
2. **ROBUSTEZ.**
3. **DESEMPEÑO (Performance) → Optimización (índices o especificaciones)**

ESPECIFICACIONES en DT ↔ Espacio de Estado: [cuantitativos]

DT: Rta. a Escalón de Referencia **UBICACIÓN DE POLOS O VALORES PROPIOS de LAZO CERRADO** (Lugar PERMITIDO en Plano s vs. Restricción)



Rta. Dominante 2° orden sin ceros (aproximación)

Análisis:

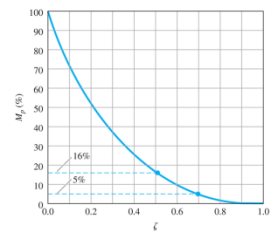
Diseño = síntesis:

rise time

$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{t_r}$$

+ overshoot



+

settling time = Ubicación

$$t_s \approx \frac{4.6}{\sigma}$$

$$\sigma \geq \frac{4.6}{t_s}$$

$$\zeta \geq \zeta(M_p)$$

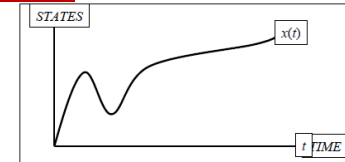
SD en Tiempo Continuo → T. Discretizado

SD FÍSICOS: Estados CONTINUOS, activados x TIEMPO

Leyes físicas, fuerzas de la naturaleza (macroscópico).

SDTC – Modelos en “Tiempo Continuo”

$$\dot{x} = f(x, t)$$



- Almacenamiento e intercambio de **Energía interno** o con entorno;
- Vectores de **Estado** $x(t)$, **Entrada** $u(t)$ y **Salida** $y(t)$: toman valores en conj. **Continuos**, finitos o infinitos (\mathbb{R}), evolucionando en Tiempo **Continuo** t (\mathbb{R}).
- Ej. $S_{LTI} \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x_0 = x(t_0) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$, donde: $u(t)_{m \times 1}, x(t)_{n \times 1}, y(t)_{p \times 1}$
 $A_{n \times n}, B_{n \times m}, C_{p \times n}, D_{p \times m}$
- Subclases: **LTI**, **LTV**, **LPV**, **NL**, etc.

SDTD – Modelos en “Tiempo Discretizado” [Muestreo]

- Representación **muestreada** de SDTC (**Zero-Order Hold**);
- Vect. de **Estado**, **Entrada** y **Salida**: valores en conj. **Continuos** (o **cuantizados**), finitos o infinitos (\mathbb{R}), evolucionando en Tiempo **Discreto** (o Muestreo) $t \rightarrow k.T$.

$$S_{LTI} \begin{cases} x((k+1).T) = [\Phi \equiv e^{A.T}] \cdot x(k.T) + [\Gamma \equiv \int_0^T e^{A.\eta} . d\eta . B] \cdot u(k.T); & x_0 = x(0) \\ y(k.T) = C \cdot x(k.T) + D \cdot u(k.T) \end{cases}$$

SD LTI: Tiempo Continuo → T. Discretizado

$$S_{LTI} \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); & x_0 = x(t_0) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}, \text{ donde: } \begin{matrix} u(t)_{m \times 1}, x(t)_{n \times 1}, y(t)_{p \times 1} \\ A_{n \times n}, B_{n \times m}, C_{p \times n}, D_{p \times m} \end{matrix}$$

Solución de Ec.Estado (TC) → Aplicación **entre 2 instantes Ts (TD)**

b) Rta forzada (cond. iniciales) + exacta $U(t) \neq 0$

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t); \quad x(0) = x_0$$

$$\frac{d}{dt} e^{-At} = -A e^{-At} = -e^{-At} A$$

$$e^{-At} [\dot{x}(t) - A x(t)] = e^{-At} B u(t)$$

$$\frac{d}{dt} [e^{-At} x(t)] = e^{-At} B u(t)$$

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} [e^{-A\tau} x(\tau)] d\tau = \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$$

$$e^{-At} x(t) \Big|_0^t = e^{-At} x(t) - x_0 = \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$$

