FACULTAD DE INGENIERÍA

VELOCIDAD RELATIVA Y ANGULAR

MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ing. Carlos Barrera

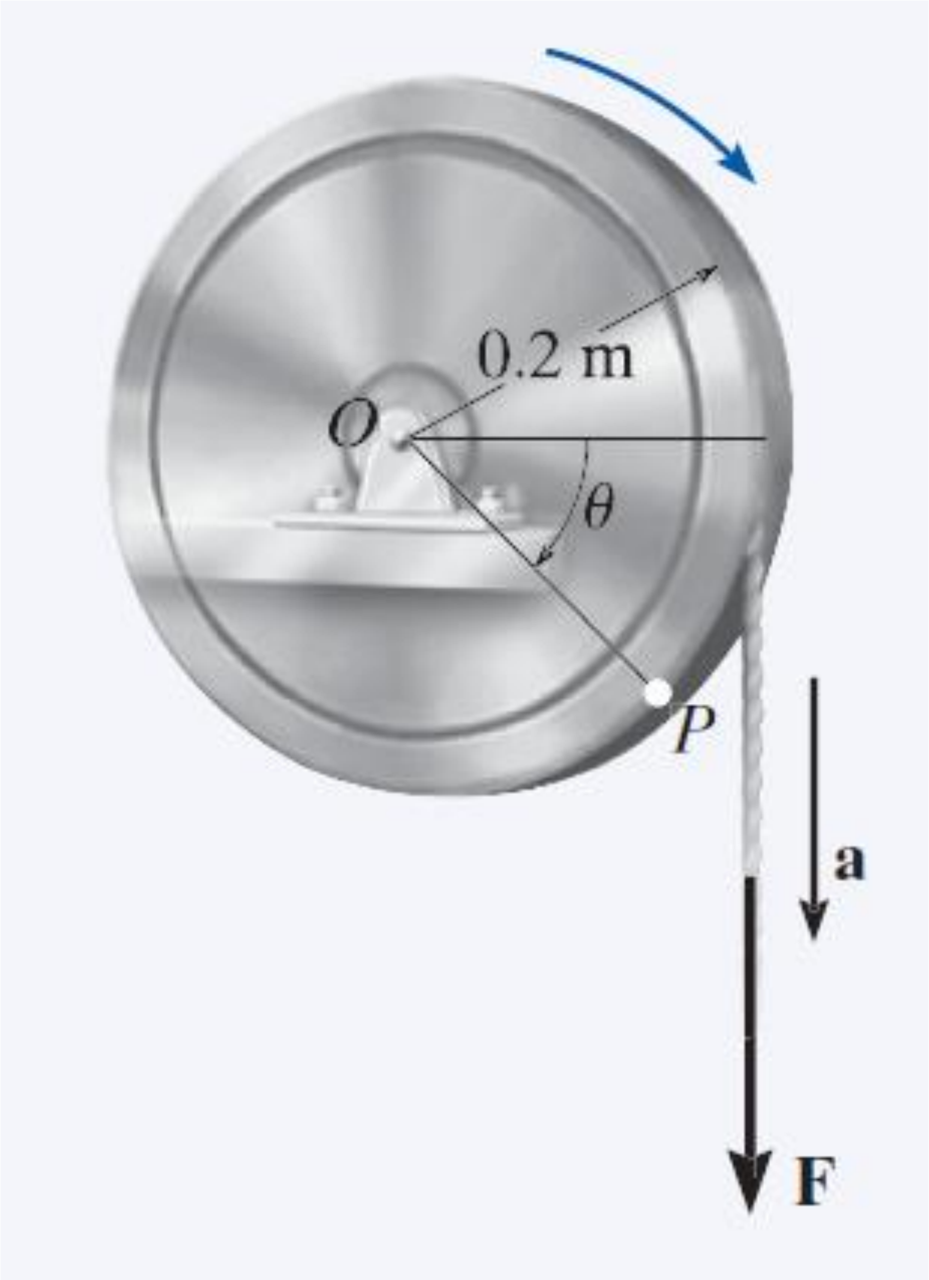
Ejercicio N°1

Una cuerda se enrolla alrededor de una rueda que está en reposo.

Si una fuerza aplicada a la cuerda le da una aceleración a= 4t (m/s^2), donde t está en segundos, calcular en función del tiempo

a) La velocidad angular de la rueda.

b) La posición angular de la línea OP en radianes.



• **SOLUCIÓN**

Parte (a). La rueda está sometida a rotación alrededor de un eje fijo que pasa por el punto *O*. Por tanto, un punto *P* en la rueda describe una trayectoria circular y su aceleración tiene componentes *tanto* tangenciales como normales. La componente tangencial es $(a_P)_t=(4t)\mathrm{m/s^2}$, puesto que la cuerda está enrollada alrededor de la rueda y se desplaza *tangente* a ella. Por consiguiente, la aceleración angular de la rueda es

$$(\circlearrowright +) \qquad (a_P)_t = \alpha r$$
$$(4t)\ \mathrm{m/s^2} = \alpha(0.2\ \mathrm{m})$$
$$\alpha = (20t)\ \mathrm{rad/s^2} \circlearrowright$$

Con este resultado y $\alpha = d\omega/dt$, ahora podemos determinar la velocidad angular de la rueda, puesto que esta ecuación relaciona α, t y ω. Al integrar, con la condición inicial de que $\omega = 0$ cuando $t = 0$, se obtiene

$$(\circlearrowright +) \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = (20t)\ \mathrm{rad/s^2}$$
$$\int_0^\omega d\omega = \int_0^t 20t\ dt$$
$$\omega = 10t^2\ \mathrm{rad/s} \circlearrowright$$

