FACULTAD DE INGENIERÍA

Movimiento Relativo
Componentes normal y tangencial
Componentes radial y transversal

MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ing. Carlos Barrera

- CINEMÁTICA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS
  - DESPLAZAMIENTO Y POSICIÓN
    - TRES DESPLAZAMIENTOS BÁSICOS
      - TRANSLACIÓN
      - ROTACIÓN ALREDEDOR DE UNA RECTA FIJA
      - ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN PUNTO FIJO
    - CINCO TIPOS DE MOVIMIENTO DE CUERPO RÍGIDO
      - TRANSLACIÓN
      - ROTACIÓN ALREDEDOR DE UNA RECTA FIJA
      - MOVIMIENTO PLANO
      - ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN PUNTO FIJO
      - MOVIMIENTO GENERAL
    - POSICIÓN
      - CUERPO RÍGIDO CON UN PUNTO FIJO (ÁNGULOS DE EULER)
      - CUERPO RÍGIDO LIBRE EN EL ESPACIO
  - MOVIMIENTO ABSOLUTO-CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO DEL CUERPO RÍGIDO.
    - TRANSLACIÓN.
    - ROTACIÓN ALREDEDOR DE UNA RECTA FIJA
    - MOVIMIENTTO PLANO
    - ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN PUNTO FIJO
    - MOVIMIENTO GENERAL
  - MOVIMIENTO RELATIVO
    - MOVIMIENTO RELATIVO DE CUERPOS RÍGIDOS. MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO CON RESPECTO A UN SISTEMA COORDENADO MÓVIL (CON TRANSLACIÓN Y ROTACIÓN)

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprenderá a analizar la velocidad de cuerpos en *movimiento plano general*. Se observó que un movimiento plano general siempre puede considerarse como la suma de los dos movimientos estudiados en esta lección, a saber, *una traslación y una rotación.*

Para resolver un problema en el que interviene la velocidad de un cuerpo en movimiento plano deben seguirse los siguientes pasos.

1. Determinar siempre que sea posible la velocidad de los puntos del cuerpo donde éste se encuentre conectado a otro cuerpo cuyo movimiento se conozca. Ese otro cuerpo tal vez sea un brazo o una manivela que gira con una velocidad angular determinada.

2. A continuación, dibujar una "ecuación de diagrama" que se utilizará en la solución con los siguientes diagramas.

> ***a*) *Diagrama de movimiento plano:*** Dibuje un diagrama del cuerpo que incluya todas las dimensiones y que muestre aquellos puntos para los que se conozca o se busque la velocidad.
>
> ***b*) *Diagrama de traslación:*** Elija un punto de referencia *A* para el cual conozca la dirección y/o la magnitud de la velocidad $\mathbf{v}A$, y dibuje un segundo diagrama que muestre el cuerpo en traslación con todos sus puntos con la misma velocidad $\mathbf{v}A$.
>
> ***c*) *Diagrama de rotación:*** Considere el punto *A* como un punto fijo y dibuje un diagrama que muestre al cuerpo en rotación alrededor de *A*. Indique la velocidad angular **k** del cuerpo y las velocidades relativas con respecto a *A* de los otros puntos, como la velocidad $\mathbf{v}B/A$ de *B* relativa a *A*.

3. Escribir la fórmula de velocidad relativa

$\mathbf{v}B = \mathbf{v}A + \mathbf{v}B/A$

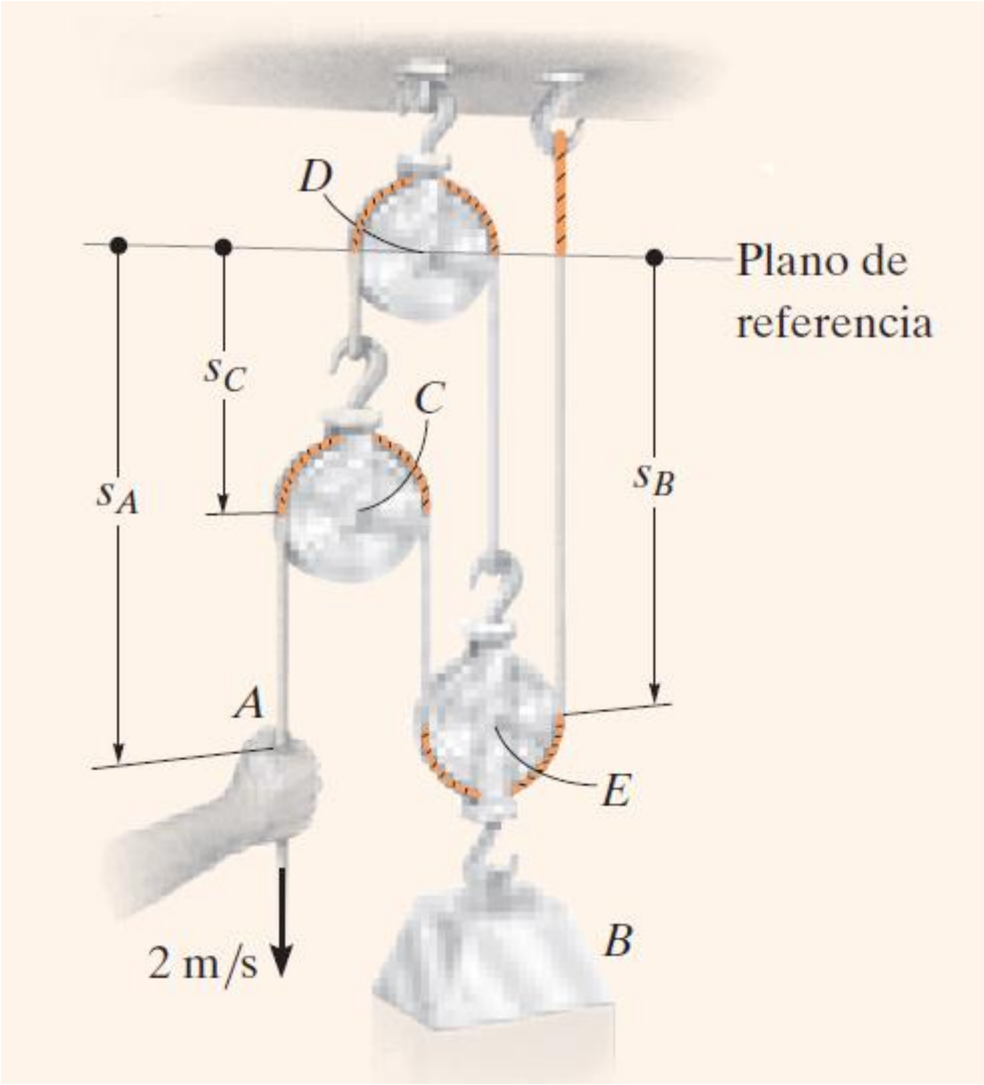
Aunque es factible resolver esta ecuación vectorial en forma analítica al escribir las ecuaciones escalares correspondientes, usualmente usted encontrará más sencillo resolverla utilizando un triángulo de vectores

