FACULTAD DE INGENIERÍA

CINEMÁTICA DE PARTÍCULAS PRÁCTICA

Mecánica Aplicada
Mecánica y Mecanismos

Ing. Carlos Barrera

Ing. Carlos Barrera 2024

Procedimiento para el análisis

Sistema de coordenadas.

• Establezca una coordenada de posición *s* a lo largo de la trayectoria y especifique su *origen fijo* y dirección positiva.

• Como el movimiento sucede a lo largo de una línea recta, las cantidades vectoriales de posición, velocidad y aceleración se pueden representar como escalares algebraicas. Para trabajo analítico los *signos algebraicos* de *s*, v y *a* se definen entonces por sus signos algebraicos.

• Una flecha mostrada al lado de cada ecuación cinemática indica el sentido positivo de cada uno de estos escalares.

Ecuaciones cinemáticas.

• Si se conoce una relación entre *dos* de las cuatro variables, *a*, v, *s* y *t*, entonces se puede obtener una tercera variable con una de las ecuaciones cinemáticas, $a = dv/dt$, $v = ds/dt$ o $a\,ds = v\,dv$, puesto que cada ecuación relaciona las tres variables.

• Siempre que se realice una integración, es importante que se conozcan la posición y la velocidad en un instante dado para evaluar o la constante de integración si se utiliza una integral indefinida, o los límites de integración si se utiliza una integral definida.

• Recuerde que las siguientes ecuaciones tienen sólo un uso limitado. Estas ecuaciones se aplican *sólo* cuando la *aceleración es constante* y las condiciones iniciales son $s = s_0$ y $v = v_0$ cuando $t=0$.

$$v = v_0 + a_c t$$

Aceleración constante

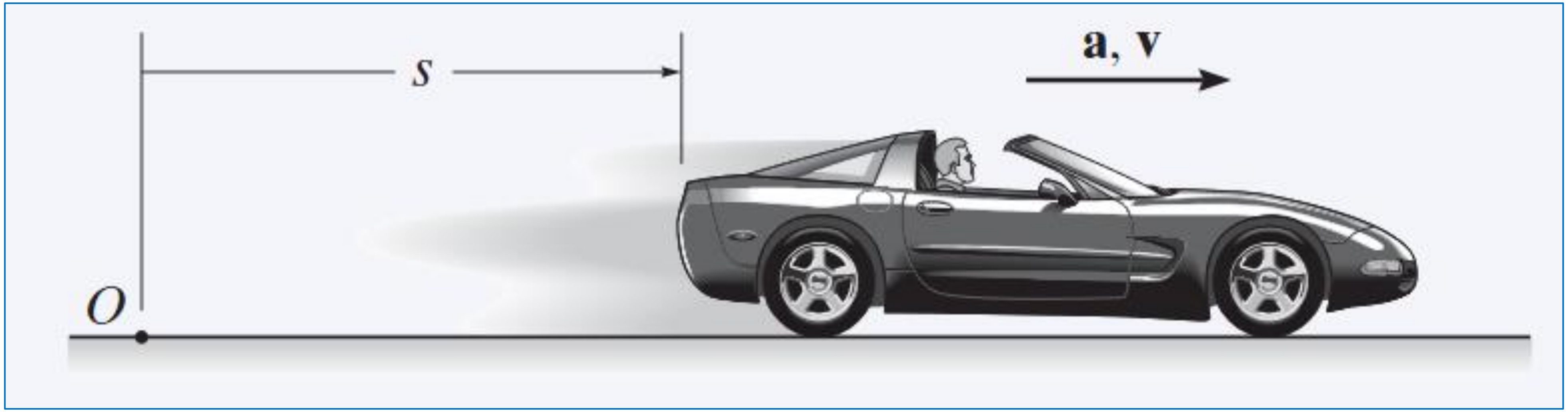
$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$

Aceleración constante

Ejercicio N°1

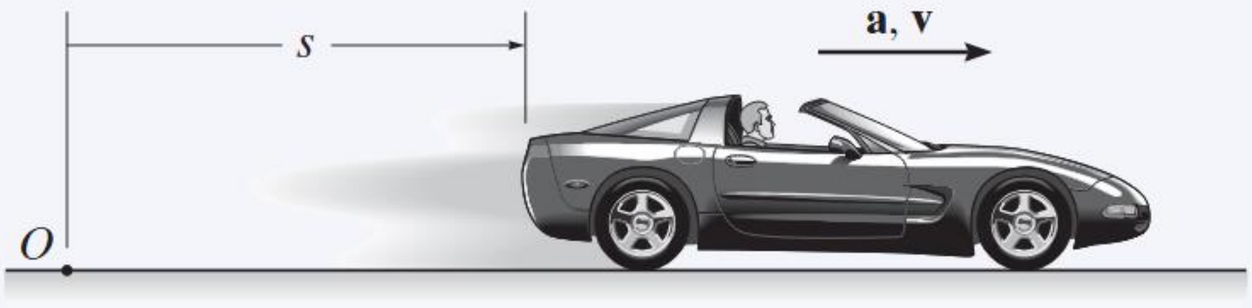
El automóvil de la figura se desplaza en línea recta de modo que durante un **corto tiempo su velocidad está definida por $v=(3t^2+2t)$pies/s**, donde t está en segundos.

Determine su posición y aceleración cuando t=3s. Cuando t=0, s=0.



SOLUCIÓN

- **Sistema de coordenadas.** La coordenada de posición se extiende desde el origen fijo O hasta el carro, positiva a la derecha.
- **Posición.** Como v=f (t), la posición del automóvil se determina con v=ds/dt, puesto que esta ecuación relaciona v, s y t. Observe que s=0 cuando t=0, tenemos*



$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad v = \frac{ds}{dt} = (3t^2 + 2t)$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t (3t^2 + 2t)dt$$

$$s \Big|_0^s = t^3 + t^2 \Big|_0^t$$

$$s = t^3 + t^2$$

Cuando $t = 3$ s,

$$s = (3)^3 + (3)^2 = 36 \text{ pies}$$

Aceleración.

- Como v=f (t), la aceleración se determina con a=dv/dt, puesto que esta ecuación relaciona a, v y t.