Parte (b). Con este resultado y $\omega = d\theta/dt$, podemos determinar la posición angular θ de *OP*, puesto que esta ecuación relaciona θ, ω y *t*. Al integrar, con la condición inicial de que $\theta = 0$ cuando $t = 0$, tenemos

$$(\circlearrowright +) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega = (10t^2)\ \text{rad/s}$$

$$\int_0^\theta d\theta = \int_0^t 10t^2\, dt$$

$$\theta = 3.33t^3\ \text{rad}$$

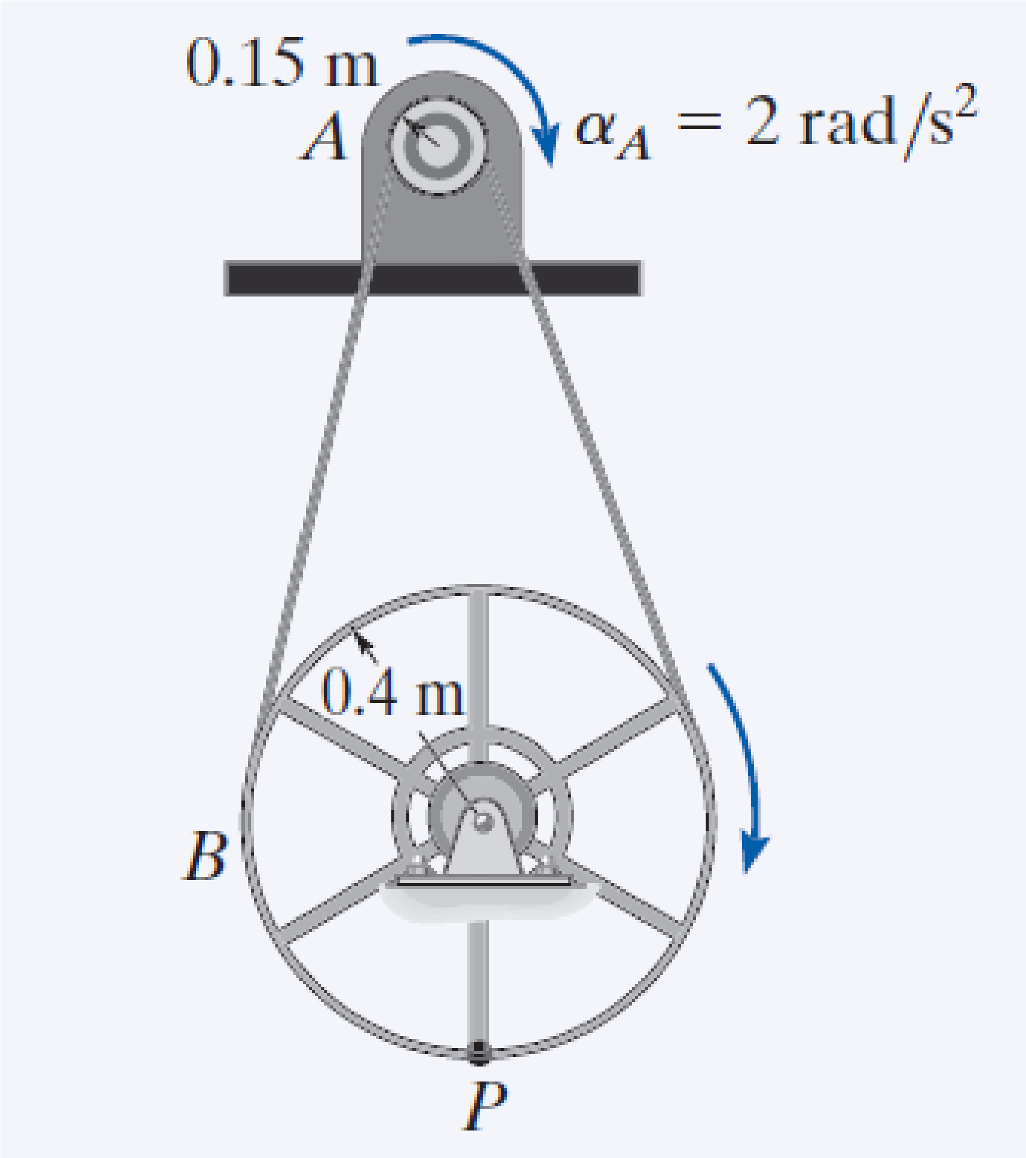
NOTA: no podemos utilizar la ecuación de aceleración angular constante, puesto que es una función del tiempo.

Ejercicio N°2) El motor se usa para hacer girar una rueda y el ventilador.

Si la polea A conectada al motor comienza a girar desde el reposo con aceleración angular 2 rad/s^2.

Calcular las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto P sobre la rueda, después que la rueda B ha girado una revolución.

Suponer que la correa no resbala sobre la polea ni sobre la rueda.



