FACULTAD
DE INGENIERÍA

# ACELERACIÓN DE CORIOLIS

MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ing. Carlos Barrera

# *Movimiento plano de una partícula relativa a un sistema de referencia en rotación. Aceleración de Coriolis*

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}$$

donde

$\mathbf{v}_B$ = velocidad de $B$, medida con respecto al marco de referencia $X, Y, Z$

$\mathbf{v}_A$ = velocidad del origen $A$ del marco de referencia $x, y, z$ medida con respecto al marco de referencia $X, Y, Z$

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = velocidad de "$B$ con respecto a $A$", medida por un observador situado en el marco de referencia rotatorio $x, y, z$

$\boldsymbol{\Omega}$ = velocidad angular del marco de referencia $x, y, z$ medida con respecto al marco de referencia $X, Y, Z$

$\mathbf{r}_{B/A}$ = posición de $B$ con respecto a $A$

$$\boxed{\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}}$$

donde

$\mathbf{a}_B$ = aceleración de $B$, medida con respecto al marco de referencia $X, Y, Z$

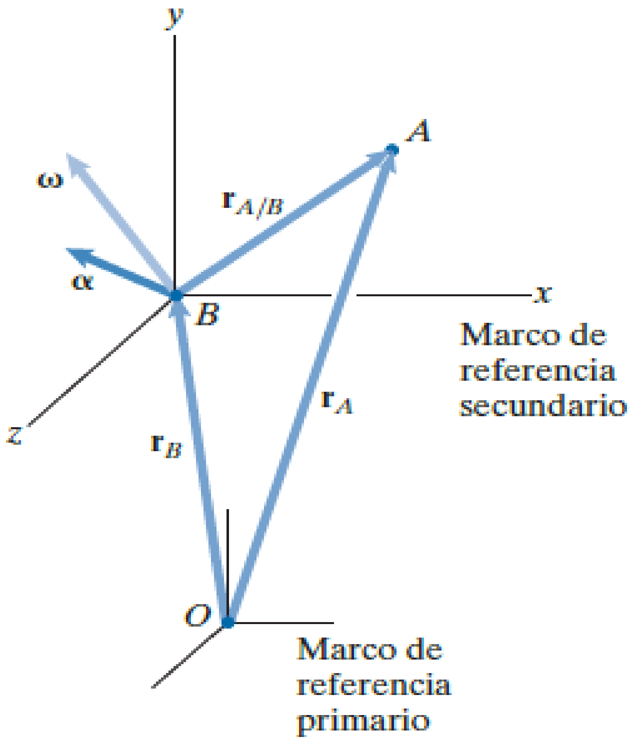
$\mathbf{a}_A$ = aceleración del origen $A$ del marco de referencia $x, y, z$, medida con respecto al marco de referencia $X, Y, Z$

$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}, (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = aceleración y velocidad de $B$ con respecto a $A$, medida por un observador situado en el marco de referencia *rotatorio* $x, y, z$

$\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \boldsymbol{\Omega}$ = aceleración y velocidad angulares del marco de referencia $x, y, z$, medidas con respecto al marco de referencia $X, Y, Z$