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 2t)$$

$$= 6t + 2$$

Cuando $t = 3$ s,

$$a = 6(3) + 2 = 20 \text{ pies/s}^2 \rightarrow$$

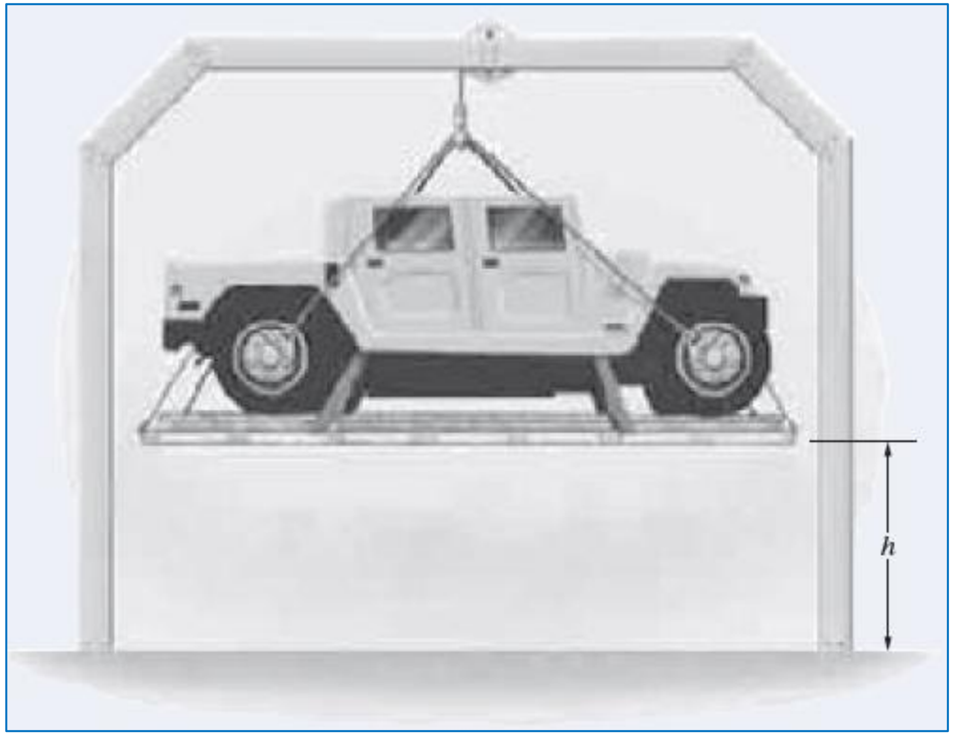
NOTA: para resolver este problema no pueden utilizarse las fórmulas de aceleración constante, porque la aceleración es una función del tiempo.
*Se puede obtener el mismo resultado al evaluar una constante de integración C en vez de utilizar límites definidos en la integral. Por ejemplo, integrar ds= $(3t^2+2t)$ dt resulta en s $=t^3+ t^2+$ C. Con la condición de que en t 0, s 0, entonces C=0.

Movimiento en línea recta con aceleración constante

Ejercicio N°2

Los ingenieros que prueban un vehículo que debe lanzarse por paracaídas estiman que la velocidad vertical del automóvil al tocar el suelo será de 6m/s.

Si sueltan el vehículo desde el bastidor de prueba mostrado, ¿a qué altura *h* se debe soltar para simular la caída con paracaídas?



Estrategia

- Si la única fuerza significativa que actúa sobre un objeto cerca de la superficie de la Tierra es su peso, la aceleración del objeto es aproximadamente constante e iguala la aceleración debida a la gravedad al nivel del mar.
- Por lo tanto, se supone que la aceleración del vehículo durante su corta caída es $g=9.81\ m/s^2$.
- Se pueden integrar las ecuaciones $v=ds/dt$ y $a=dv/dt$ para obtener la velocidad y la posición del vehículo como funciones del tiempo y después usarlas para determinar la posición del vehículo cuando su velocidad es igual a 6 m/s.

Solución

- Sea t=0 el tiempo en el que el vehículo se suelta, y sea s la posición del fondo de la plataforma que soporta al vehículo respecto a su posición en t=0 (siguiente figura). La aceleración del vehículo es $a=9.81\ m/s^2$.

La coordenada s mide la posición del fondo de la plataforma respecto a su posición inicial.

Relacionando la ecuación de la aceleración:

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = a = 9.81\ \mathrm{m/s^2}.}$$

Integrando, se obtiene

V= 9.81t+A, donde A es una constante de integración.

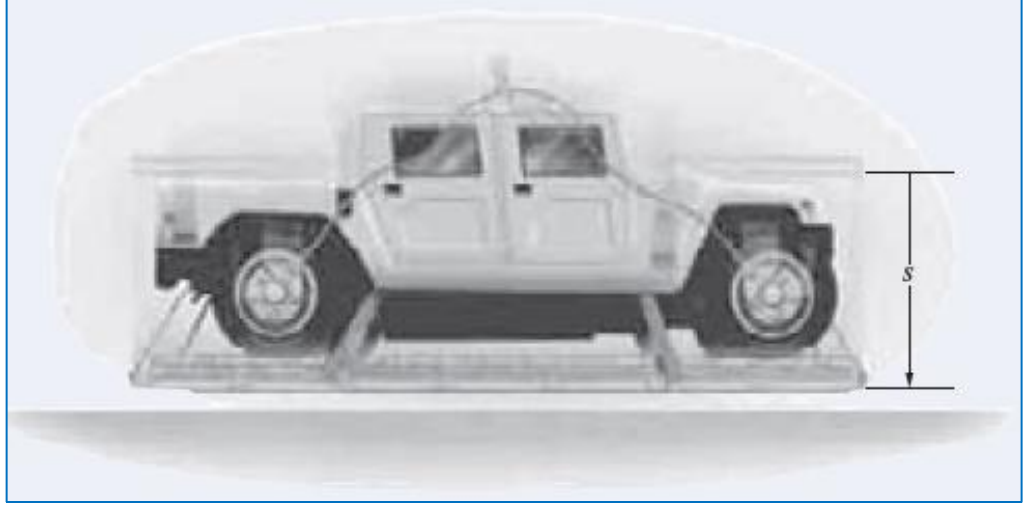
Como el vehículo se encuentra en reposo al soltarlo, v=0 cuando t=0. Por lo tanto, A=0, y la velocidad del vehículo en función del tiempo es v=9.81t (m/s)

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = v = 9.81t}$$

y se integra, de donde resulta

$s=4.91t^2+B$.

$s = 4.91t^2 + B$.



La posición s=0 cuando t=0, por lo que la constante de integración B=0, y la posición en función del tiempo es

$s = 4.91t^2$.