4. Es posible utilizar un punto de referencia diferente para obtener una solución equivalente. Por ejemplo, si se elige el punto *B* como el punto de referencia, la velocidad del punto *A* se expresa como

$\mathbf{v}A = \mathbf{v}B + \mathbf{v}A/B$

Advierta que las velocidades relativas $\mathbf{v}BA$ y $\mathbf{v}AB$ tienen la misma magnitud, pero sentido opuesto. Por lo tanto, las velocidades relativas dependen del punto de referencia que se ha seleccionado. Sin embargo, la velocidad angular es independiente de la elección del punto de referencia.

Ejercicio Nº 1) Calcular la velocidad con que se eleva el Bloque B, si el extremo de la cuerda en A es tirado hacia abajo con velocidad de 2 m/s.



SOLUCIÓN

Ecuación de coordenadas de posición. La coordenada s_A define la posición del punto A y s_B especifica la posición del bloque B, pues el punto E en la polea tendrá el *mismo movimiento* que el bloque. Ambas coordenadas se miden con respecto a un plano de referencia horizontal que pasa por el pasador *fijo* en la polea D. Como el sistema se compone de *dos* cuerdas, las coordenadas s_A y s_B no se pueden relacionar de forma directa. En cambio, si se establece una tercera coordenada de posición, s_C, ahora podemos expresar la longitud de una de las cuerdas en función de s_B y s_C y la longitud de la otra en función de s_A, s_B y s_C.

Si se excluyen los segmentos de color naranja de las cuerdas, las longitudes de cuerda constantes restantes $l1$ y $l2$ (junto con las dimensiones del gancho y el eslabón) se expresan como

$$s_C + s_B = l_1$$
$$(s_A - s_C) + (s_B - s_C) + s_B = l_2$$

- Derivada con respecto al tiempo. La derivada con respecto al tiempo de cada ecuación resulta