$\mathbf{r}_{B/A}$ = posición de $B$ con respecto a $A$

## Movimiento de un punto relativa a un marco de referencia móvil



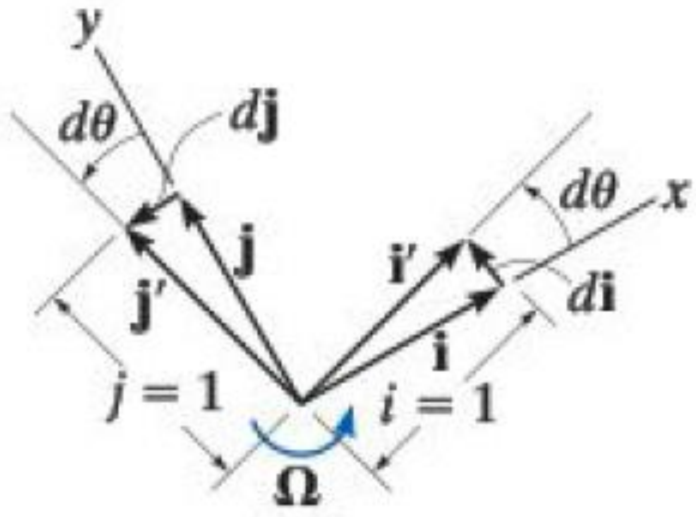

Los términos $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$, $\mathbf{a}_A$, y $\mathbf{a}_B$ son las velocidades y aceleraciones de los puntos A y B relativas al marco de referencia primario. $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son la velocidad y la aceleración angulares del marco de referencia secundario relativas al marco de referencia primario. Los términos $\mathbf{v}_{A\,\mathrm{rel}}$ y $\mathbf{a}_{A\,\mathrm{rel}}$ son la velocidad y la aceleración de $A$ relativa al marco de referencia secundario.

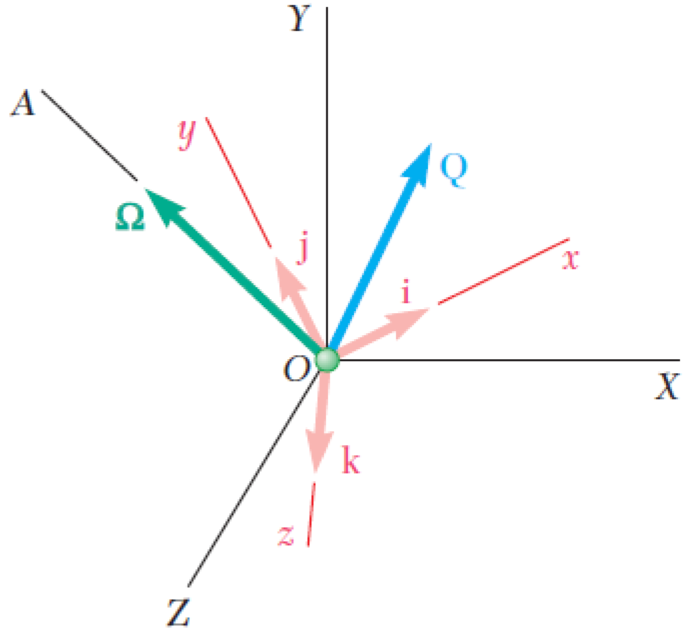
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A\,\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B},$$

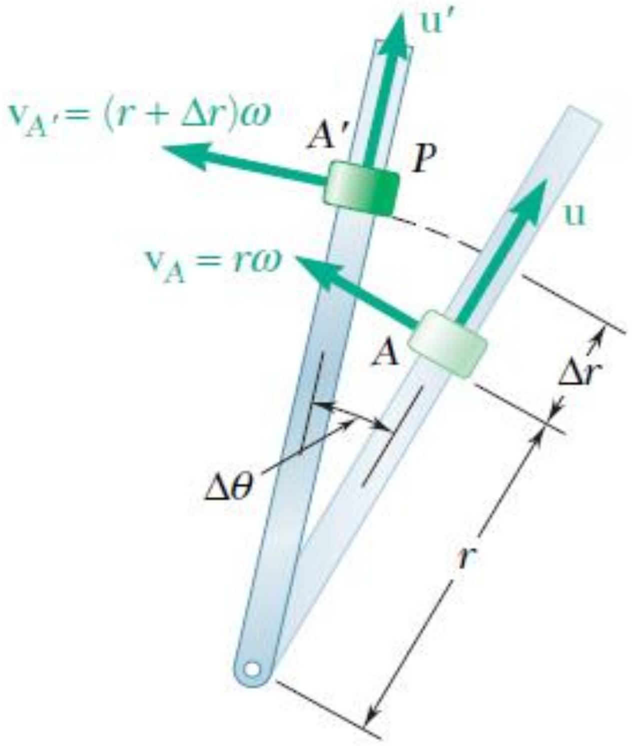
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A\,\mathrm{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{A\,\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}).$$