De la ecuación para la velocidad como una función del tiempo, el tiempo necesario para que el vehículo alcance 6 m/s es:

$$t = \frac{v}{9.81 \text{ m/s}^2} = \frac{6 \text{ m/s}}{9.81 \text{ m/s}^2} = 0.612 \text{ s.}$$

Sustituyendo este tiempo en la ecuación para la posición en función del tiempo, se obtiene la altura h requerida:

$$h = 4.91t^2 = 4.91(0.612)^2 = 1.83 \text{ m.}$$

Razonamiento crítico

- Observe que la altura h, desde la cual debe soltarse el vehículo, podría haberse determinado de una manera más simple usando la ecuación (***$v^2=v_0^2+2a_o(s-s_o)$***), que relaciona la velocidad con la posición.

$$v^2 = v_0^2 + 2a_0(s - s_0):$$

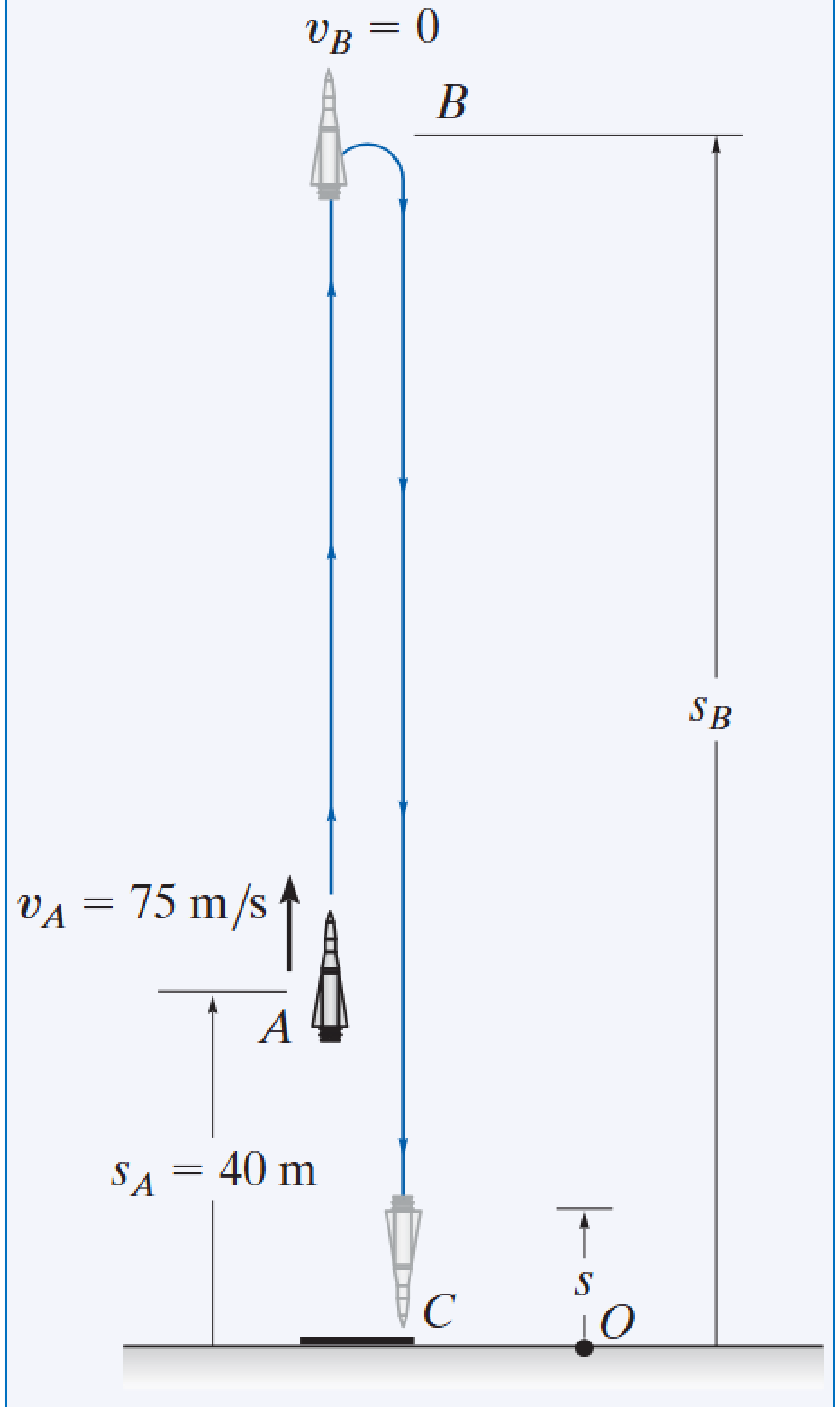
$$(6 \text{ m/s})^2 = 0 + 2(9.81 \text{ m/s}^2)(h - 0).$$

- Al resolver, se obtiene h=1.83m. Pero resulta esencial recordar que las ecuaciones ***$(v=v_0+a_0(t-t_0))$*** y (***$v^2=v_0^2+2a_o(s-s_o)$***) son aplicables solo cuando la aceleración es constante, como en este ejemplo.

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO FACULTAD DE INGENIERÍA

Ejercicio N°3

- Durante una prueba un cohete asciende a 75 m/s y cuando está a 40m del suelo su motor falla.
- Determine la altura máxima s_B alcanzada por el cohete y su velocidad justo antes de chocar con el suelo.
- Mientras está en movimiento, el cohete se ve sometido a una aceleración constante dirigida hacia abajo de 9.81 m/s^2 debido a la gravedad. Ignore la resistencia del aire.



SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. El origen O de la coordenada de posición s se considera al nivel de suelo con signo positivo hacia arriba.

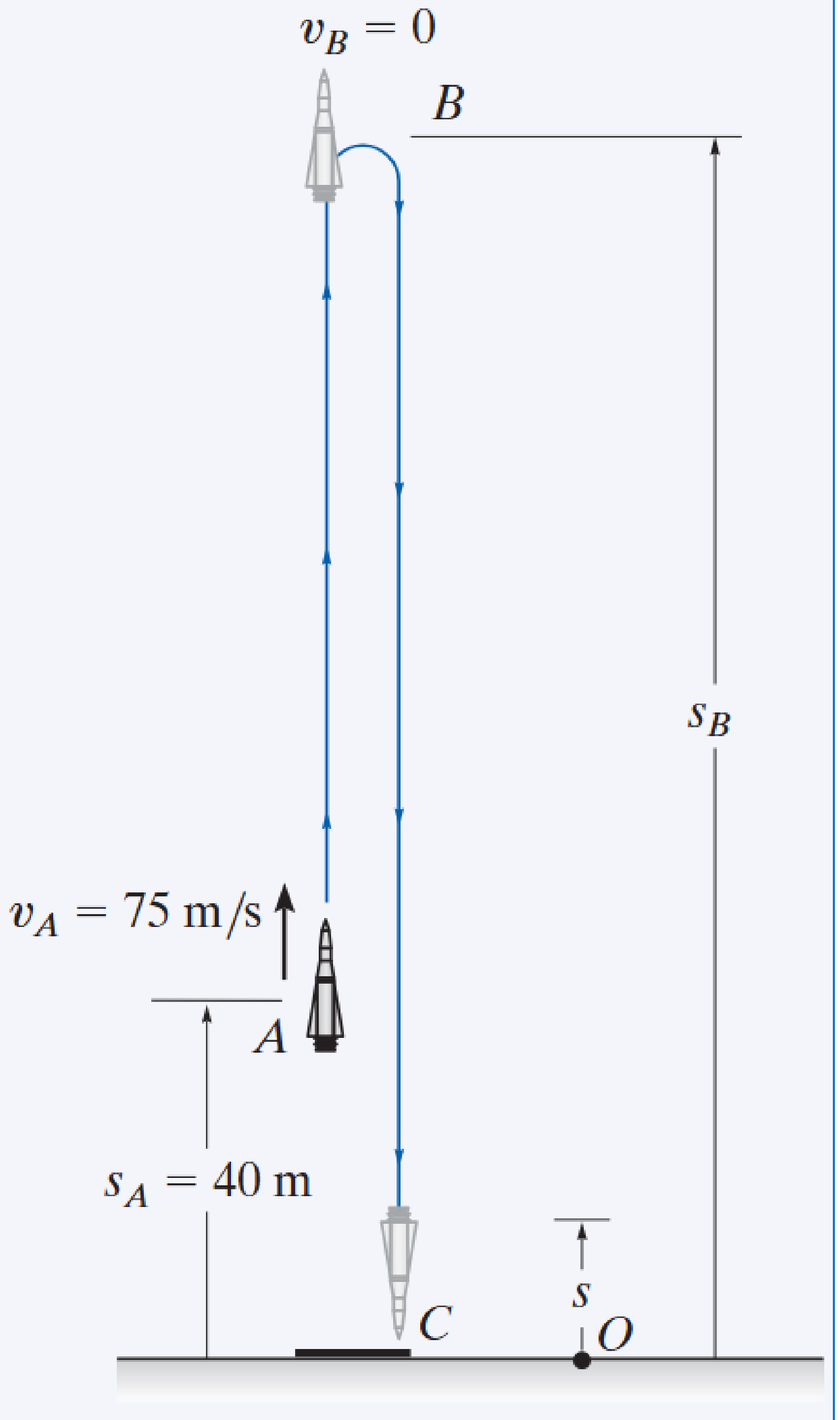
Altura máxima. Como el cohete asciende, v_A=75m/s cuando t=0.