SOLUCIÓN

Movimiento angular. Primero convertiremos las dos revoluciones en radianes. Como una revolución equivale a 2π rad, entonces

$$\theta_A = 2 \text{ rev}\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right) = 12.57 \text{ rad}$$

- Como α_A es constante, la velocidad angular de la polea *A* es por consiguiente

$$(\circlearrowright +) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

$$\omega_A^2 = 0 + 2(2 \text{ rad/s}^2)(12.57 \text{ rad} - 0)$$

$$\omega_A = 7.090 \text{ rad/s}$$

- La banda tiene la misma velocidad y componente tangencial de la aceleración cuando pasa por la polea y la rueda. Por tanto,

$$v = \omega_A r_A = \omega_B r_B; \quad 7.090 \text{ rad/s } (0.15 \text{ m}) = \omega_B(0.4 \text{ m})$$

$$\omega_B = 2.659 \text{ rad/s}$$

$$a_t = \alpha_A r_A = \alpha_B r_B; \quad 2 \text{ rad/s}^2 \,(0.15 \text{ m}) = \alpha_B(0.4 \text{ m})$$

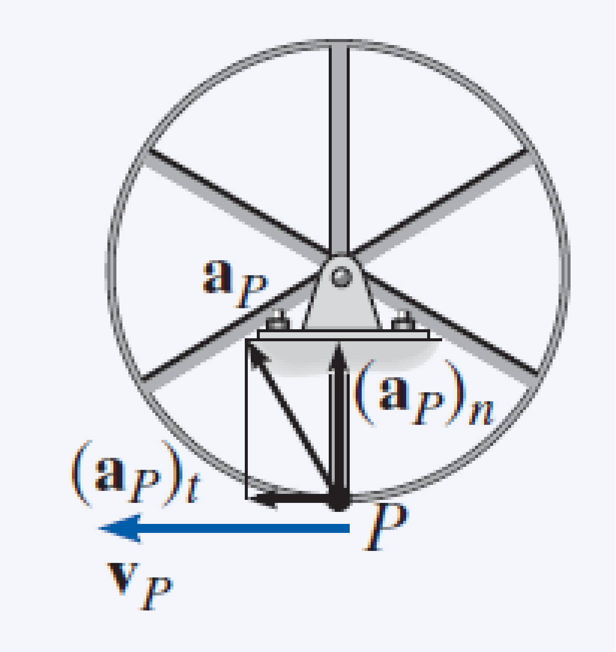
$$\alpha_B = 0.750 \text{ rad/s}^2$$

Movimiento de P. Como se muestra en el diagrama cinemático en la figura, tenemos

$$v_P = \omega_B r_B = 2.659 \text{ rad/s } (0.4 \text{ m}) = 1.06 \text{ m/s}$$

$$(a_P)_t = \alpha_B r_B = 0.750 \text{ rad/s}^2 \,(0.4 \text{ m}) = 0.3 \text{ m/s}^2$$

$$(a_P)_n = \omega_B^2 r_B = (2.659 \text{ rad/s})^2 (0.4 \text{ m}) = 2.827 \text{ m/s}^2$$



Por tanto

$$a_P = \sqrt{(0.3 \text{ m/s}^2)^2 + (2.827 \text{ m/s}^2)^2} = 2.84 \text{ m/s}^2$$

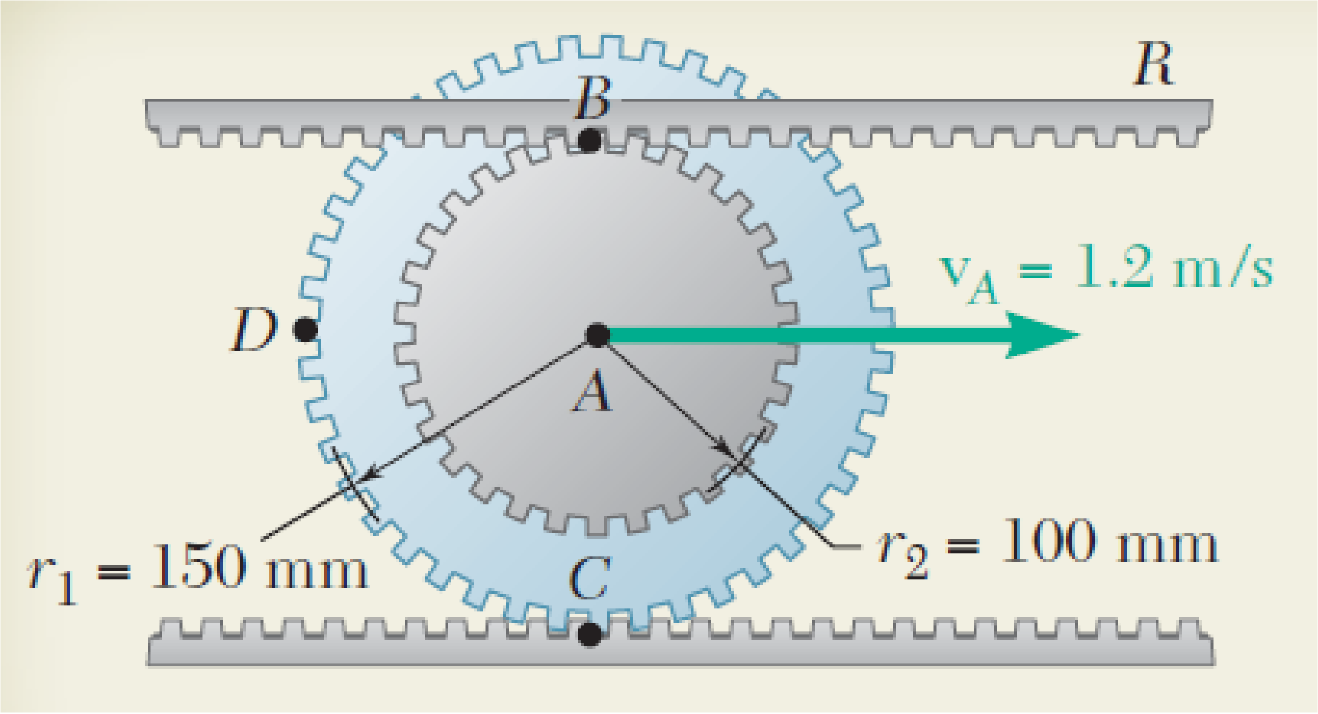
Ejercicio N°3

El engrane doble tiene una velocidad de su centro A de 1,2 m/s dirigida hacia la derecha.