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Handwritten notes:
 $sX(s) - x_0 = B U(s)$
 $[sI - A] X(s) = x_0 + B U(s)$
 $X(s) = [sI - A]^{-1} x_0 + [sI - A]^{-1} B U(s)$
 $X(s) = \underbrace{[sI - A]^{-1} x_0}_{\mathcal{L}\{e^{At}\}} + \underbrace{[sI - A]^{-1} B U(s)}_{\mathcal{L}\{e^{At}\} \cdot B U(s)}$

DT: $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + B_d \frac{d}{dt} u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) + D_d \frac{d}{dt} u(t) \end{cases}$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Handwritten notes:
 $t_0 = kT_s$
 $t = (k+1)T_s$
 $x[(k+1)T_s] = e^{AT_s} x[kT_s] + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{A((k+1)T_s - \tau)} B u(\tau) d\tau$
 $\eta = (k+1)T_s - \tau \Rightarrow d\eta = -d\tau$
 $\tau = kT_s \Rightarrow \eta = T_s$
 $\tau = (k+1)T_s \Rightarrow \eta = 0$
 $x[(k+1)T_s] \approx \underbrace{e^{AT_s}}_{\Phi(T_s)} x[kT_s] + \underbrace{\int_0^{T_s} e^{A\eta} B u(kT_s) d\eta}_{\Gamma(T_s)} B u(kT_s)$
 $x_{(k+1)} \equiv [\Phi] \cdot x_{(k)} + [\Gamma] \cdot u_{(k)}$
 $y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k)$
 $\rho(z) = zI - \Phi$

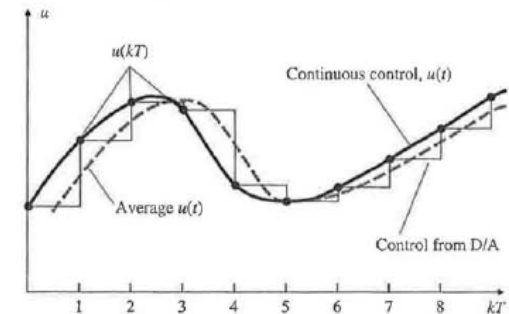
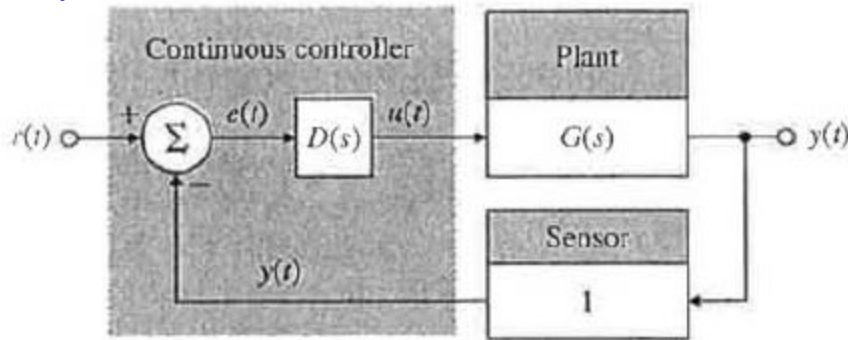
$$S_{LTI} \begin{cases} x((k+1) \cdot T) = [\Phi \equiv e^{A \cdot T}] \cdot x(k \cdot T) + [\Gamma \equiv \int_0^T e^{A \cdot \eta} \cdot d\eta \cdot B] \cdot u(k \cdot T); & x_0 = x(0) \\ y(k \cdot T) = C \cdot x(k \cdot T) + D \cdot u(k \cdot T) \end{cases}$$