A la altura máxima s=s_B la velocidad v_B=0.

Durante todo el movimiento, la aceleración es a_c=-9.81 m/s^2 (negativa puesto que actúa en el sentido opuesto a la velocidad positiva o desplazamiento positivo). Como a_c es constante, la posición del cohete se puede relacionar con su velocidad en los dos puntos A y B de la trayectoria mediante la ecuación, es decir,

$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$

Aceleración constante



$$(+\uparrow) \qquad v_B^2 = v_A^2 + 2a_c(s_B - s_A)$$

$$0 = (75 \text{ m/s})^2 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(s_B - 40 \text{ m})$$

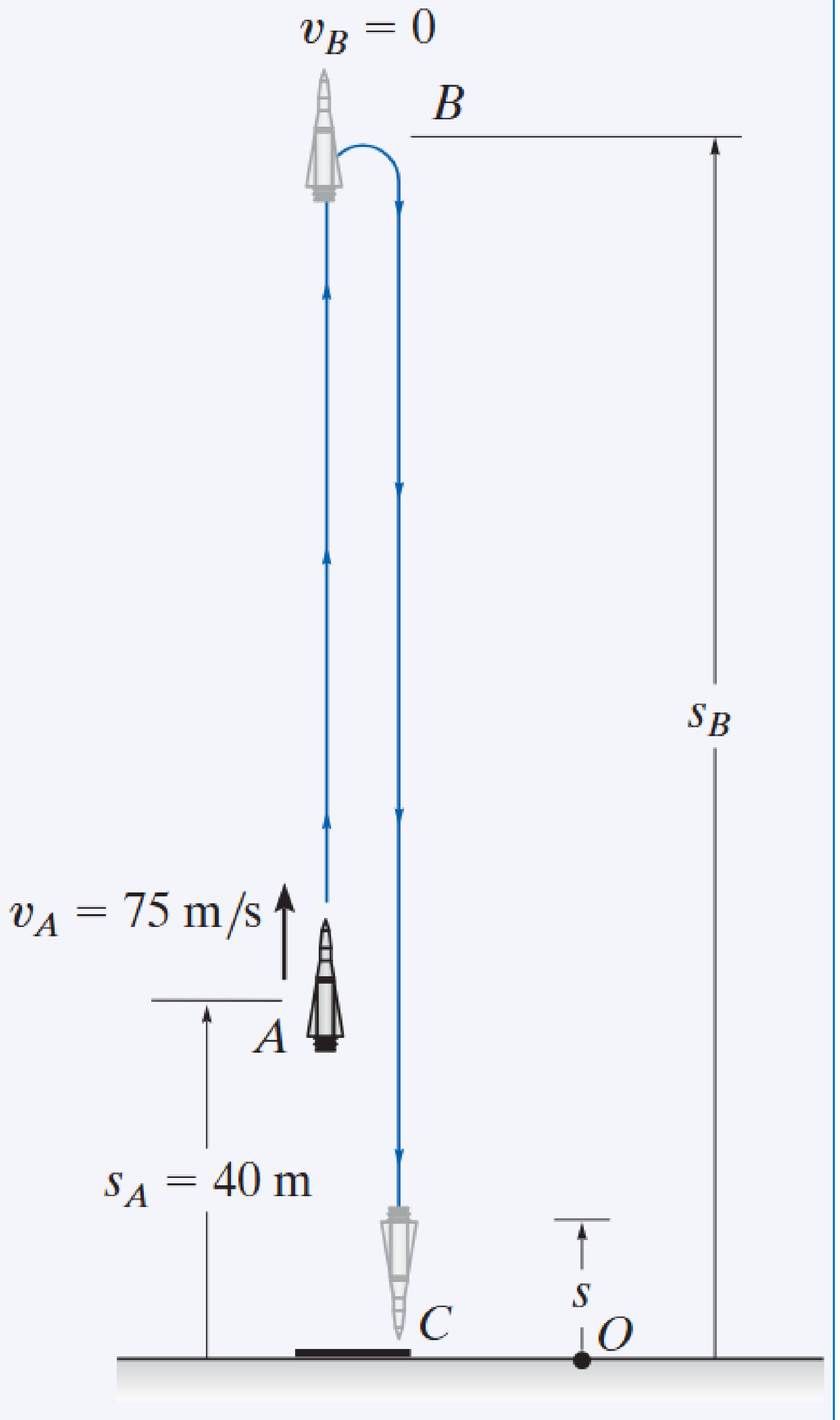
$$s_B = 327 \text{ m}$$

- **Velocidad.** Para obtener la velocidad del cohete justo antes de que choque con el suelo, podemos aplicar la ecuación anterior entre los puntos B y C.