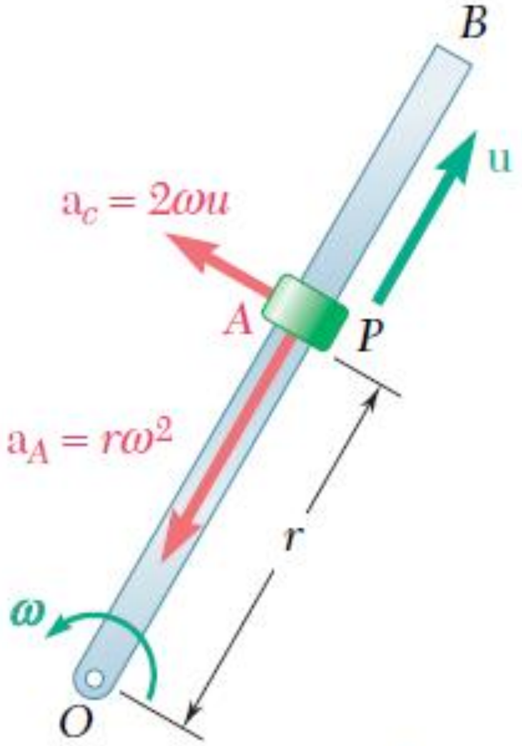
En ecuaciones planares, la ecuación (17.17) puede escribirse de la siguiente forma

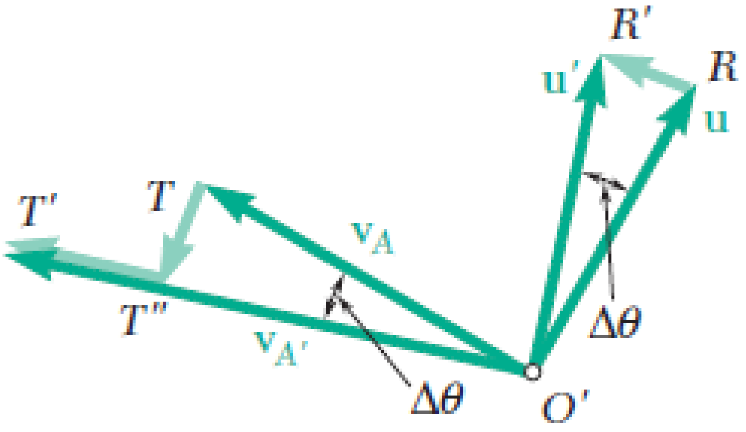
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A\,\mathrm{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{A\,\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} - \omega^2 \mathbf{r}_{A/B}.$$