$$v_C + v_B = 0$$
$$v_A - 2v_C + 2v_B = 0$$

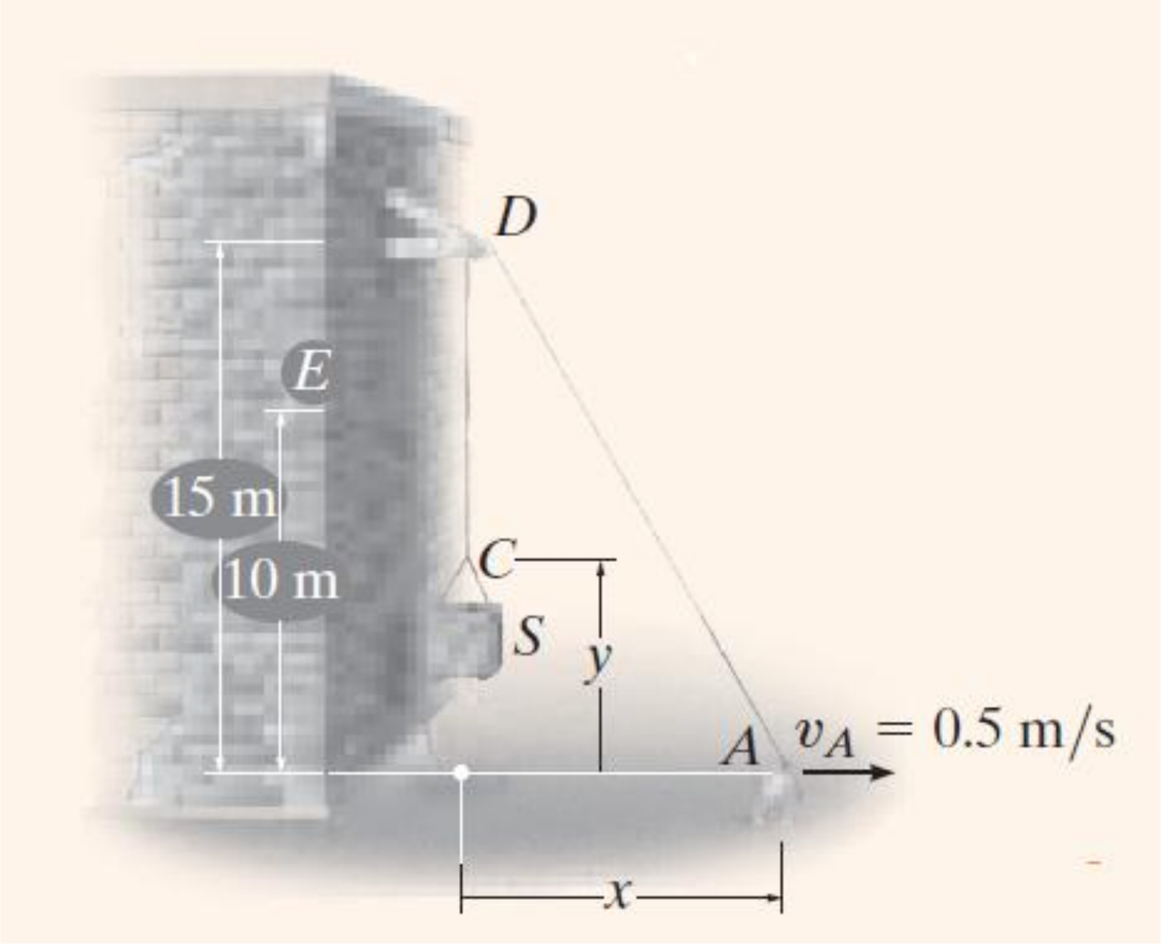
- Al eliminar v_C, obtenemos

$$v_A + 4v_B = 0$$

- de modo que cuando v_A = 2 m/s (hacia abajo),

$$v_B = -0.5 \text{ m/s} = 0.5 \text{ m/s} \uparrow$$

Ejercicio Nº 2) Un hombre ubicado en A está levantando una caja S, caminando hacia la derecha con velocidad constante de 0,5 m/s. Calcular la velocidad y la aceleración de la caja cuando alcanza la elevación en E. La cuerda tiene 30 m de longitud y pasa sobre una pequeña polea en D.



SOLUCIÓN

Ecuación de coordenadas de posición. Este problema difiere de los ejemplos anteriores, ya que el segmento de cuerda *DA* cambia *tanto de dirección como de magnitud*. Sin embargo, los extremos de la cuerda, que definen las posiciones de *C* y *A*, se especifican por medio de las coordenadas *x* y *y*, ya que se miden con respecto a un punto fijo y están *dirigidas a lo largo de las trayectorias del movimiento* de los extremos de la cuerda.

Las coordenadas *x* y *y* pueden relacionarse, pues la cuerda tiene una longitud fija l = 30 m, la cual en todo momento es igual a la longitud del segmento *DA* mas *CD*. Usando el teorema de Pitágoras para determinar l_{DA}, tenemos

$l_{DA} = \sqrt{(15)^2 + x^2};$

también, $l_{CD} = 15 - y$.

Por consiguiente,

$$
\begin{aligned}
l &= l_{DA} + l_{CD} \\
30 &= \sqrt{(15)^2 + x^2} + (15 - y) \\
y &= \sqrt{225 + x^2} - 15
\end{aligned}
$$

Derivadas con respecto al tiempo. Con la derivada con respecto al tiempo y la regla de la cadena, donde $v_S = dy/dt$ y $v_A = dx/dt$, se obtiene

$$v_S = \frac{dy}{dt} = \left[\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{225 + x^2}}\right]\frac{dx}{dt}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{225 + x^2}}v_A$$

Cuando y = 10 m, x se determina con la ecuación 1, es decir, x = 20 m.

Por consiguiente, a partir de la ecuación 2 con v_A = 0.5 m/s,

$$v_S = \frac{20}{\sqrt{225 + (20)^2}}(0.5) = 0.4\ \text{m/s} = 400\,\text{mm/s}\uparrow$$

La aceleración se determina al tomar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 2. Como v_A es constante, entonces $a_A = dv_A/dt = 0$, y tenemos

$$a_S = \frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{-x(dx/dt)}{(225 + x^2)^{3/2}}\right]xv_A + \left[\frac{1}{\sqrt{225 + x^2}}\right]\left(\frac{dx}{dt}\right)v_A + \left[\frac{1}{\sqrt{225 + x^2}}\right]x\frac{dv_A}{dt} = \frac{225v_A^2}{(225 + x^2)^{3/2}}$$

Cuando x = 20, con v_A = 0.5 m/s, la aceleración es

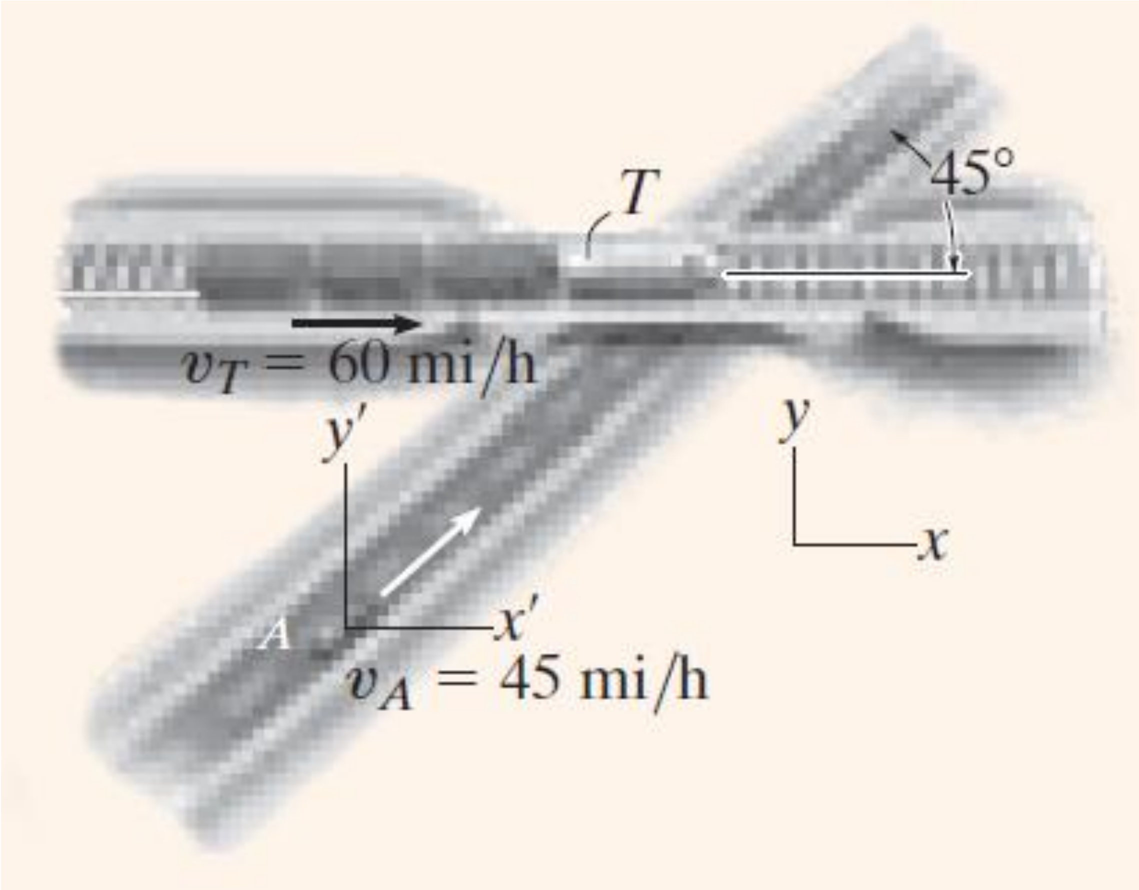
$$a_S = \frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{-x(dx/dt)}{(225 + x^2)^{3/2}}\right]xv_A + \left[\frac{1}{\sqrt{225 + x^2}}\right]\left(\frac{dx}{dt}\right)v_A + \left[\frac{1}{\sqrt{225 + x^2}}\right]x\frac{dv_A}{dt} = \frac{225v_A^2}{(225 + x^2)^{3/2}}$$