Calcular:

a) Velocidad angular del engrane

b) Velocidades de la cremallera superior R y del punto D del engrane.



SOLUCIÓN

a) **Velocidad angular del engrane.** Puesto que el engrane rueda sobre la cremallera inferior, su centro *A* se mueve una distancia igual a la circunferencia exterior $2\pi r_1$ por cada revolución completa del engrane. Al observar que 1 rev= 2πrad y que cuando *A* se mueve hacia la derecha ($x_A > 0$) el engrane gira en el sentido de las manecillas del reloj ($\theta < 0$), se escribe

$$\frac{x_A}{2\pi r_1} = -\frac{\theta}{2\pi} \qquad x_A = -r_1\theta$$

Al diferenciar con respecto al tiempo *t* y sustituir los valores conocidos v_A=1.2m/s y $r1$ = 150 mm = 0.150 m, se obtiene

$$v_A = -r_1\omega \qquad 1.2 \text{ m/s} = -(0.150 \text{ m})\omega \qquad \omega = -8 \text{ rad/s}$$

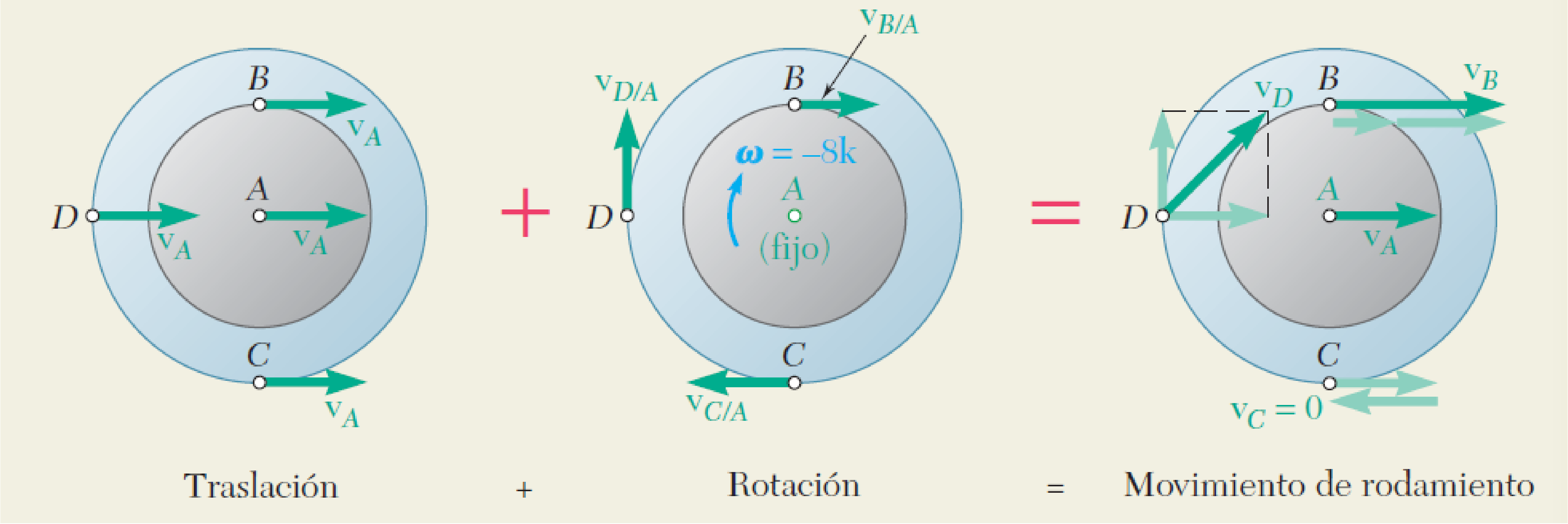
$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k} = -(8 \text{ rad/s})\mathbf{k}$$

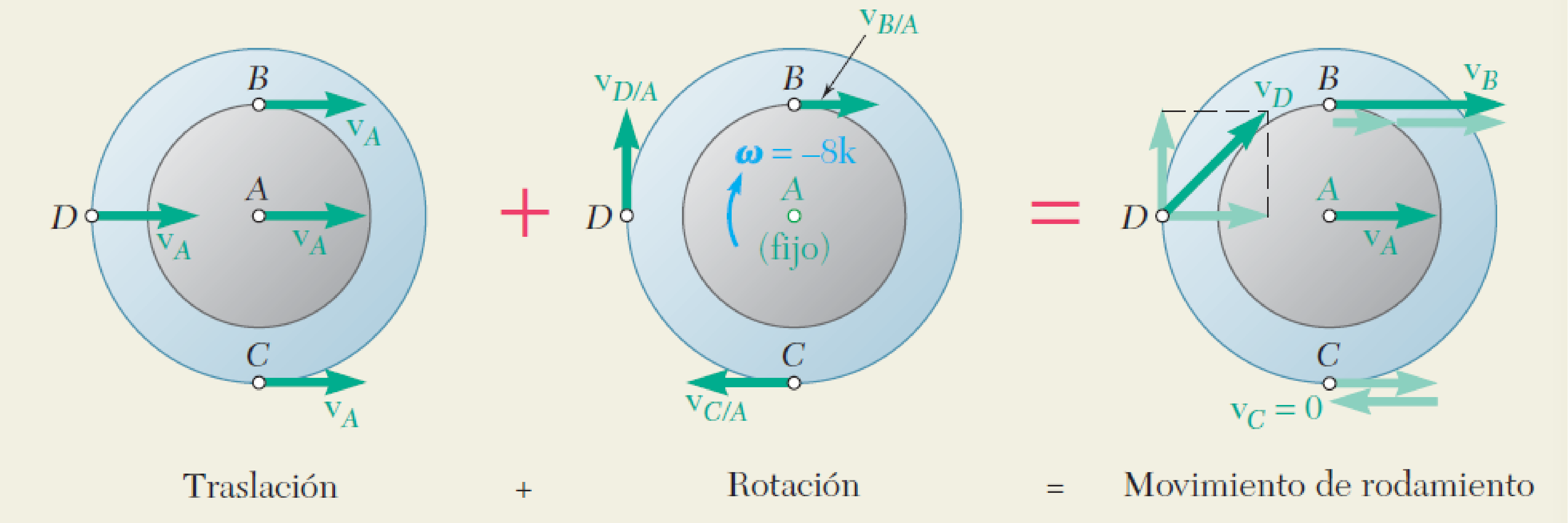
donde **k** es un vector que apunta hacia fuera del papel.