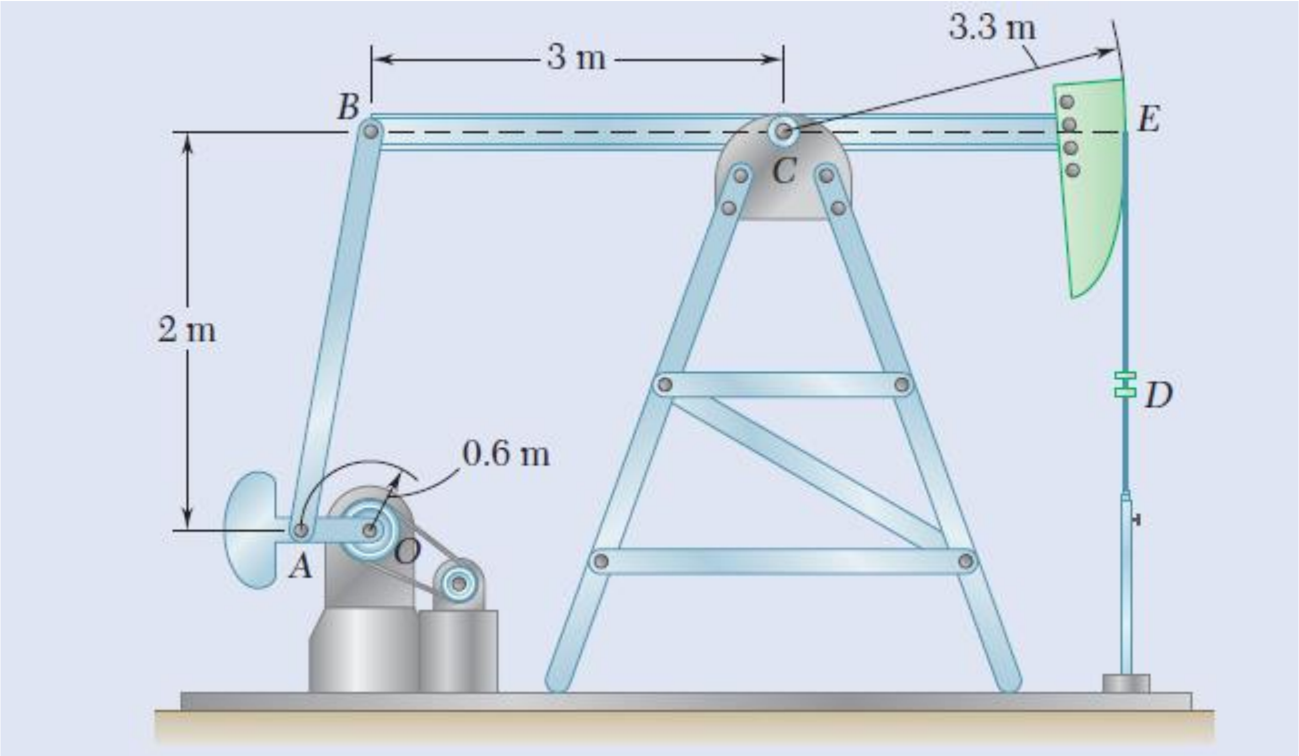

y
dθ
dj
j
j′
dθ
x
i′
di
i
j = 1
i = 1
Ω

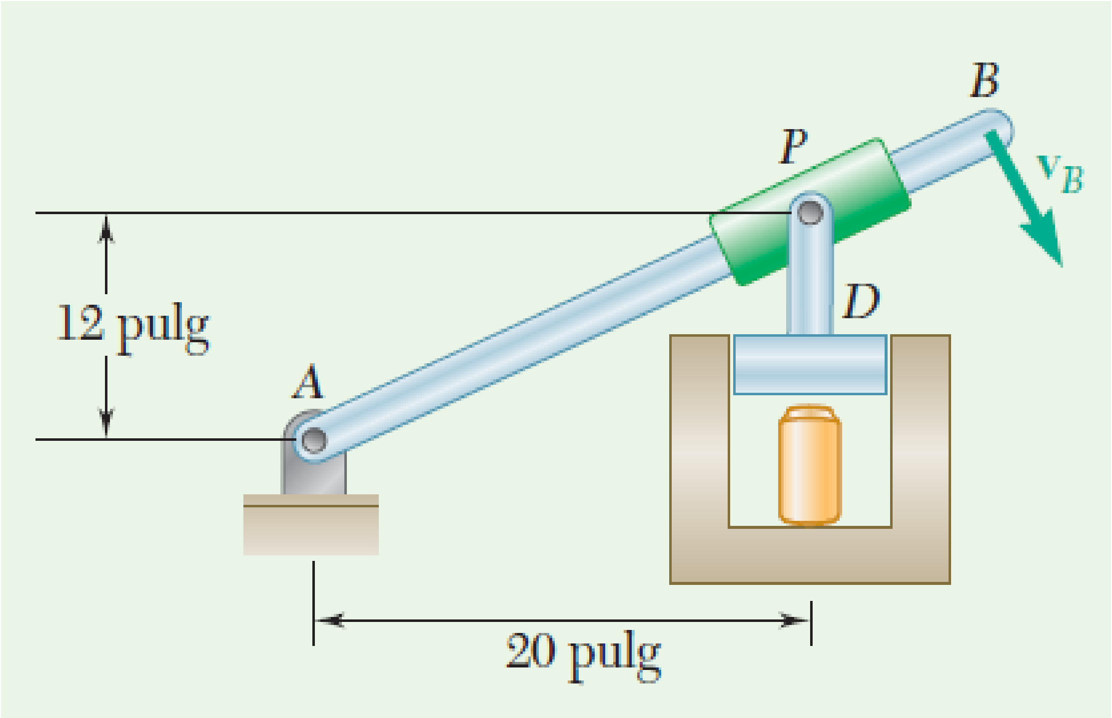

Y
A
y
Ω
Q
j
x
i
O
X
k
z
Z

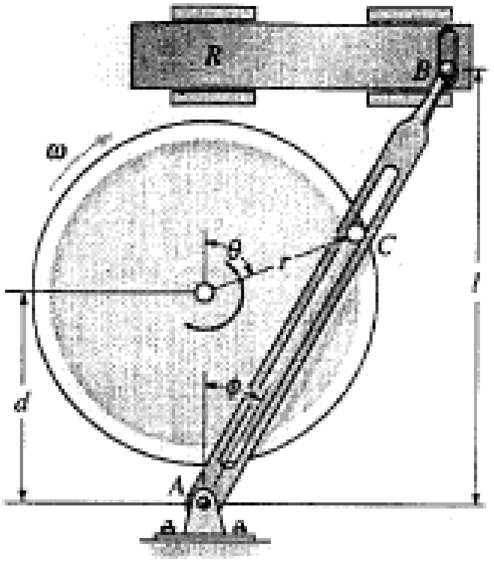

u′
v_A′ = (r + Δr)ω
A′
P
u
v_A = rω
A
Δr
Δθ
r

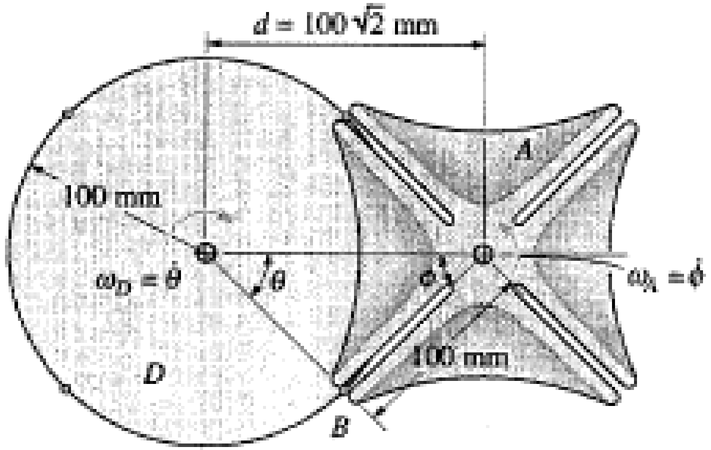

B
u