Cuando $x = 20$, con $v_A = 0.5$ m/s, la aceleración es

$$a_S = \frac{225(0.5\text{ m/s})^2}{[225 + (20\text{ m})^2]^{3/2}} = 0.00360\text{ m/s}^2 = 3.60\text{ mm/s}^2 \uparrow$$

NOTA: La velocidad constante en A hace que el otro extremo C de la cuerda se acelere, ya que v_A cambia la dirección del segmento DA y también su longitud.

Ejercicio Nº 3) Un tren, viajando con velocidad constante de 60 mi/h, cruza sobre un camino.
Si el auto A viaja a 45 mi/h a lo largo del camino, calcular la magnitud y la dirección de la velocidad relativa del tren con respecto al auto.



SOLUCIÓN I

Análisis vectorial. La velocidad relativa $\mathbf{v}_{T/A}$ se mide con respecto a los ejes en traslación *x´*, *y´* fijos en el automóvil. Esta se determina a partir de la ecuación $\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$. Como se conocen *tanto* la magnitud *como* la dirección de $\mathbf{v}_T$ y $\mathbf{v}_A$, las incógnitas son las componentes *x* y *y* de $\mathbf{v}T/A$. Si utilizamos los ejes *x*, *y* en la figura. tenemos

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$$

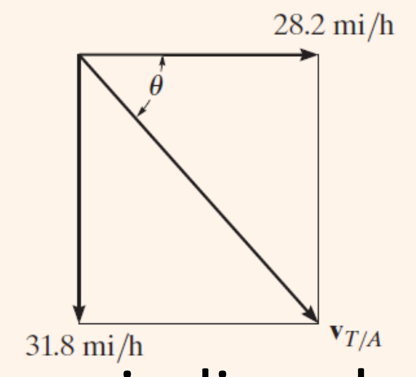
$$60\mathbf{i} = (45 \cos 45°\mathbf{i} + 45 \text{ sen } 45°\mathbf{j}) + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$\mathbf{v}_{T/A} = \{28.2\mathbf{i} - 31.8\mathbf{j}\} \text{ mi/h}$$

A partir de la dirección de cada componente siguiente figura, la dirección de $v_{T/A}$ es

$$\tan\theta = \frac{(v_{T/A})_y}{(v_{T/A})_x} = \frac{31.8}{28.2}$$

$$\theta = 48.5° \measuredangle$$



Observe que la suma vectorial mostrada en la figura indica el sentido correcto de $v_{T/A}$. Esta figura anticipa la respuesta y puede utilizarse para comprobarla.

SOLUCIÓN II

Análisis escalar. Las componentes desconocidas de $\mathbf{v}_{T/A}$ también pueden determinarse con un análisis escalar. Supondremos que estas componentes actúan en las direcciones *x* y *y* positivas. Por consiguiente,

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$\begin{bmatrix} 60 \text{ mi/h} \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \text{ mi/h} \\ \measuredangle^{45^\circ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_{T/A})_x \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_{T/A})_y \\ \uparrow \end{bmatrix}$$

Si descomponemos cada vector en sus componentes x y y,

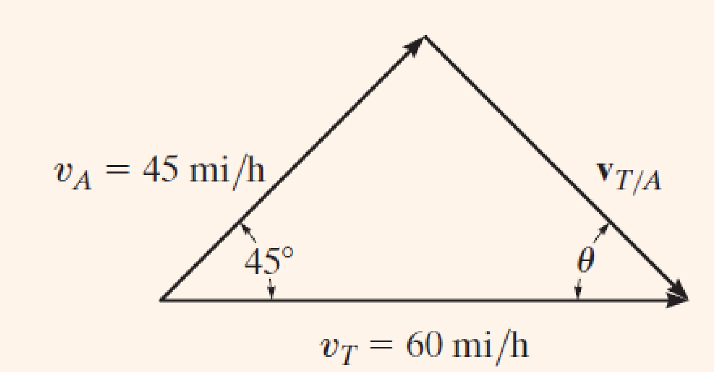
$$(\xrightarrow{+}) \qquad 60 = 45 \cos 45^\circ + (v_{T/A})_x + 0$$