• ***b*) *Velocidades.*** El movimiento de rodamiento se transforma en dos movimientos componentes: una traslación con el centro *A* y una rotación alrededor del centro *A*.

En la traslación, todos los puntos del engrane se mueven con la misma velocidad $\mathbf{v}_A$.

En la rotación, cada punto *P* del engrane se mueve alrededor de *A* con una velocidad relativa $\mathbf{v}_{P/A} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{P/A}$, donde $\mathbf{r}_{P/A}$ es el vector de posición de *P* relativo a *A*.

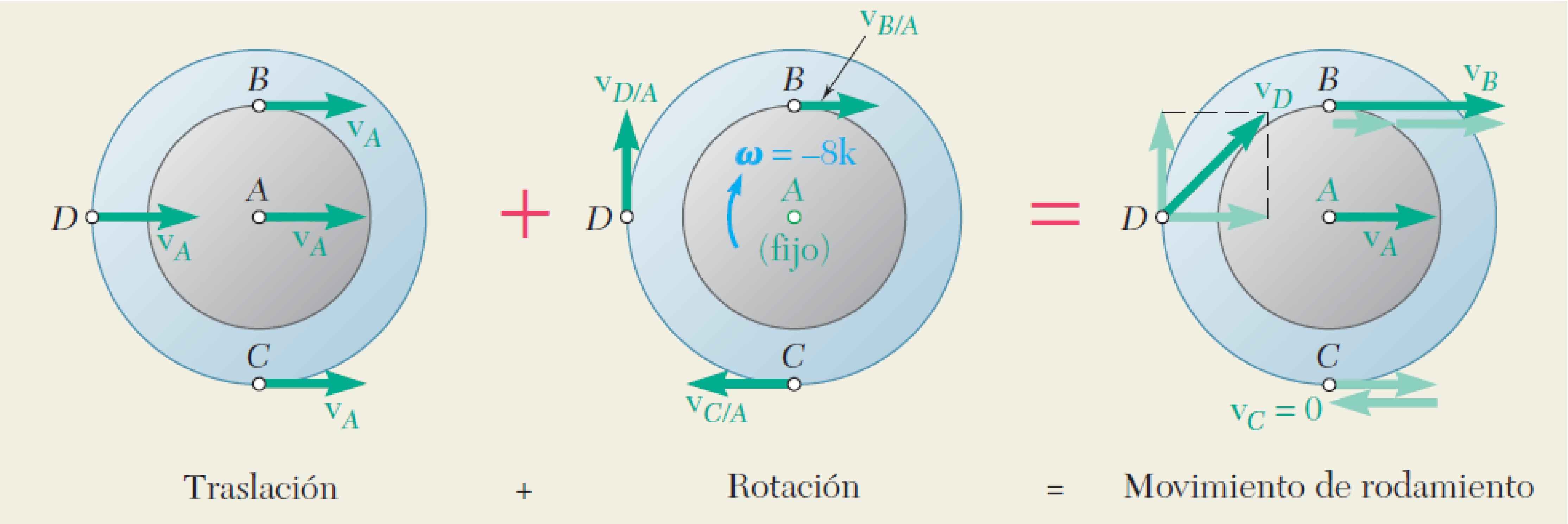




- **Velocidad de la cremallera superior.** La velocidad de la cremallera superior es igual a la velocidad del punto *B*; se escribe

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_R = \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \\
&= (1.2 \text{ m/s})\mathbf{i} - (8 \text{ rad/s})\mathbf{k} \times (0.100 \text{ m})\mathbf{j} \\
&= (1.2 \text{ m/s})\mathbf{i} + (0.8 \text{ m/s})\mathbf{i} = (2 \text{ m/s})\mathbf{i}
\end{aligned}
$$

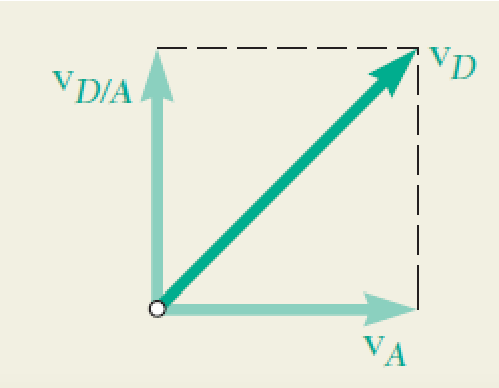
$$\mathbf{v}_R = 2 \text{ m/s} \rightarrow$$



