Transformada z

Dr. Ing. Hernán Garrido

Control y sistemas
Universidad Nacional de Cuyo, Facultad de Ingeniería

carloshernangarrido@gmail.com

Agosto de 2023

Contenidos

Definición de la transformada z

Generalidades de la Transformada z

- Es la herramienta fundamental para el análisis de sistemas en tiempo discreto.
- Es análoga a la transformada de Laplace para sistemas en tiempo continuo.

Recordemos la definición de la transformada de Laplace

$$\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt, s \in \mathbb{C}$$

y una propiedad importante

$$\mathscr{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s)$$

Así podemos encontrar la función de transferencia $Y(s)/X(s)$ de un sistema en tiempo continua a partir de su ecuación diferencial.

Transformada z bilateral

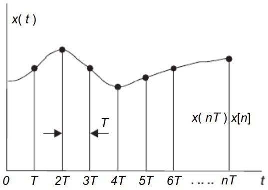


Figura: Señal en tiempo continuo y en tiempo discreto.

Señal muestreada: $x[n] = x(nT)$

$$n \in \mathbb{Z}, T = 1/f_s \in \mathbb{R}$$

Frecuencia compleja: $z = re^{j\omega} = r(\cos\omega + j\sin\omega), 0 \leq \omega < \pi$

Definición

$$z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, z \in \mathbb{C}$$

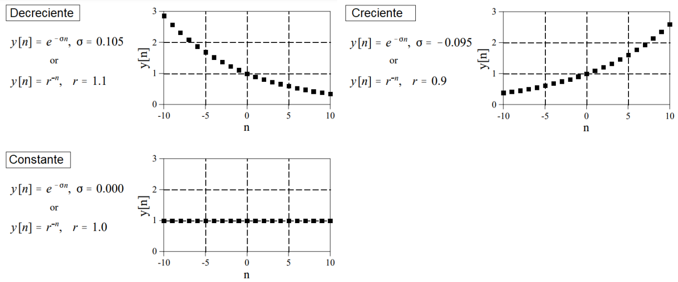
Transformada z unilateral

En el caso de señales causales, es decir aquellas donde $x[n] = 0 \forall n < 0$:

Definición

$$z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}, z \in \mathbb{C}$$

Figura: Interpretación de la exponencial compleja.



Respuesta impulsiva (característica del sistema):

$$h[n]$$

Entrada:

$$x[n]$$

Salida:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Interés por la exponencial compleja

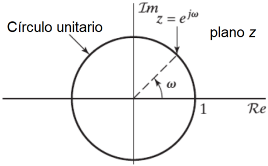
Si $x[n] = z^n \Rightarrow y[n] = h[n] * z^n$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^n z^{-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = H(z)z^n$$

Función de transferencia de un sistema en tiempo discreto

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}$$

Es un factor de escala para cada exponencial compleja que entre al sistema. Depende del sistema ($h[n]$) y de la frecuencia de la entrada (z).



Transformada de Fourier de tiempo discreto ($\neq$ TDF)

Es un factor de escala válido sólo para entradas periódicas de la forma $e^{j\omega}$ ($|z| = 1$):

$$H(z|_{r=1}) = H(e^{j\omega}), \omega \in \mathbb{R}$$

Sistemas causales y anti-causales

Señales

$x[n]$ es una señal causal si $x[n] = 0, \forall n < 0$
$x[n]$ es una señal anti-causal si $x[n] = 0, \forall n > 0$
$x[n]$ es una señal no-causal si $\exists n < 0 : x[n] \neq 0$ y $\exists n > 0 : x[n] \neq 0$

Sistemas

Un sistema con función de transferencia $H(z)$ es causal si su respuesta impulsiva $h[n]$ es causal, y viceversa.

Ejemplos:

- Causales: filtros digitales en tiempo real, modelos físicos discretizados en el tiempo
- No-causales: filtros digitales *offline*

Región de convergencia

Definición de RDC

La RDC es el subconjunto de los $\mathbb{C}$ donde pertenece z y $z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ converge.

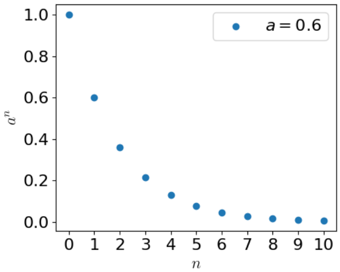
Ejemplo:

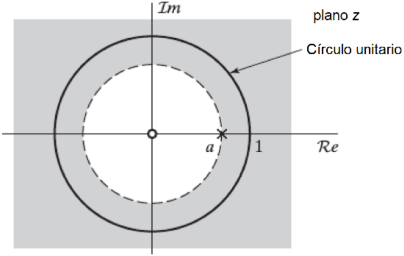
$$a \in \mathbb{R}, u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}, x[n] = a^n u[n]$$

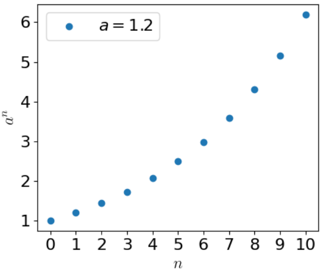
$$z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