$$(+\uparrow) \qquad 0 = 45 \operatorname{sen} 45^\circ + 0 + (v_{T/A})_y$$

Al resolver, obtenemos los resultados previos,

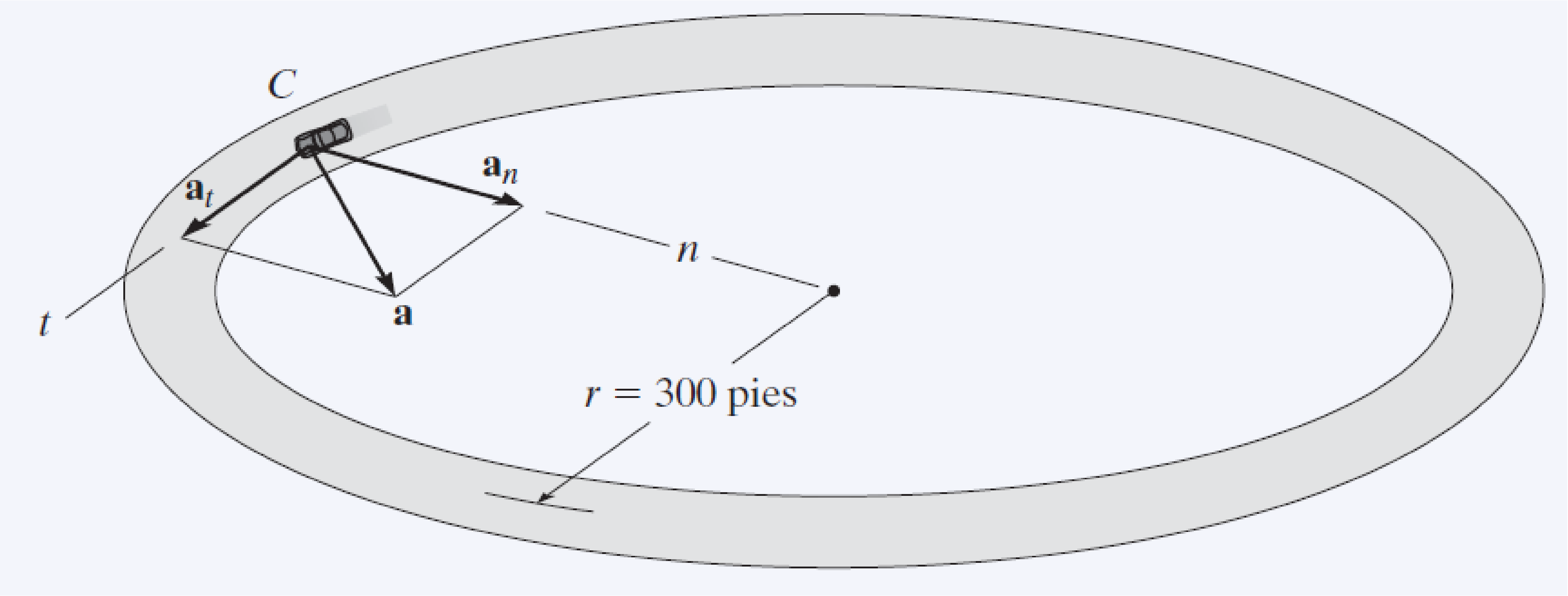
$$(v_{T/A})_x = 28.2 \text{ mi/h} = 28.2 \text{ mi/h} \rightarrow$$

$$(v_{T/A})_y = -31.8 \text{ mi/h} = 31.8 \text{ mi/h} \downarrow$$



Ejercicio N° 4

Un auto de competición C viaja alrededor de la pista circular que tiene un radio de 300 pies. Si el auto aumenta su rapidez a la razón constante de 7pies/seg², partiendo del reposo, calcular el tiempo necesario para que alcance una aceleración de 8pies/seg2. ¿Cuál es su rapidez en este instante?



SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. El origen de los ejes *n* y *t* coincide con el auto en el instante considerado. El eje *t* está en la dirección del movimiento y el eje *n* positivo está dirigido hacia el centro del círculo.

Se selecciona este sistema de coordenadas puesto que se conoce la trayectoria.

Aceleración. La magnitud de la aceleración puede relacionarse con sus componentes por medio de $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

En este caso a_t 7 pies/s^2. Como a_n v^2/p, primero debe determinarse la velocidad como una función del tiempo.

$$v = v_0 + (a_t)_c t$$
$$v = 0 + 7t$$

Por tanto

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(7t)^2}{300} = 0.163t^2 \text{ pies/s}^2$$

El tiempo requerido para que la aceleración llegue a ser de 8 pies>s^2 es, por consiguiente

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$
$$8 \text{ pies/s}^2 = \sqrt{(7 \text{ pies/s}^2)^2 + (0.163t^2)^2}$$

Al resolver para el valor positivo de *t* se obtiene

$$0.163t^2 = \sqrt{(8 \text{ pies/s}^2)^2 - (7 \text{ pies/s}^2)^2}$$
$$t = 4.87 \text{ s}$$