- **Velocidad del punto *D*.**

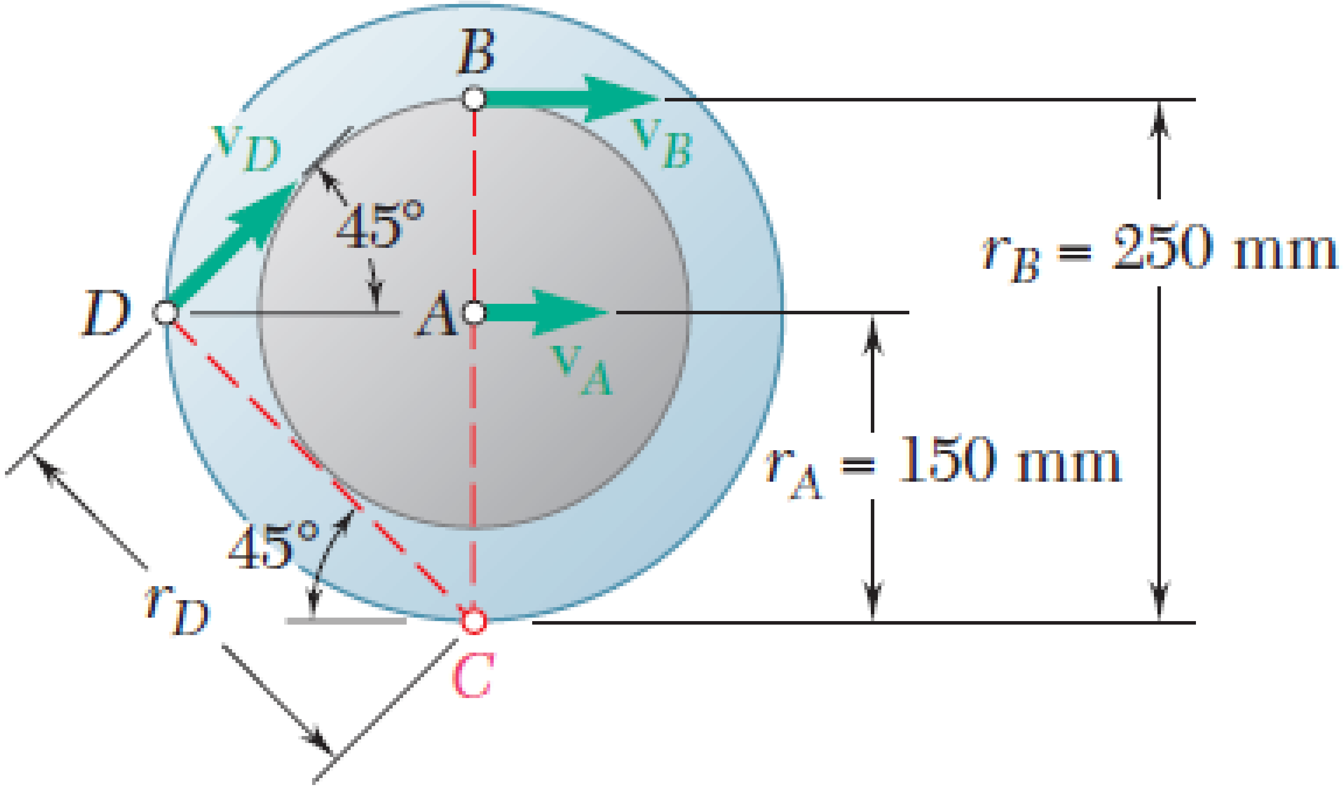
$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{D/A} &= \mathbf{v}_A + \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{D/A} \\
&= (1.2\ \text{m/s})\mathbf{i} - (8\ \text{rad/s})\mathbf{k} \times (-0.150\ \text{m})\mathbf{i} \\
&= (1.2\ \text{m/s})\mathbf{i} + (1.2\ \text{m/s})\mathbf{j}
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{v}_D = 1.697\ \text{m/s} \measuredangle 45^\circ$$



Ejercicio N° 4

Resolver el problema de la cremallera con el método del centro instantáneo de rotación



$V_A = r_A\, \omega$

$1{,}2$ m/s $=(0{,}150\text{m})\ \omega$

$\omega = 8$ rad/s

SOLUCIÓN

a) Velocidad angular del engrane. Puesto que el engrane rueda sobre la cremallera inferior estacionaria, el punto de contacto *C* del engrane con la cremallera no tiene velocidad; el punto *C* es en consecuencia el centro instantáneo de rotación. Se escribe

$$v_A = r_A\omega \qquad 1.2 \text{ m/s} = (0.150 \text{ m})\omega$$

$$\boldsymbol{\omega} = 8 \text{ rad/s} \circlearrowright$$

b) Velocidades. En lo que se refiere a las velocidades, todos los puntos del engrane parecen girar alrededor del centro instantáneo.

Velocidad de la cremallera superior. Si se recuerda que $v_R = v_B$,

se escribe

$$v_R = v_B = r_B\omega \qquad v_R = (0.250 \text{ m})(8 \text{ rad/s}) = 2 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_R = 2 \text{ m/s} \rightarrow$$

- ***Velocidad del punto D.*** Puesto que $rD = (0.150 \text{ m})\sqrt{2} = 0.2121$ m, se escribe