SD LTI: Tiempo Continuo → T. Discreto

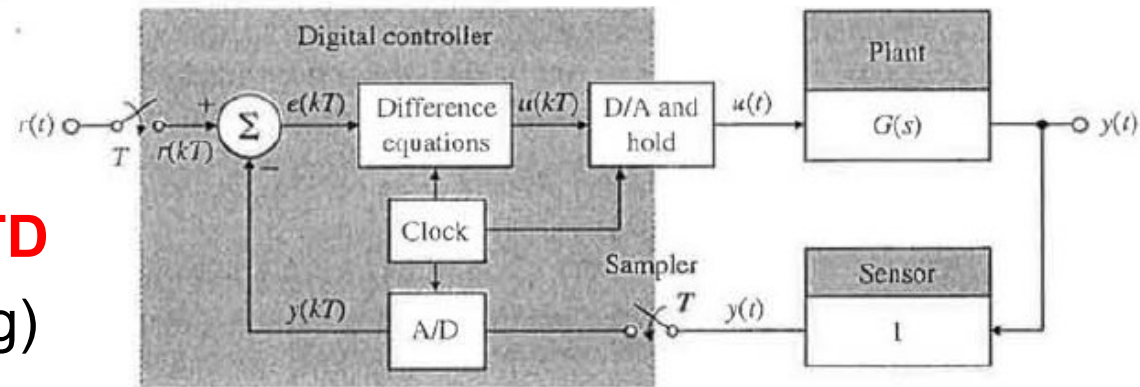
$$S_{LTI} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t); & \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t) \end{cases}, \text{ donde: } \mathbf{u}(t)_{m \times 1}, \mathbf{x}(t)_{n \times 1}, \mathbf{y}(t)_{p \times 1}$$

$$\mathbf{A}_{n \times n}, \mathbf{B}_{n \times m}, \mathbf{C}_{p \times n}, \mathbf{D}_{p \times m}$$

a) Controlador básico “Continuo” o Analógico en TC



b) Controlador básico de “Datos Muestreados” o Controlador “Digital” en TD (retardo prom. $T/2$ + aliasing)



$$S_{LTI} \begin{cases} \mathbf{x}((k+1) \cdot T) = [\Phi \equiv e^{\mathbf{A} \cdot T}] \cdot \mathbf{x}(k \cdot T) + [\Gamma \equiv \int_0^T e^{\mathbf{A} \cdot \eta} \cdot d\eta \cdot \mathbf{B}] \cdot \mathbf{u}(k \cdot T); & \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{y}(k \cdot T) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(k \cdot T) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(k \cdot T) \end{cases}$$

Controlador “Digital” en TD:

2 técnicas básicas p/definir las **ecuaciones en diferencias** del **controlador digital**:

1) Emulación o Equivalente Discreto

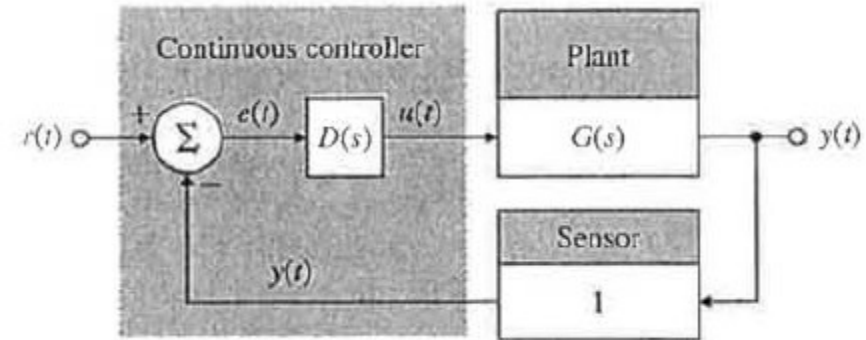
Diseño Controlador “continuo” en TC →

→ realizar **Aproximación Discreta**

ej. Integración/derivación Numérica en DT:

- Euler (rectángulos, explícito ó implícito),
- **Trapecios** = Aprox. **Bilineal (Tustin)**