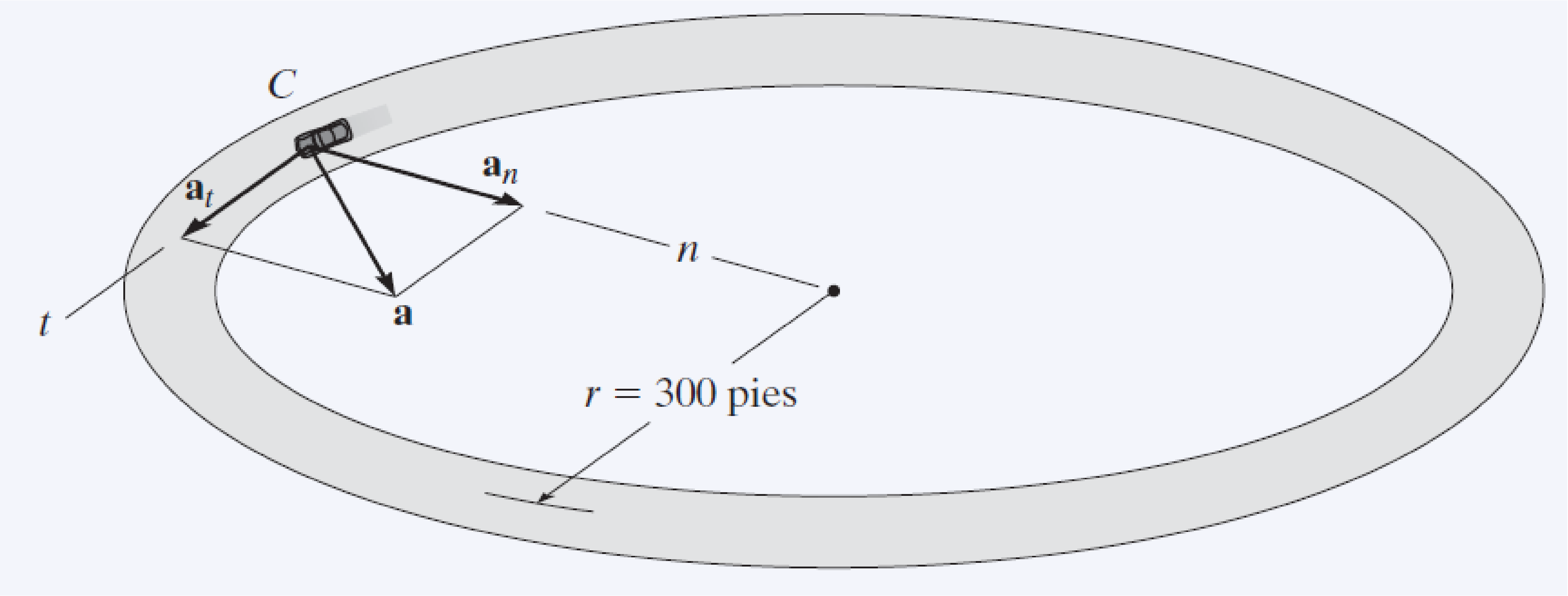
Velocidad. La rapidez en el instante *t* 4.87 s es

$$v = 7t = 7(4.87) = 34.1 \text{ pies/s}$$

NOTA: recuerde que la velocidad siempre será tangente a la trayectoria, en tanto que la aceleración estará dirigida hacia dentro de la curvatura de la trayectoria.

Ejercicio N° 4

Un auto de competición C viaja alrededor de la pista circular que tiene un radio de 300 pies. Si el auto aumenta su rapidez a la razón constante de 7pies/seg², partiendo del reposo, calcular el tiempo necesario para que alcance una aceleración de 8pies/seg2. ¿Cuál es su rapidez en este instante?



SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. El origen de los ejes *n* y *t* coincide con el auto en el instante considerado. El eje *t* está en la dirección del movimiento y el eje *n* positivo está dirigido hacia el centro del círculo.

Se selecciona este sistema de coordenadas puesto que se conoce la trayectoria.

Aceleración. La magnitud de la aceleración puede relacionarse con sus componentes por medio de $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

En este caso a_t 7 pies/s². Como a_n v²/p, primero debe determinarse la velocidad como una función del tiempo.

$$v = v_0 + (a_t)_c t$$
$$v = 0 + 7t$$

Por tanto

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(7t)^2}{300} = 0.163t^2 \text{ pies/s}^2$$

El tiempo requerido para que la aceleración llegue a ser de 8 pies>s² es, por consiguiente

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$
$$8 \text{ pies/s}^2 = \sqrt{(7 \text{ pies/s}^2)^2 + (0.163t^2)^2}$$

Al resolver para el valor positivo de *t* se obtiene

$$0.163t^2 = \sqrt{(8 \text{ pies/s}^2)^2 - (7 \text{ pies/s}^2)^2}$$
$$t = 4.87 \text{ s}$$