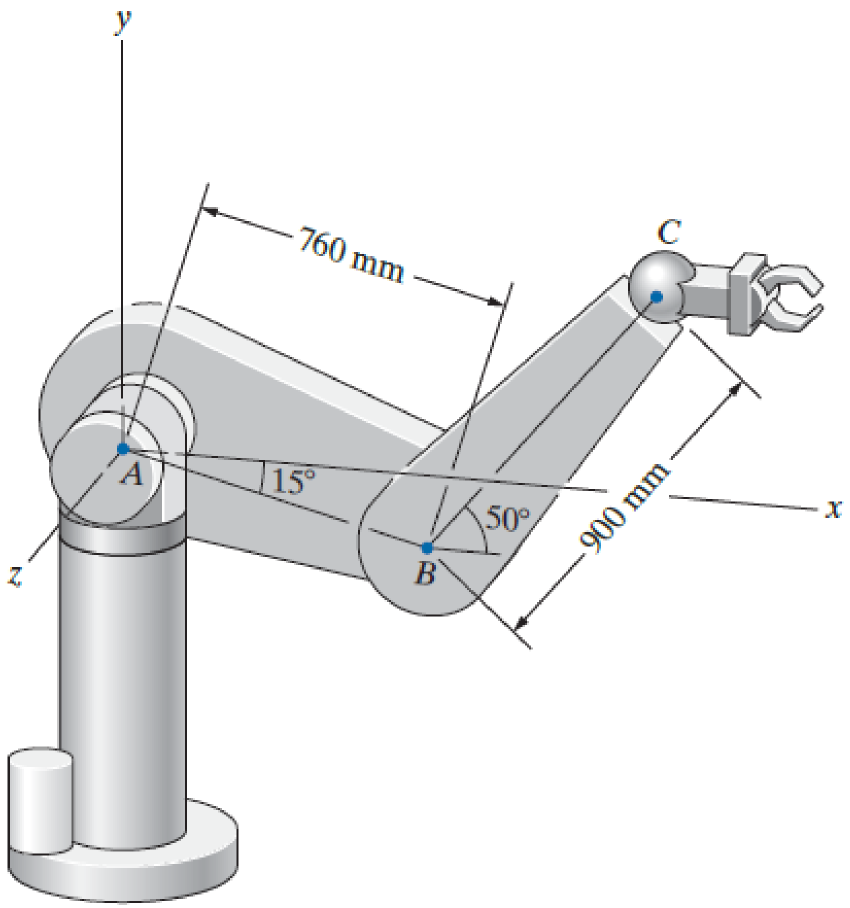
$$v_D = r_D\omega \qquad v_D = (0.2121 \text{ m})(8 \text{ rad/s}) = 1.697 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_D = 1.697 \text{ m/s} \measuredangle 45^\circ$$

Ejercicio N°5 En la figura los puntos B y C están en el plano x-y.

Los vectores de velocidad angular de los brazos AB y BC son w_{AB}=0,5krad/s ; w_{BC} = 2 k rad/s.

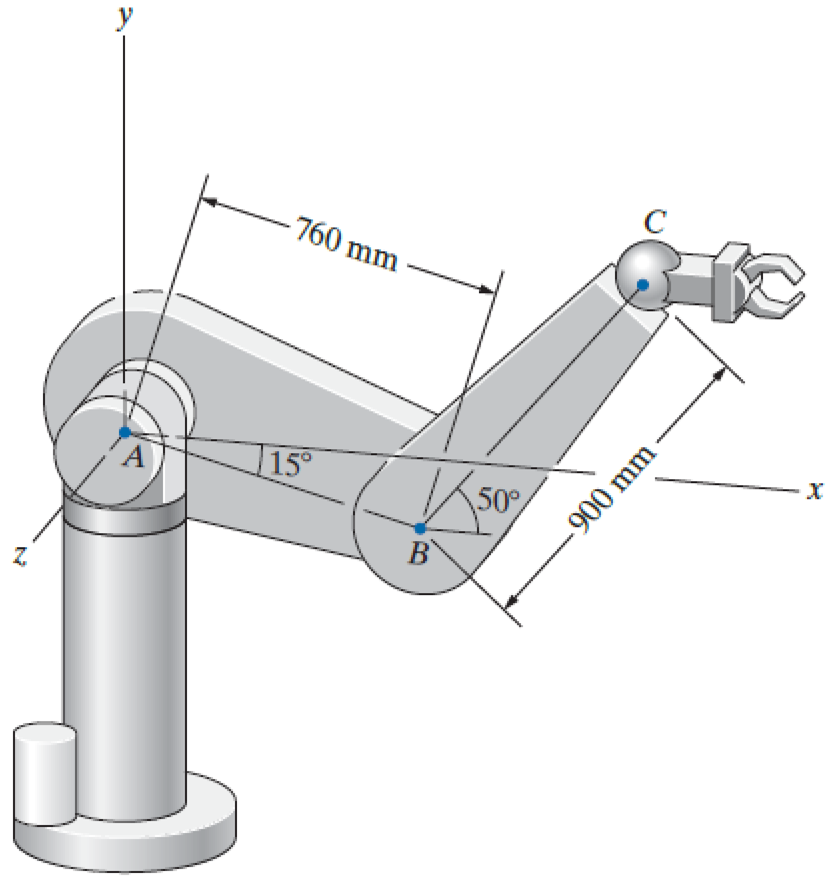
Calcular la velocidad del punto C



Como primer paso en la solución del problema, se plantean los vectores distancia de los brazos *AB* y *BC*:

$$r_{B/A} = (760mm \cdot \cos(15°))i - (760mm \cdot \sin(15°))j$$
$$r_{B/A} = (734{,}1mm)i - (196{,}7mm)j$$

$$r_{C/B} = (900mm \cdot \cos(50°))i + (900mm \cdot \sin(50°))j$$
$$r_{C/B} = (578{,}5mm)i + (689{,}4mm)j$$



Los vectores de velocidad angular

w_{AB}=-0,5k rad/s ; w_{BC}=2k rad/s.