a_c = 2ωu
A
P
a_A = rω²
r
ω
O

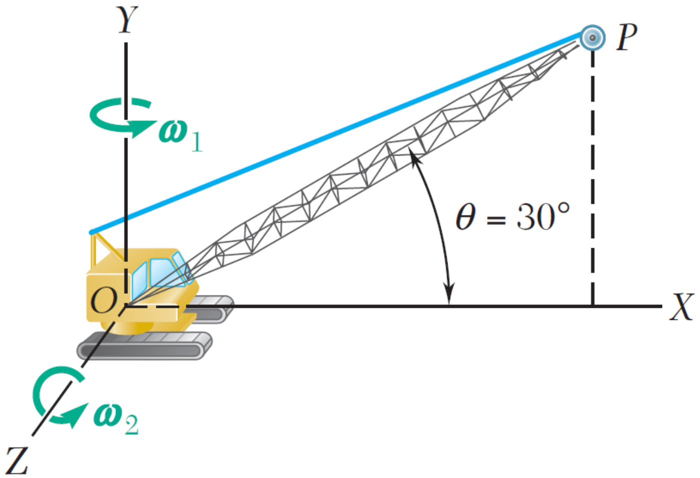

R′
R
u′
u
T′
T
v_A
T″
v_A′
Δθ
Δθ
O′


3 m
3.3 m
B
C
E
2 m
D
0.6 m
A
O


B
P
$v_B$
12 pulg
D
A
20 pulg


R
B
ω
C
θ
r
d
φ
A


d = 100 √2 mm
100 mm
A
$\omega_D = \dot{\theta}$
θ
φ
$\omega_A = \dot{\phi}$
100 mm
D
B