Velocidad. La rapidez en el instante *t* 4.87 s es

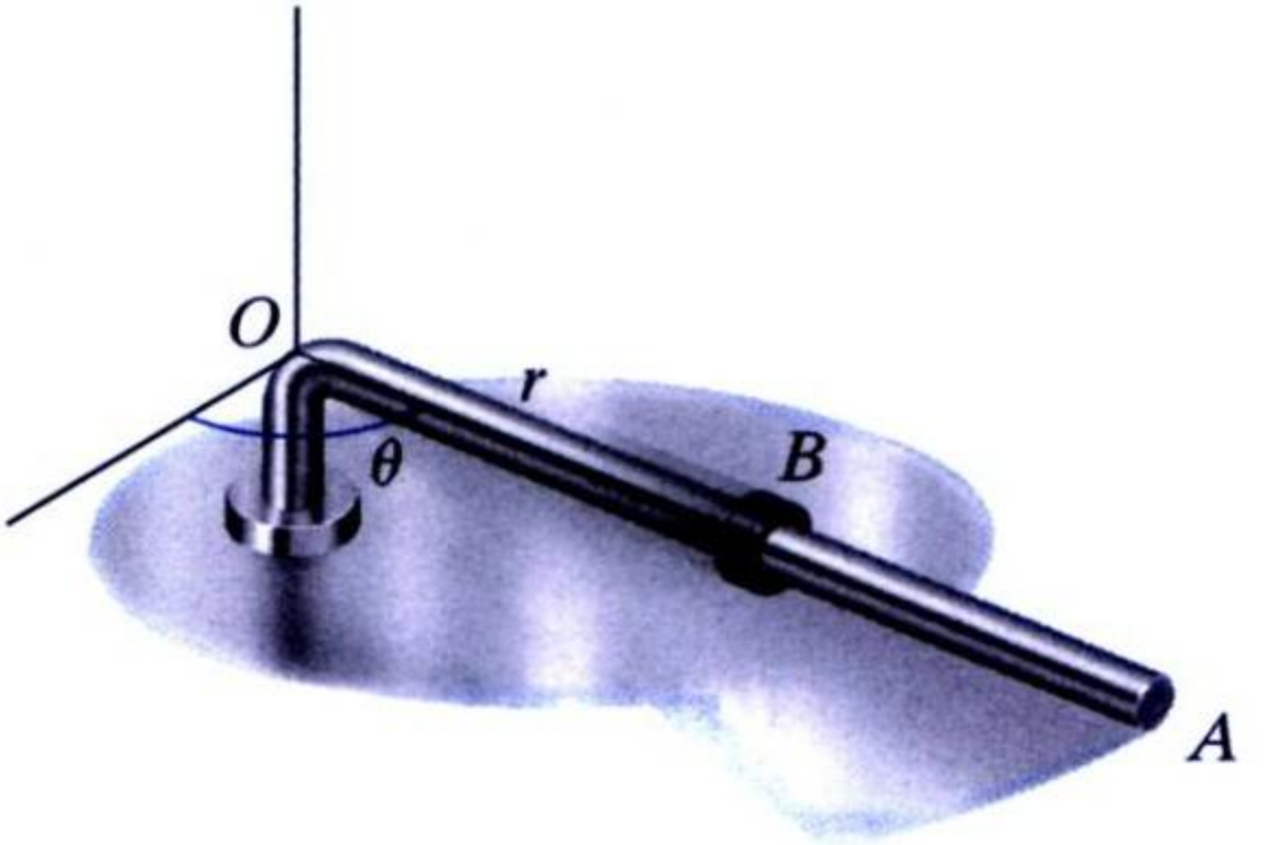
$$v = 7t = 7(4.87) = 34.1 \text{ pies/s}$$

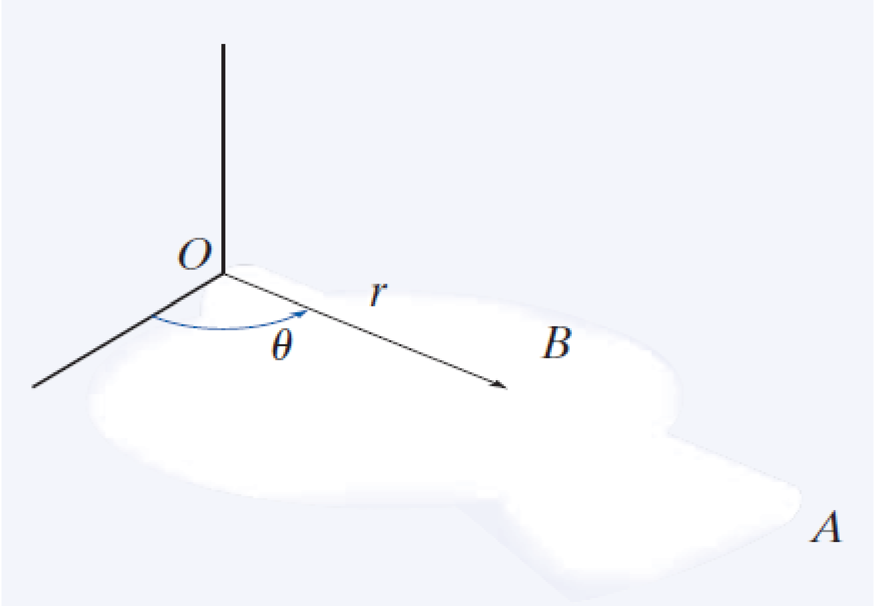
NOTA: recuerde que la velocidad siempre será tangente a la trayectoria, en tanto que la aceleración estará dirigida hacia dentro de la curvatura de la trayectoria.

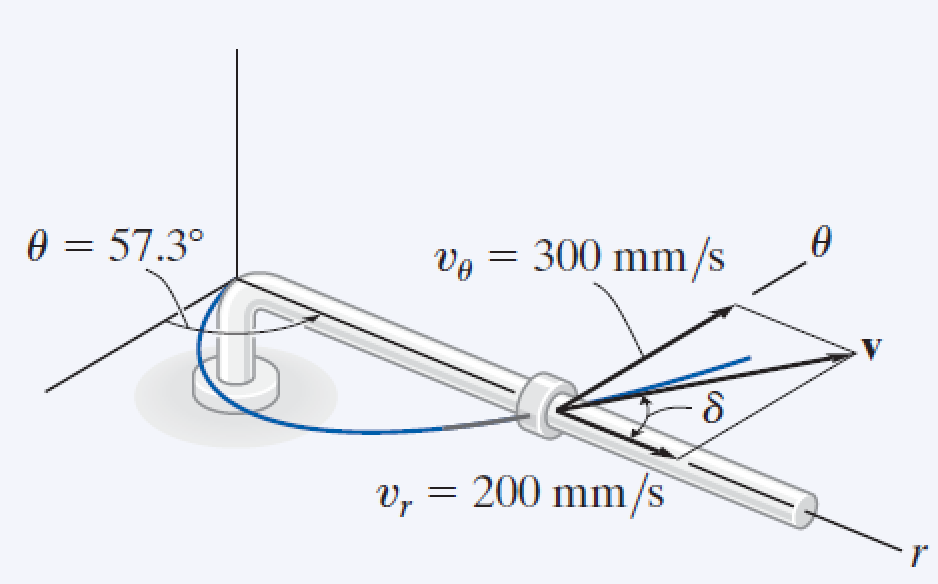
Ejercicio N° 5

La barra OA está girando en el plano horizontal de manera que $\theta = t^3$ rad.