El brazo AB tiene un movimiento de rotación, definido por la velocidad angular ω_{BA}. Analíticamente:

$$v_B = (\omega_{AB} \times r_{B/A}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -0{,}5 \\ 734{,}1 & -196{,}7 & 0 \end{vmatrix} = -(98{,}35 mm/s)i - (364{,}05 mm/s)j$$

$$v_B = -(98{,}35 mm/s)i - (364{,}05 mm/s)j$$

Vectores distancia

$$r_{B/A} = (734{,}1 mm)i - (196{,}7 mm)j$$

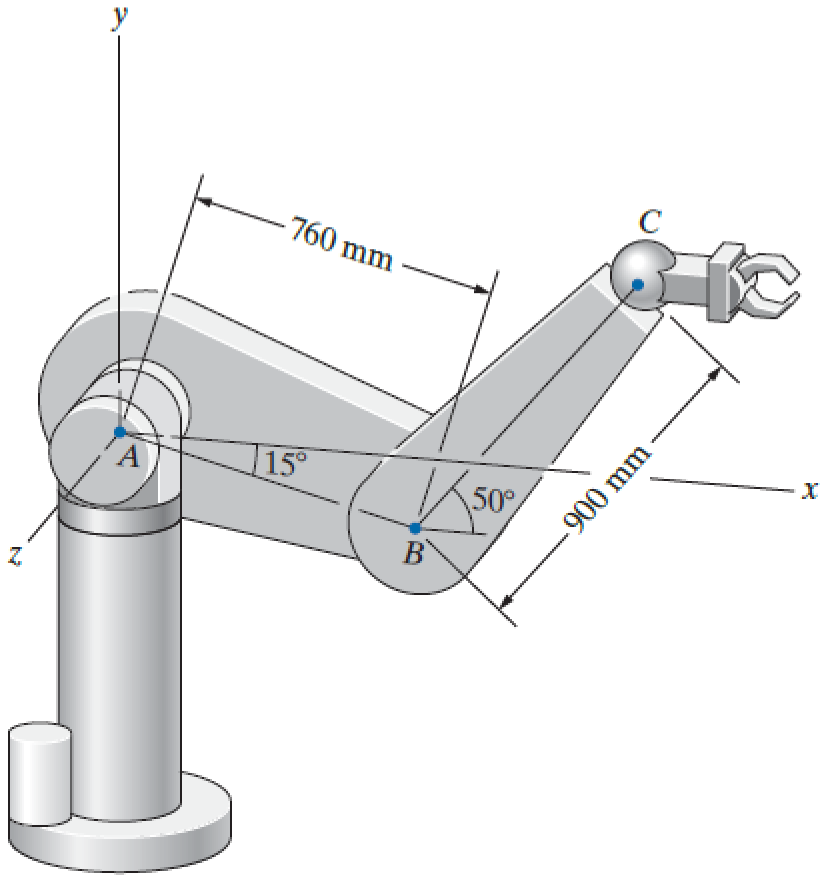
$$r_{C/B} = (578{,}5 mm)i + (689{,}4 mm)j$$

El brazo BC tiene un movimiento de traslación determinado por la velocidad v_B, más un movimiento de rotación, definido por la velocidad angular ω_{BC}. Analíticamente:

$$v_C = v_B + v_{C/B} = v_B + (\omega_{BC} k \times r_{C/B}) \qquad v_{C/B} = (\omega_{BC} k \times r_{C/B})$$

$$v_{C/B} = (\omega_{BC} \times r_{C/B}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 578{,}5 & 689{,}4 & 0 \end{vmatrix} = -(1378{,}9 mm/s)i + (1157 mm/s)j$$

$$v_{C/B} = -(1378{,}9 mm/s)i + (1157 mm/s)j$$



Velocidad de B ya obtenida:

$$\boxed{\mathrm{v}_B = -(98{,}35mm/s)\mathrm{i} - (364{,}05mm/s)\mathrm{j}}$$

$$\mathrm{v}_C = \mathrm{v}_B + \mathrm{v}_{C/B} = \mathrm{v}_B + (\omega_{BC}\mathrm{k} \times \mathrm{r}_{C/B})$$

$$\mathrm{v}_{C/B} = (\omega_{BC}\mathrm{k} \times \mathrm{r}_{C/B})$$

$$\mathrm{v}_{C/B} = (\omega_{BC} \times \mathrm{r}_{C/B}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 578{,}5 & 689{,}4 & 0 \end{vmatrix} = -(1378{,}9mm/s)\mathrm{i} + (1157mm/s)\mathrm{j}$$

$$\mathrm{v}_{C/B} = -(1378{,}9mm/s)\mathrm{i} + (1157mm/s)\mathrm{j}$$

Reemplazando con los valores obtenidos:

$$\mathrm{v}_C = \mathrm{v}_B + \mathrm{v}_{C/B} =$$
$$= \left(-(98{,}35mm/s)\mathrm{i} - (364{,}05mm/s)\mathrm{j}\right) + \left(-(1378{,}9mm/s)\mathrm{i} + (1157mm/s)\mathrm{j}\right)$$

Velocidad en C

$$\boxed{\mathrm{v}_C = -(1477{,}2mm/s)\mathrm{i} + (790mm/s)\mathrm{j}}$$

Los vectores de velocidad angular

w_{AB}=-0,5k rad/s ; w_{BC}=2k rad/s.

Vectores distancia

$$\mathrm{r}_{B/A} = (734{,}1mm)\mathrm{i} - (196{,}7mm)\mathrm{j}$$

$$\mathrm{r}_{C/B} = (578{,}5mm)\mathrm{i} + (689{,}4mm)\mathrm{j}$$