$$(+\uparrow) \qquad v_C^2 = v_B^2 + 2a_c(s_C - s_B)$$

$$= 0 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(0 - 327 \text{ m})$$

$$v_C = -80.1 \text{ m/s} = 80.1 \text{ m/s} \downarrow$$



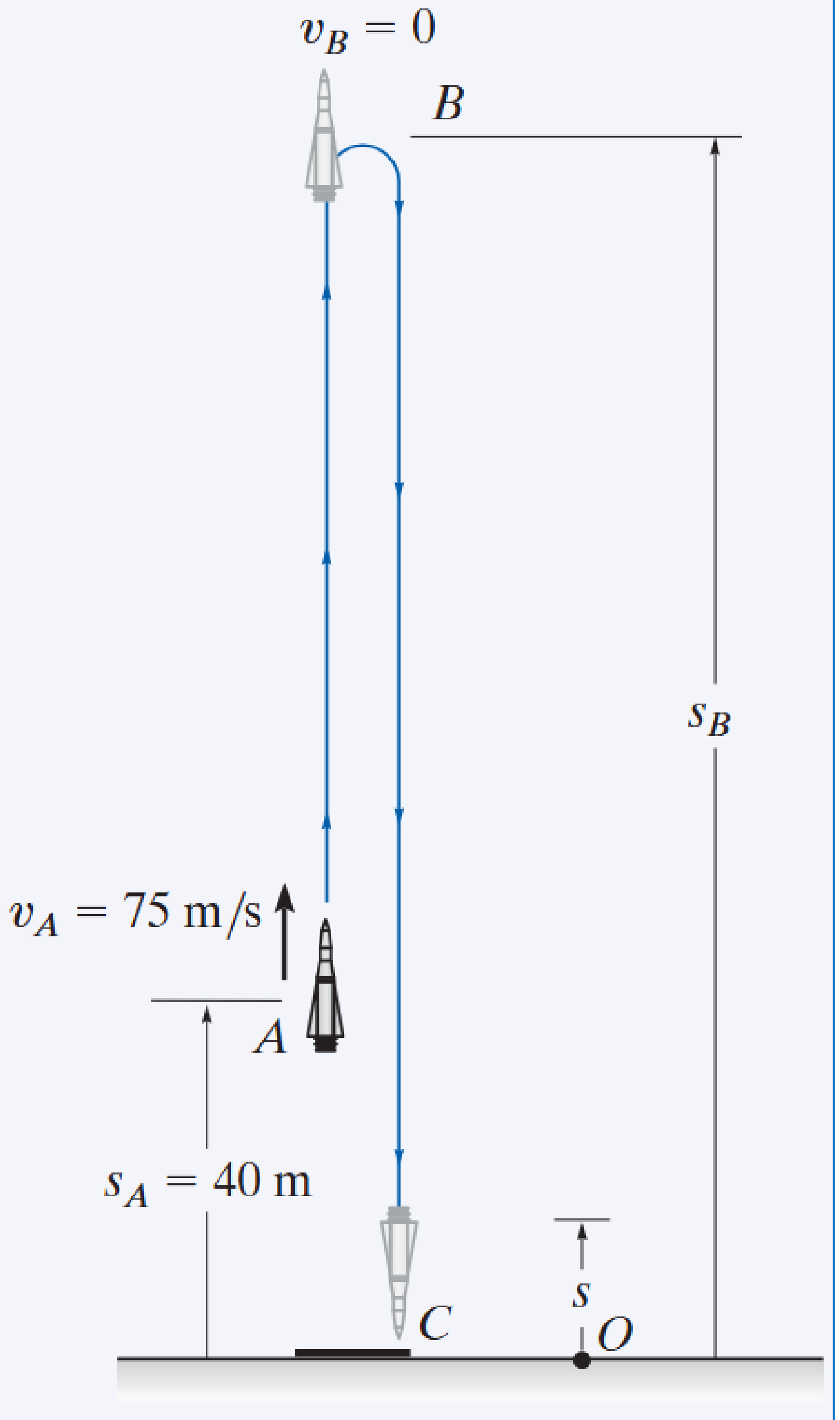
- Se eligió la raíz negativa puesto que el cohete está descendiendo. Del mismo modo, también se puede aplicar la ecuación anterior entre los puntos A y C, es decir:

$$(+\uparrow) \qquad v_C^2 = v_A^2 + 2a_c(s_C - s_A)$$

$$= (75\ \mathrm{m/s})^2 + 2(-9.81\ \mathrm{m/s^2})(0 - 40\ \mathrm{m})$$

$$v_C = -80.1\ \mathrm{m/s} = 80.1\ \mathrm{m/s} \downarrow$$

NOTA: observe que el cohete está sujeto a una desaceleración de A y B de 9.81 m/s^2 y luego de B a C se acelera a este ritmo. Además, aun cuando el cohete se detiene momentáneamente en B (v_B=0) ¡la aceleración en B sigue siendo de 9.81 m/s^2 dirigida hacia abajo!



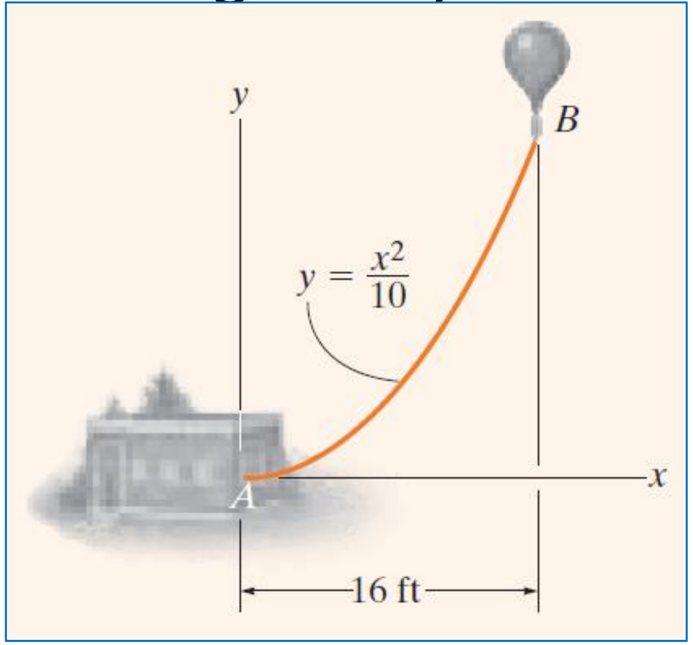
Ejercicio N°3

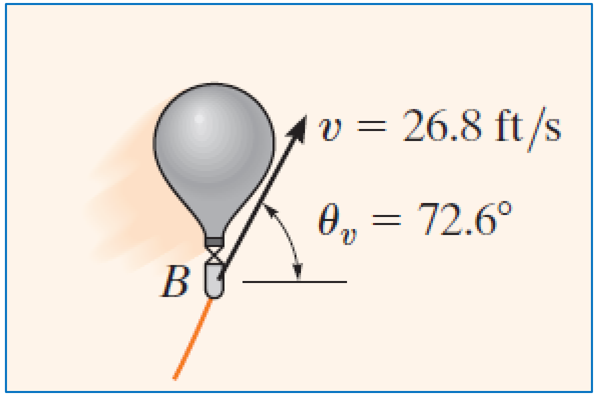
- La posición horizontal del globo, mostrado en la figura, está dada por x=8t, con t en segundos y x en pies. Si la ecuación de la trayectoria s $y=x^2/10$, determinar:

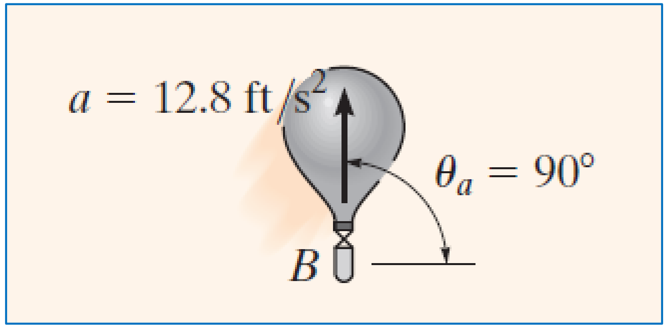
a) La distancia del globo a la estación ubicada en A cuando t=2s

b) La magnitud y dirección de la velocidad para t=2s

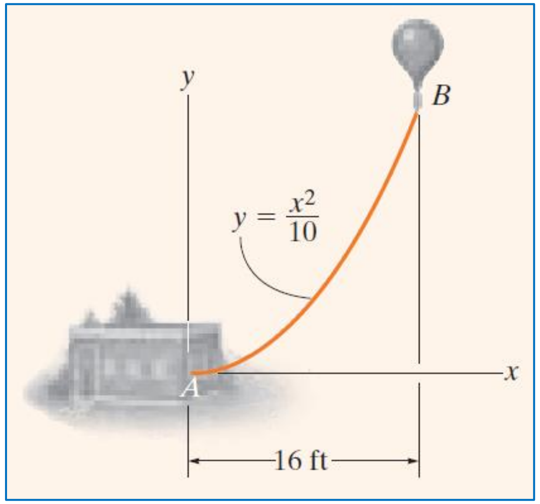
c) La magnitud y dirección de la aceleración para *t* **=** 2 s.







SOLUCIÓN

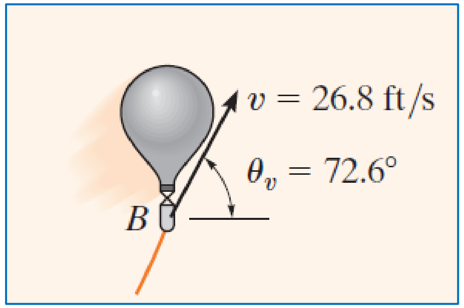


Velocidad. La componente de velocidad en la dirección *x* es:

$$v_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}(8t) = 8 \text{ ft/s} \rightarrow$$

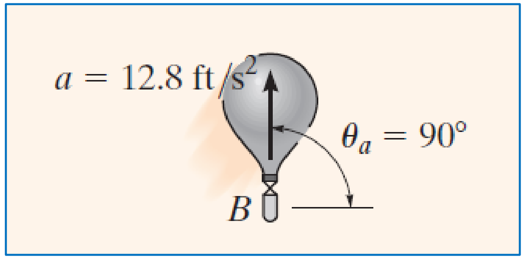
Para determinar la relación entre las componentes de velocidad utilizaremos la regla de la cadena del calculo.
Cuando $t = 2s$, $x = 8(2) = 16$ ft y, por lo tanto,

$$v_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}(x^2/10) = 2x\dot{x}/10 = 2(16)(8)/10 = 25.6 \text{ ft/s} \uparrow$$



Cuando $t = 2$ s, la magnitud de la velocidad es entonces

$$v = \sqrt{(8 \text{ ft/s})^2 + (25.6 \text{ ft/s})^2} = 26.8 \text{ ft/s}$$



La dirección es tangente a la trayectoria, donde

$$\theta_v = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\frac{25.6}{8} = 72.6°$$

• SOLUCIÓN

Aceleración. La relación entre las componentes de aceleración se determina con la regla de la cadena. Tenemos,

$$a_x = \dot{v}_x = \frac{d}{dt}(8) = 0$$

$$a_y = \dot{v}_y = \frac{d}{dt}(2x\dot{x}/10) = 2(\dot{x})\dot{x}/10 + 2x(\ddot{x})/10$$

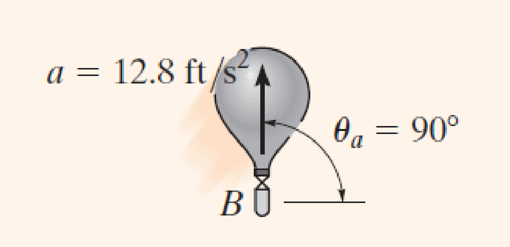
$$= 2(8)^2/10 + 2(16)(0)/10 = 12.8 \text{ ft/s}^2 \uparrow$$

Por lo tanto,

$$a = \sqrt{(0)^2 + (12.8)^2} = 12.8 \text{ ft/s}^2$$

La dirección de a, como se muestra en la figura, es

$$\theta_a = \tan^{-1}\frac{12.8}{0} = 90°$$



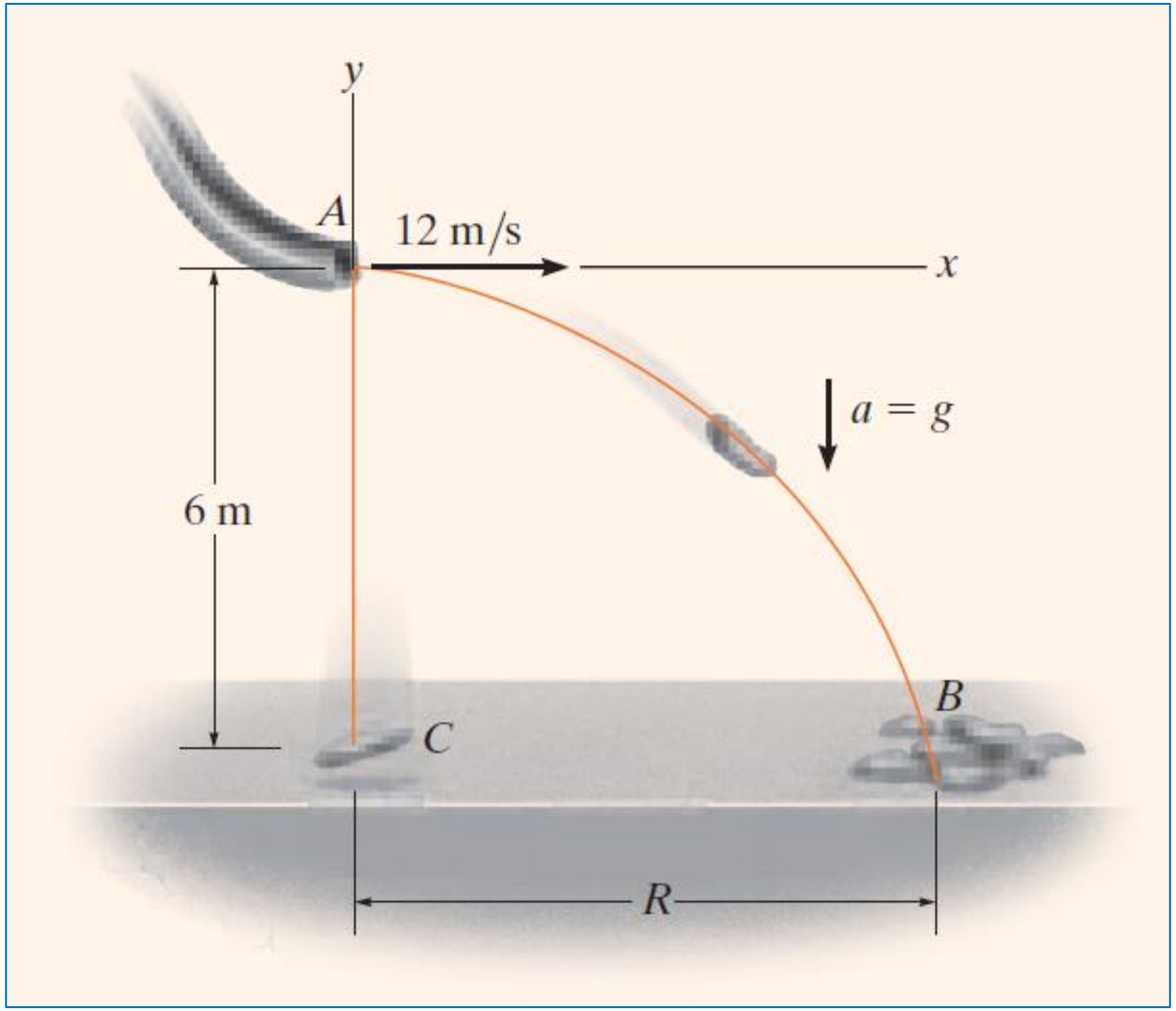
NOTA: También es posible obtener v_y y a_y si se expresa primero $y = f(t) = (8t)^2/10 = 6.4t^2$ y luego se toman sucesivamente las derivadas con respecto al tiempo.