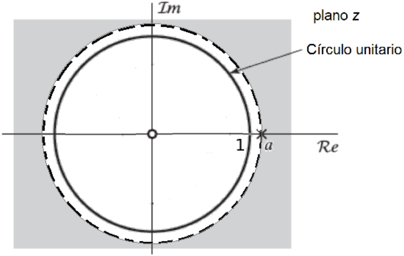
$$\Leftarrow |az^{-1}| < 1 \iff |a| < |z|$$

Ejemplos de RDC





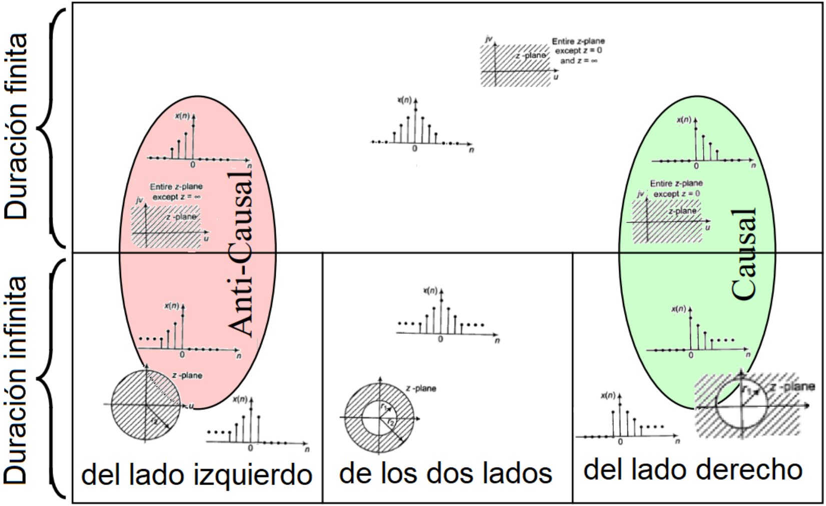




Propiedades de la Región De Convergencia

1. La RDC siempre es una corona circular, es decir independiente de ω:
   - $|z| > r_0$ (solo acotada por dentro)
   - $|z| < r_0$ (solo acotada por fuera)
   - $r_0 < |z| < r_1$ (corona circular en sentido estricto)
2. La RDC no contiene ningún polo $(X(z) = N(z)/D(z))$.
3. Si $x[n]$ es de duración finita: RDC $= \mathbb{C}$
4. Si $x[n]$ es de duración infinita:
   - del lado derecho $(\exists N : x[n] = 0 \forall n < N)$: $|z| > r_0$
   - del lado izquierdo $(\exists N : x[n] = 0 \forall n > N)$: $|z| < r_0$
   - de ambos lados: $r_0 < |z| < r_1$

Propiedades de la Región De Convergencia



Estabilidad de sistemas en tiempo discreto

- Hay muchas definiciones de estabilidad.
- En sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI), todas ellas son equivalentes a la estabilidad Entrada-Acotada-Salida-Acotada (BIBO).

Definiciones

Un sistema causal con respuesta impulsiva $h[n]$ y RDC $|z| > r_o$ es:

- (asintóticamente) estable si $z\{h[n]\}$ converge para $r_o < 1$
- marginalmente estable si $z\{h[n]\}$ sólo converge para $r_o = 1$
- inestable si $z\{h[n]\}$ sólo converge para $r_o > 1$

Pares de transformada z de señales elementales

$x[n]$	$X(z)$	RDC
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\delta[n]$	1	Cualquier z
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$r^n \sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
$r^n \cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$

Propiedades de la Transformada z

- Linealidad

$$z\{ax[n] + by[n]\} = aX(z) + bY(z)$$

- Desplazamiento en el tiempo

$$z\{x[n - n_0]\} = z^{-n_0}X(z)$$

- Convolución

$$z\{x[n] * y[n]\} = X(z)Y(z)$$

Ecuaciones en diferencias

Sistema en tiempo discreto:

- Entrada: $x[n]$
- Salida: $y[n]$
- Implementación como ecuación en diferencias

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \ldots + a_N y[n-N] = \\ b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \ldots + b_M x[n-M] \quad (1)$$

con condiciones iniciales:

$$y[-1], y[-2], ..., y[-N]$$

Solución de una ecuación en diferencias

En el dominio del tiempo

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right)$$

En el dominio de la frecuencia

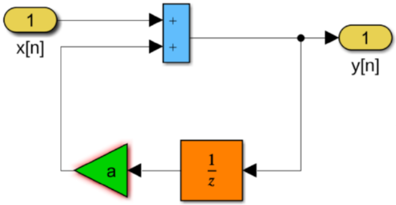
$$X(z) = z\{x[n]\}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = z\{h[n]\}$$

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$$y[n] = z^{-1}\{Y(z)\}$$

Ejemplo de función de transferencia a partir de una ecuación en diferencias



$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] + a\,y[n-1]\,, \\
y[n] - a\,y[n-1] &= x[n]\,, \\
Y(z) - a\,Y(z)\,z^{-1} &= X(z)\,, \\
Y(z)(1 - a\,z^{-1}) &= X(z)\,, \\
H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{1}{(1 - a\,z^{-1})}
\end{aligned}
$$

Figura: Representación gráfica y matemática de un sistema lineal invariante en el tiempo de primer orden en tiempo discreto