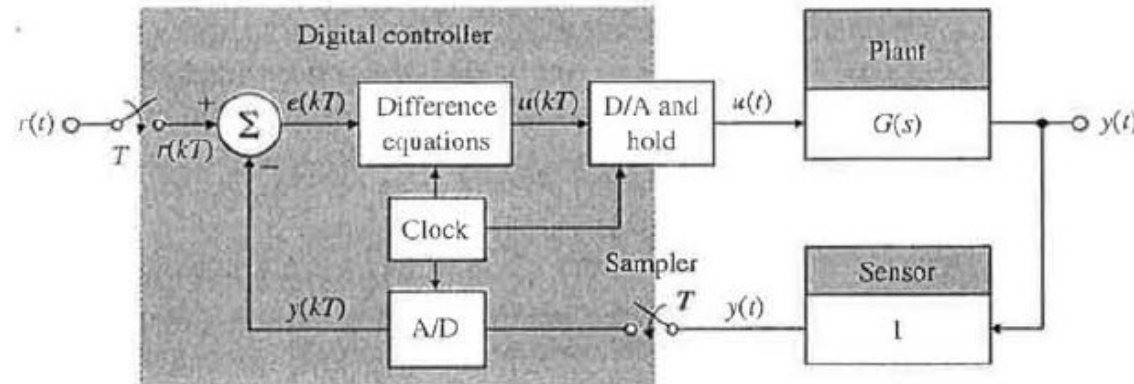
(valido si **fs [Hz]=1/Ts >> BW control: 20-25 veces**)



2) Diseño Discreto Directo

(acepta $f_s [Hz] = 1/T_s > 2 \cdot BW$, no tan exigente).

Diseño en TD, a partir de **modelo discretizado de Planta**.



$$S_{LTI} \begin{cases} x((k+1) \cdot T) = [\Phi \equiv e^{A \cdot T}] \cdot x(k \cdot T) + [\Gamma \equiv \int_0^T e^{A \cdot \eta} \cdot d\eta \cdot B] \cdot u(k \cdot T); \quad x_0 = x(0) \\ y(k \cdot T) = C \cdot x(k \cdot T) + D \cdot u(k \cdot T) \end{cases}$$

CONTROL: IMPLEMENTACIÓN DIGITAL

Ej. Controlador PID en tiempo continuo (Analógico):

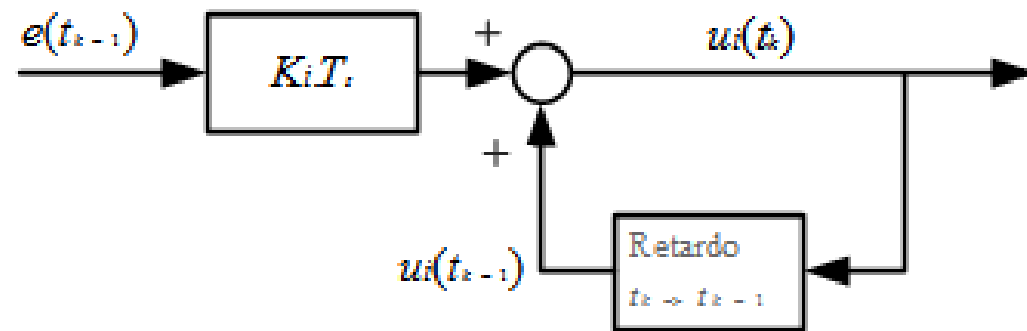
$$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \cdot \int e(t).dt + K_d \cdot \frac{de(t)}{dt} = K_p \cdot \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int e(t).dt + T_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \right]$$

→ PID equiv. en tiempo discreto (Digital): Método de Emulación discr.