Ejercicio N°4

Un cuerpo resbala por la rampa, con velocidad de 12 m/s.

Si la altura de la rampa con respecto al piso es de 6 m.

Calcule el tiempo necesario para que el cuerpo llegue al suelo y la distancia R donde los cuerpos empiezan a apilarse



• ***SOLUCIÓN***

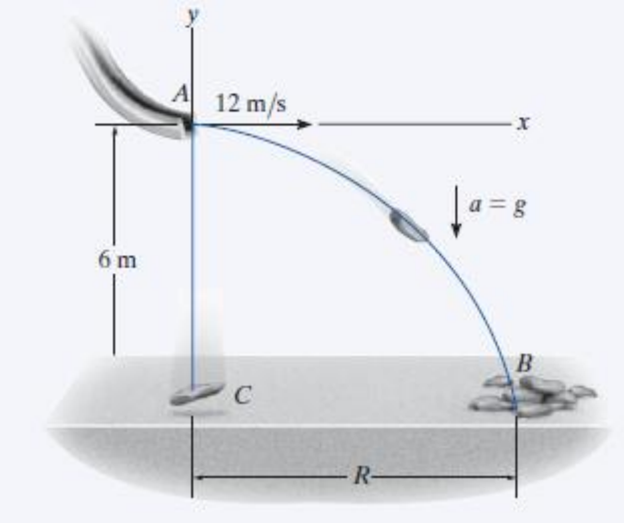
Sistema de coordenadas. El origen de las coordenadas se establece al principio de la trayectoria, punto *A*. La velocidad inicial de un saco tiene las componentes $(v_A)_x$ = 12 m/s y $(v_A)_y$=0. Asimismo, entre los puntos *A* y *B* la aceleración es de a_y= −9.81 m/s². En vista de que $(v_B)_x=(v_A)_x$=12 m/s, las tres incógnitas son $(v_B)_y$, *R* y el tiempo de vuelo t_{AB}. En este caso, no necesitamos determinar $(v_B)_y$.

Movimiento vertical. Se conoce la distancia vertical de *A* a *B* y, por consiguiente, podemos obtener una solución directa para t_{AB} con la ecuación

$$(+\uparrow) \qquad y_B = y_A + (v_A)_y t_{AB} + \tfrac{1}{2} a_c t_{AB}^2$$

$$-6\text{ m} = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(-9.81\text{ m/s}^2) t_{AB}^2$$

$$t_{AB} = 1.11\text{ s}$$



Movimiento horizontal. Con t_{AB} calculado, R se determina como sigue:

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad x_B = x_A + (v_A)_x t_{AB}$$

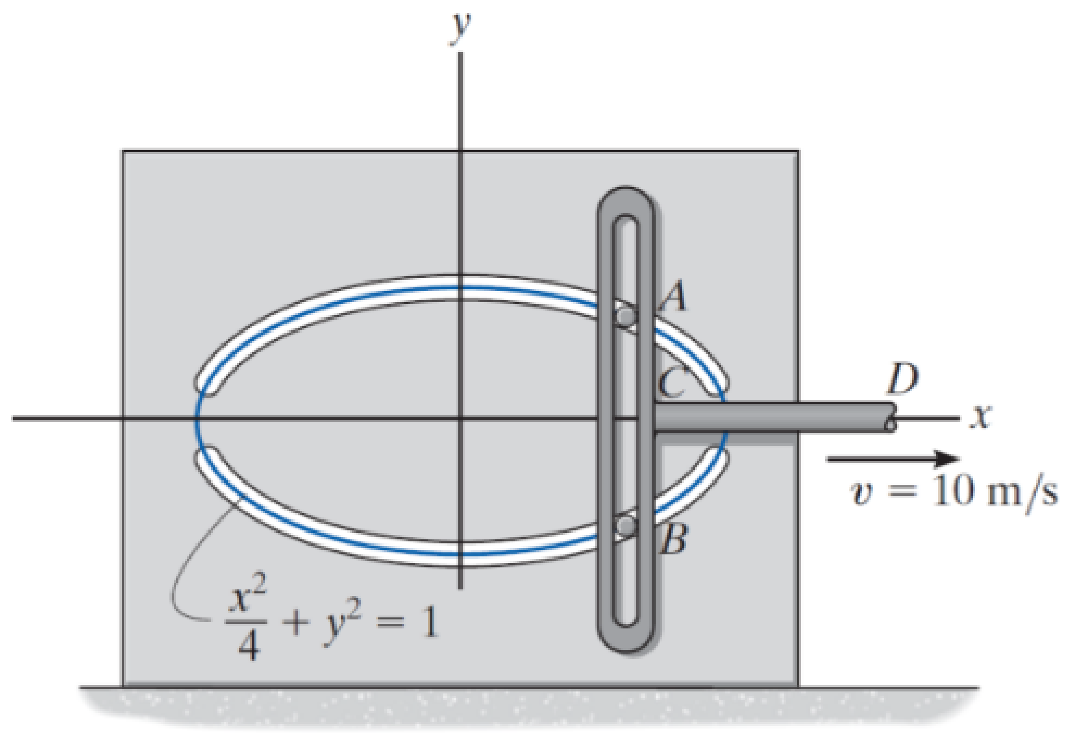
$$R = 0 + 12\text{ m/s}\,(1.11\text{ s})$$

$$R = 13.3\text{ m}$$

NOTA: El calculo de t_{AB} también indica que, si se soltara un saco *desde el reposo* en *A*, le llevaría el mismo tiempo chocar contra el suelo en *C*.