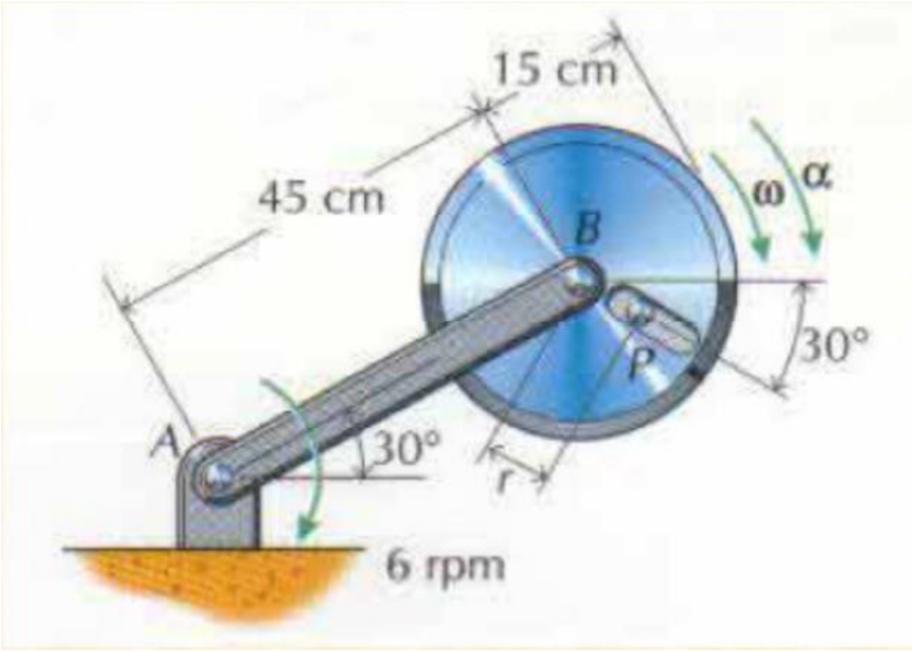

Y
P
$\omega_1$
θ = 30°
O
X
$\omega_2$
Z

**Ejercicio N°1)**

**En el mecanismo de la figura, el brazo AB gira con una frecuencia constante de 6 rpm mientras el pasador P se mueve hacia afuera a lo largo de una guía radial practicada en el disco giratorio con una velocidad constante de 25 mm/s.**

**En el instante representado, r= 7,5 cm, ω = 12 rpm, α = 0,1 rad/s².**

**Calcular la velocidad y la aceleración absoluta del pasador P en ese instante.**



$n_{AB}$=6 rpm

$v_P$ =25 mm/s.