a) Acción I → **INTEGRACIÓN DISCRETA (Euler / Mét. Rectángulos):**

$$u_i(t_k) = K_i \cdot I_e(t_k) = K_i \cdot \left[\int_0^{t_k} e(t).dt + I_{e0} \right] = K_i \cdot \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} e(t).dt + \int_0^{t_{k-1}} e(t).dt + I_{e0} \right] =$$

$$\approx K_i \cdot [T_s \cdot e(t_{k-1}) + I_e(t_{k-1})] \quad \therefore$$



$$u_i(t_k) = K_i \cdot I_e(t_k)$$

$$I_e(t_k) \approx I_e(t_{k-1}) + T_s \cdot e(t_{k-1})$$

Opciones: Euler (Rectángulos) explícito / implícito,
Tustin (Trapezios) = Aprox. **Bilineal**

CONTROL: IMPLEMENTACIÓN DIGITAL

Ej. Controlador PID en tiempo continuo (Analógico):

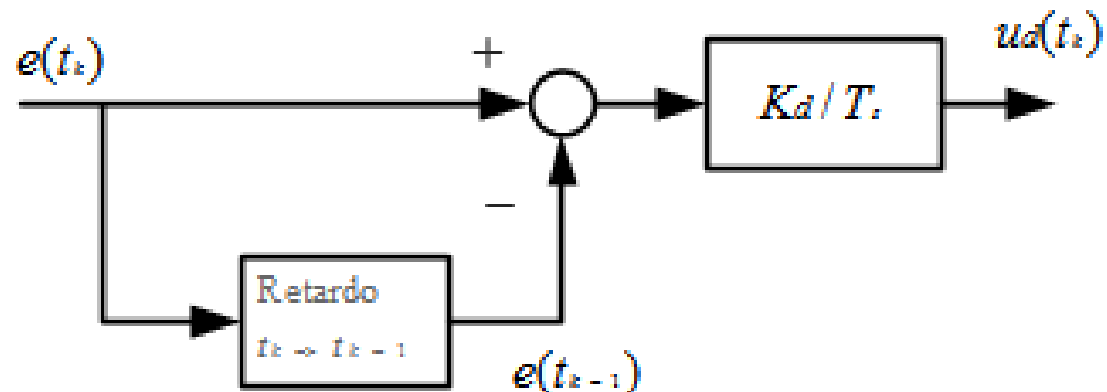
$$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \cdot \int e(t).dt + K_d \cdot \frac{de(t)}{dt} = K_p \cdot \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int e(t).dt + T_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \right]$$

→ PID equiv. en tiempo discreto (Digital): Método de Emulación discr.

a) Acción **D** → **DERIVACIÓN DISCRETA (Cociente incremental):**

$$u_d(t_k) = K_d \cdot D(t_k) = K_d \cdot \left[\frac{de(t_k)}{dt} \right] \approx K_d \cdot \left[\frac{\Delta e(t_k)}{\Delta t} \right] = K_d \cdot \left[\frac{e(t_k) - e(t_{k-1})}{T_s} \right] \quad \dots$$

$$u_d(t_k) \approx \frac{K_d}{T_s} \cdot [e(t_k) - e(t_{k-1})]$$



CONTROL: IMPLEMENTACIÓN DIGITAL

→ PID equiv. en tiempo discreto (Digital): Método de Emulación discreta

Procedimiento Computacional (ALGORITMO)

implementable en PLC / PAC, Procesador Digital DSP, DSC, uP, etc.

(ej. Bloque de Función FB: requiere memoria interna !)

0. PARAMETRIZACIÓN e INICIALIZACIÓN

Ganancias: definir valores de K_p , K_i , K_d

Tiempo de Muestreo: definir T_s

Inicialización

Paso: $k:=0$;

$U_i(0):= 0$; $E(0):= 0$;

1. CICLO REPETITIVO (Periódico con Periodo $T_s = \text{const.}$)

a) Paso: $k:= k + 1$;

b) leer entradas para Paso k : consigna $Y^*(k)$ y valor medido $Y(k)$;

c) error: $E(k):= Y^*(k) - Y(k)$;

d) **Cálculo PID:**

$U_p(k):= K_p * E(k)$;

$U_i(k):= U_i(k-1) + K_i * T_s * (E(k) + E(k-1)) / 2$; % Trapecios (TUSTIN)