PROBLEMA 1: Cinemática de la Partícula

Las espigas **A** y **B** están restringidas a moverse en las ranuras elípticas por el movimiento del eslabón ranurado. Dicho eslabón se mueve a una velocidad constante de **10 m/s.**



Determinar la magnitud de la **velocidad** de la **espiga A** cuando **x =1 m**

Escriba el valor en el campo inferior, y seleccione la unidad adecuada.

Elegir...
pie/min
rpm
lbf/min
m/s^2
m/s
cm
N
MPa
lbf/pulg^2

Elegir...

Determinar la magnitud de la **aceleración** de la **espiga A** cuando **x =1 m**

Escriba el valor en el campo inferior, y seleccione la unidad adecuada.

Elegir...
pie/s^2
rpm
lbf/min
m/s^2
m/s
cm
N
MPa
lbf/pulg^2

Elegir...

PROBLEMA 2: Cinemática de la Partícula

Una partícula que se desplaza a lo largo de una línea recta se somete a una desaceleración $a = (-2v^3)$ m/s^2, donde **v** está en **m/s**.

Si la velocidad de la partícula es **v = 8 m/s** y su posición es **s=10 m** cuando **t= 0**, determine su **velocidad** cuando **t =4 s**

Escriba el valor en el campo inferior, y seleccione la unidad adecuada.

Respuesta: Elegir...

Comprobar

Si la velocidad de la partícula es **v = 8 m/s** y su posición es **s=10 m** cuando **t= 0**, determine su **posición** cuando **t =4 s**

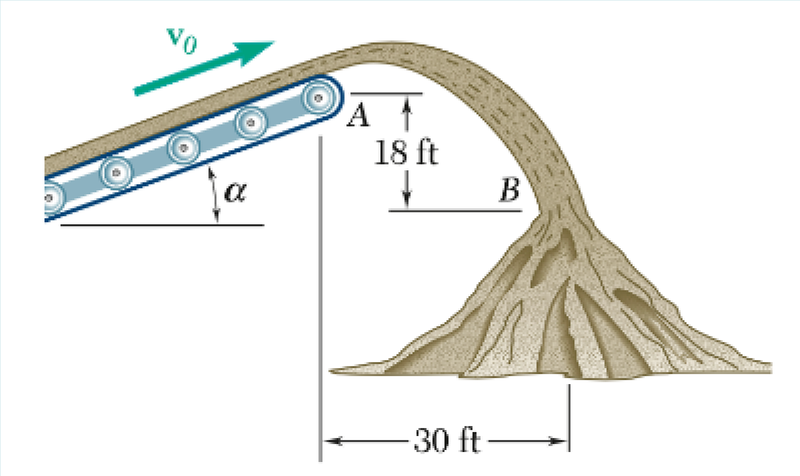
Escriba el valor en el campo inferior, y seleccione la unidad adecuada.

Elegir...
pie/min
rpm
lbf/min
m/s^2
m/s
cm
N
MPa
lbf/pulg^2
Elegir...

Elegir...
pie
rpm
lbf/min
m/s^2
m/s
cm
N
MPa
lbf/pulg^2
Elegir...

PROBLEMA 7: Cinemática de la Partícula

Mediante una banda transportadora se descarga arena en **A** y cae en la parte superior de un montículo en **B**. se conoce que la banda transportadora forma un ángulo **20°** con la horizontal. Determine la velocidad **v0** de la banda.



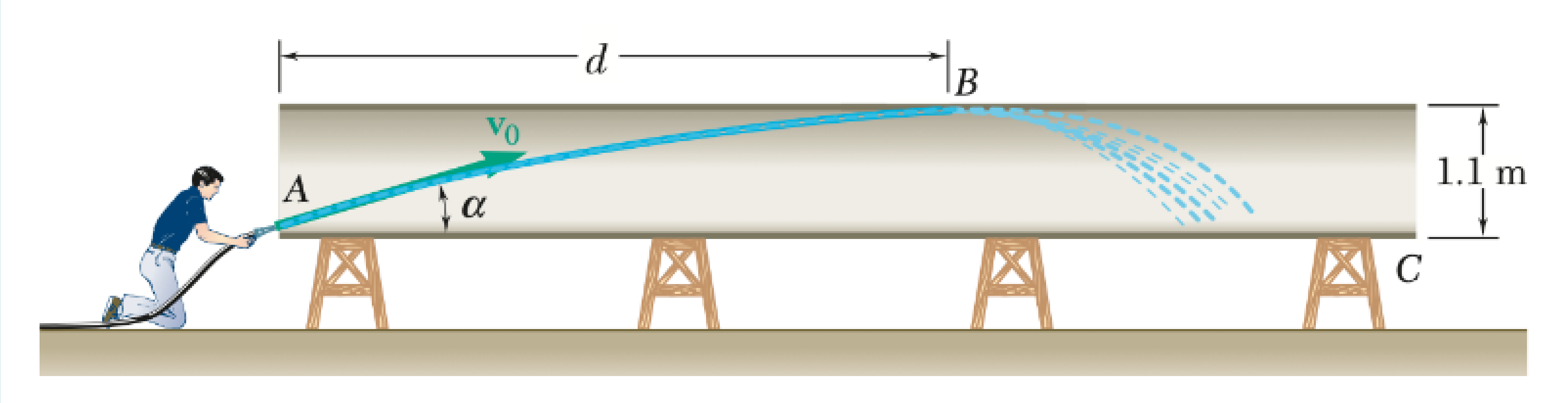
Determinar la velocdad $\boldsymbol{v_0}$ de la banda.

Escriba el valor en el campo inferior, y seleccione la unidad adecuada.

Elegir...
pie/min
rpm
lbf/min
m/s^2
m/s
cm
N
MPa
lbf/pulg^2

PROBLEMA 8: Cinemática de la Partícula

Un trabajador utiliza agua a alta presión para limpiar el interior de un largo tubo de desagüe. Si el agua se descarga con una velocidad inicial **v_0** de **11.5 m/s.**



pulg
rpm
lbf/min
m/s^2
m/s
pie/min
N
MPa
lbf/pulg^2

Calcular la distancia **d** hasta el punto **B** más lejano sobre la parte superior de la tubería que el agua puede limpiar desde la posición del trabajador en **A.**

Escriba el valor en el campo inferior, y seleccione la unidad adecuada.

grados
rpm
lbf/min
m/s^2
m/s
pie/min
N
MPa
lbf/pulg^2

Calcular el ángulo **α** correspondiente.

Escriba el valor en el campo inferior, y seleccione la unidad adecuada.

Elegir...