Al mismo tiempo, el collar B se desliza hacia afuera a lo largo de OA de modo que $r = 100\ t^2$mm. Si t está en segundos, hallar la velocidad y la aceleración del collar cuando t = 1 s.







SOLUCIÓN

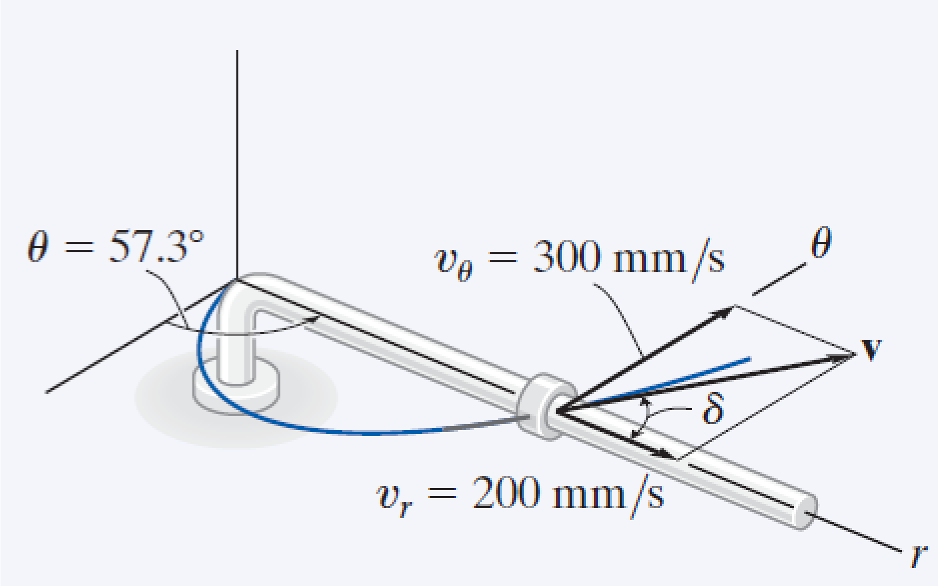
Sistema de coordenadas. Como se dan las ecuaciones paramétricas en función del tiempo de la trayectoria, no es necesario relacionar *r con* θ.

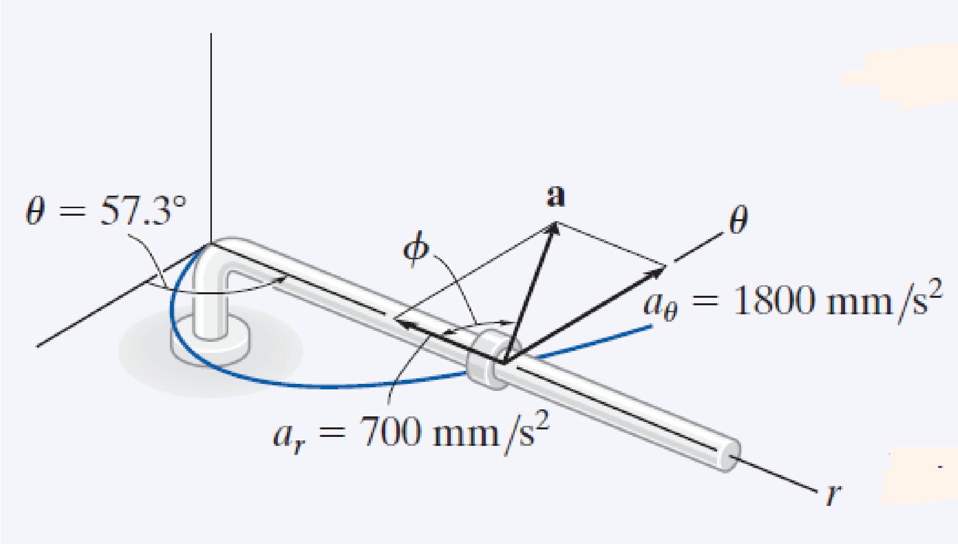
Velocidad y aceleración. Si determinamos las derivadas con respecto al tiempo y las evaluamos cuando *t* = 1 s, tenemos

$$r = 100t^2\Big|_{t=1\,\text{s}} = 100\,\text{mm} \quad \theta = t^3\Big|_{t=1\,\text{s}} = 1\text{ rad} = 57.3^\circ$$

$$\dot{r} = 200t\Big|_{t=1\,\text{s}} = 200\text{ mm/s} \quad \dot{\theta} = 3t^2\Big|_{t=1\,\text{s}} = 3\text{ rad/s}$$

$$\ddot{r} = 200\Big|_{t=1\,\text{s}} = 200\text{ mm/s}^2 \quad \ddot{\theta} = 6t\Big|_{t=1\,\text{s}} = 6\text{ rad/s}^2.$$





NOTA: la velocidad es tangente a la trayectoria; sin embargo, la aceleración está dirigida hacia dentro de la curvatura de la trayectoria, como se esperaba.

- Como se muestra en la figura

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$
$$= 200\mathbf{u}_r + 100(3)\mathbf{u}_\theta = \{200\mathbf{u}_r + 300\mathbf{u}_\theta\}\ \text{mm/s}$$

- La magnitud de **v** es

$$v = \sqrt{(200)^2 + (300)^2} = 361\ \text{mm/s}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{300}{200}\right) = 56.3^\circ \qquad \delta + 57.3^\circ = 114^\circ$$

- Como se muestra en la figura

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$
$$= [200 - 100(3)^2]\mathbf{u}_r + [100(6) + 2(200)3]\mathbf{u}_\theta$$
$$= \{-700\mathbf{u}_r + 1800\mathbf{u}_\theta\}\ \text{mm/s}^2$$

- La magnitud de **a** es

$$a = \sqrt{(700)^2 + (1800)^2} = 1930\ \text{mm/s}^2$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1800}{700}\right) = 68.7^\circ \qquad (180^\circ - \phi) + 57.3^\circ = 169^\circ$$