$U_d(k):= K_d / T_s * (E(k) - E(k-1))$;

$U_{pid}(k) = U_p(k) + U_i(k) + U_d(k)$; (Nota: agregar **bias**, etc.)

e) escribir salida para Paso " k " = $k + dk$: acción de control $U_{pid}(k)$

f) **Memorizar p/próximo paso:**

$U_i(k-1):= U_i(k)$; $E(k-1):=E(k)$;

g) **ESPERA** (hasta cumplir intervalo de Tiempo Muestreo T_s)

h) **Volver a 1 y REPETIR (Bucle sin fin)**

Reducir **RETARDO** dk

Lectura de **ENTRADAS**

→ tiempo de cálculo dk

Escritura de **SALIDAS**

PRECALCULAR

Todo lo que no depende

De Paso actual k

→ **HACER!**

CONTROL: IMPLEMENTACIÓN DIGITAL

Método: *Emulación en Tiempo Discreto de Control Diseñado en Tiempo Continuo*

Condición: *Tiempo de muestreo $T_s = t_k - t_{k-1}$ suficientemente rápido (pequeño) vs. variación de variables del proceso*

*Criterio Teórico: Teorema del muestreo ($f_s > 2 * BW_{controlador}$)*

*Criterio Práctico: $f_s \sim (20 \text{ ó } 25) * BW_{controlador}$*

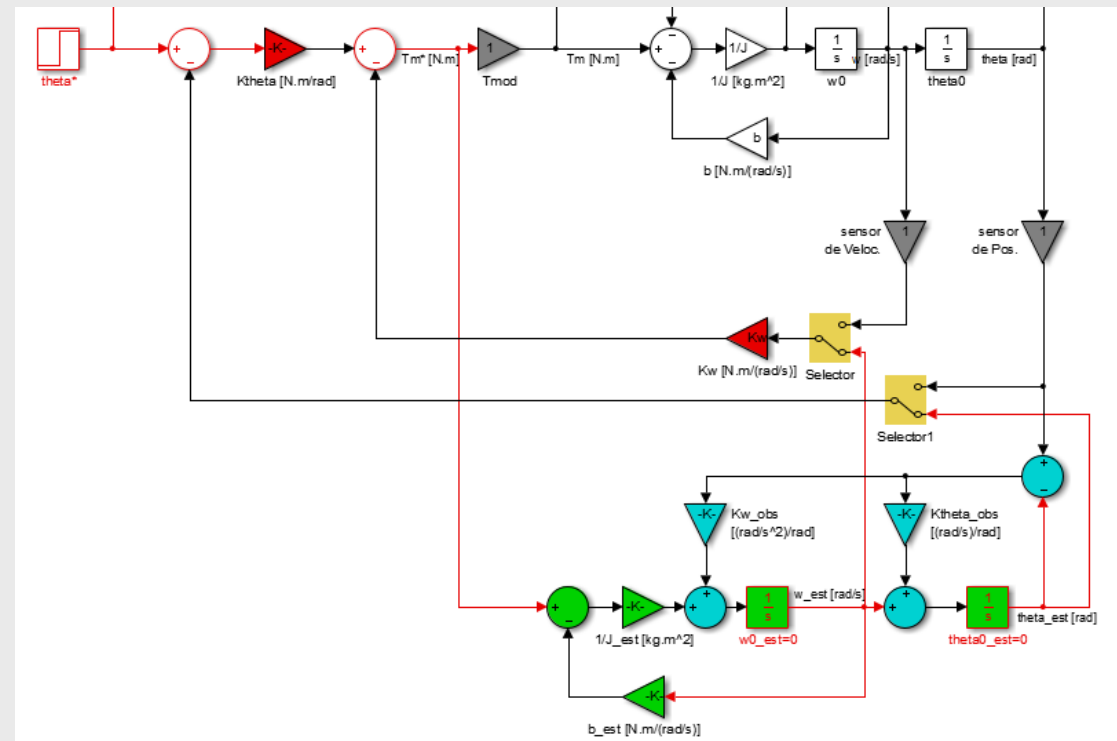
Ejercicio:

1. Control completo (Ley de Control y Observador) para Sistema rotacional 1 g.d.l. / estado: velocidad y posición; acción ctrl: torque. Diseño de Controlador de movimiento PID y Simulación
 - incorporación de muestreo y Emulación en Tiempo Discreto (modelo Simulink discreto → Código secuencial).
 - Simulación comparativa

CONTROL: IMPLEMENTACIÓN DIGITAL

Ejercicio:

- Control completo (Ley de Control y Observador) para Sistema rotacional 1 g.d.l. / estado: velocidad y posición; acción ctrl: torque. Diseño de Servosistema tipo 1 y Simulación



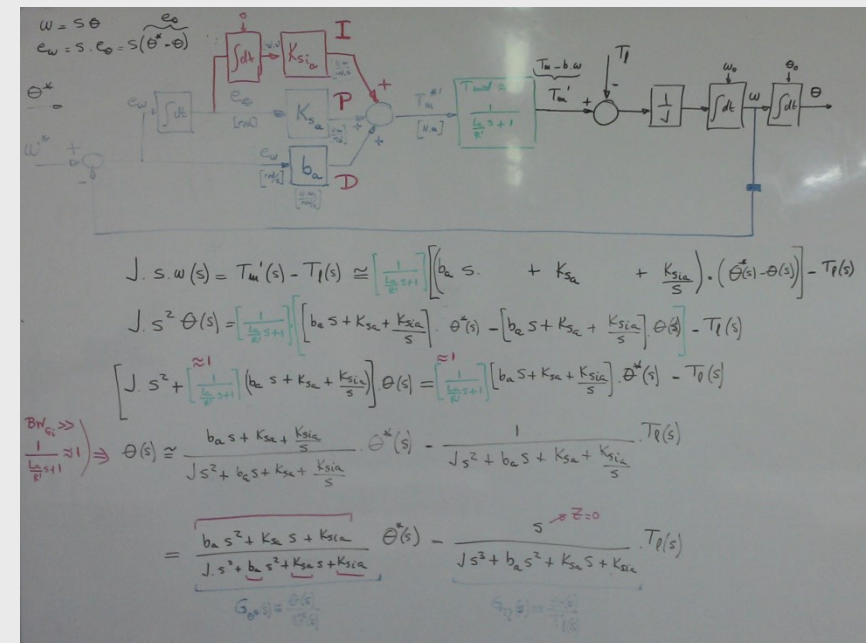
- incorporación de muestreo y Emulación en Tiempo Discreto (modelo Simulink discreto → Código secuencial).
- Simulación comparativa

CONTROL: IMPLEMENTACIÓN DIGITAL

Ejercicio:

1. **Control Movimiento** completo en cascada $T_{mod}=1$ (Ley de Control PID + Observador) para Sistema rotacional 1 g.d.l. / estado: velocidad y posición; acción ctrl: torque. Diseño de Servosistema tipo 1 y Simulación

- incorporación de muestreo y Emulación en Tiempo Discreto (modelo Simulink discreto → Código secuencial).
- Simulación comparativa



CONTROL DIGITAL:

Bibliografía Ampliatoria:

Capítulo 8: **DIGITAL CONTROL**, en libro

G. Franklin, D. Powell, A. Emami-Naeini, **Feedback Control of Dynamic Systems**, 6° Edición.

(ver anexo →)

Visión general introductoria de Control Digital:

- Métodos de Diseño (enfoques alternativos):
 - Emulación discreta de controlador continuo vs.
 - Diseño discreto directo.
- Aspectos de implementación.

Paper: **Sistemas Mecatrónicos y Control**

R. Isermann, “**MECHATRONIC SYSTEMS – Innovative Products with Embedded Control –**”, IFAC 2005.

(ver anexo →)