En el instante representado,

r= 7,5 cm

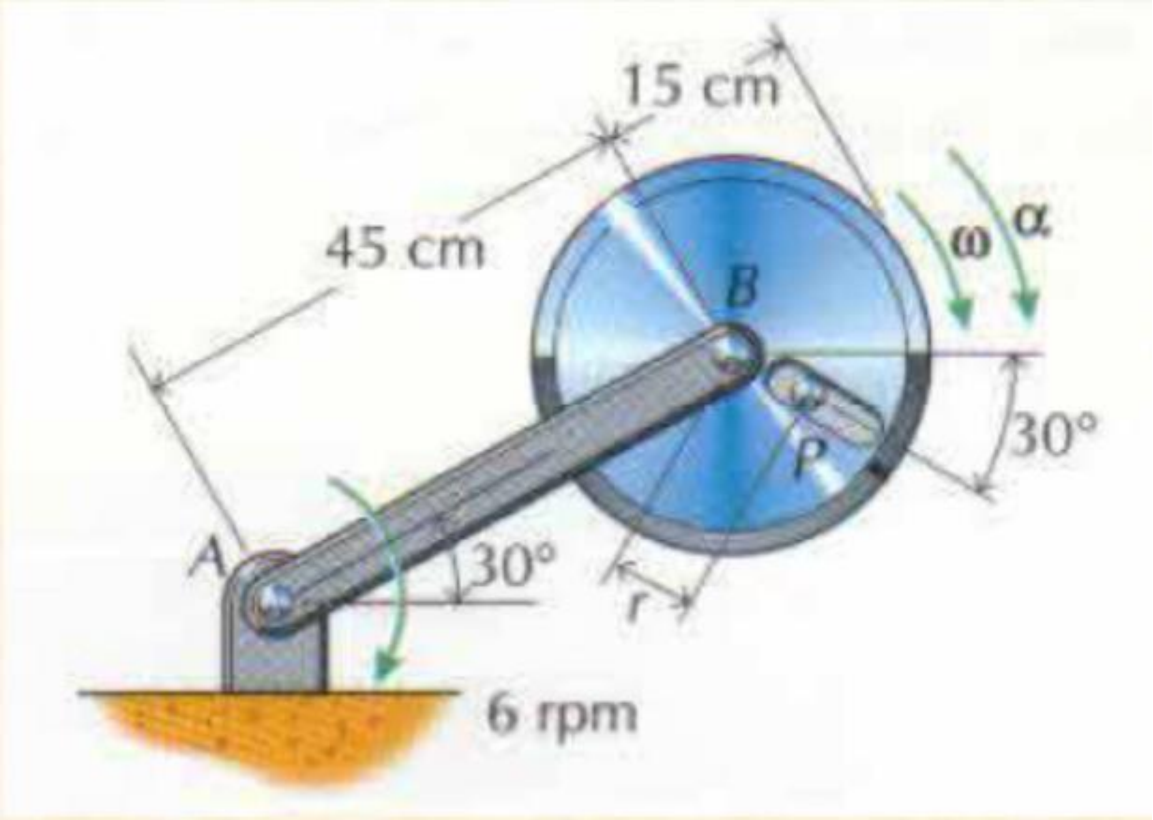
ω = 12 rpm

α = 0,1 rad/$s^2$.

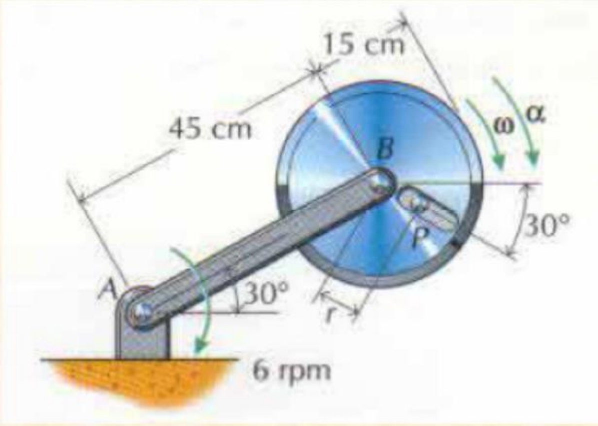
***Calcularen ese instante:***

**Velocidad absoluta del pasador P**

**Aceleración absoluta del pasador P en ese instante.**



## *Referencia del disco* – Llevamos de rpm a radianes/segundo




$$\omega = \left(-12k\ {}^{rev}/_{min}\right)\left(\frac{2\,\pi\ {}^{rad}/_{rev}}{60\ {}^{s}/_{min}}\right) = -1{,}2566\,k\,rad/s$$

## La velocidad del pasador (incógnita solicitada en el problema )

$$v_P = v_B + \omega * r_{P/B} + v_{Prel}$$

$v_B = w.r_{BP} = n.\left(\frac{2\pi}{60}\right).45\ cm =$(6 rpm . ((2 $\pi\ rad/seg$)))/((60 $s/$min)) . 45cm

$$\boxed{v_B = 28,27\ cm/seg}$$

$$v_B = 28,27\ cos\ 30°\ i - 28,27\ sen\ 30°\ j\left(\frac{cm}{seg}\right)$$

$$\boxed{v_B = 24,48\ i - 14,135\ j\left(\frac{cm}{seg}\right)}$$

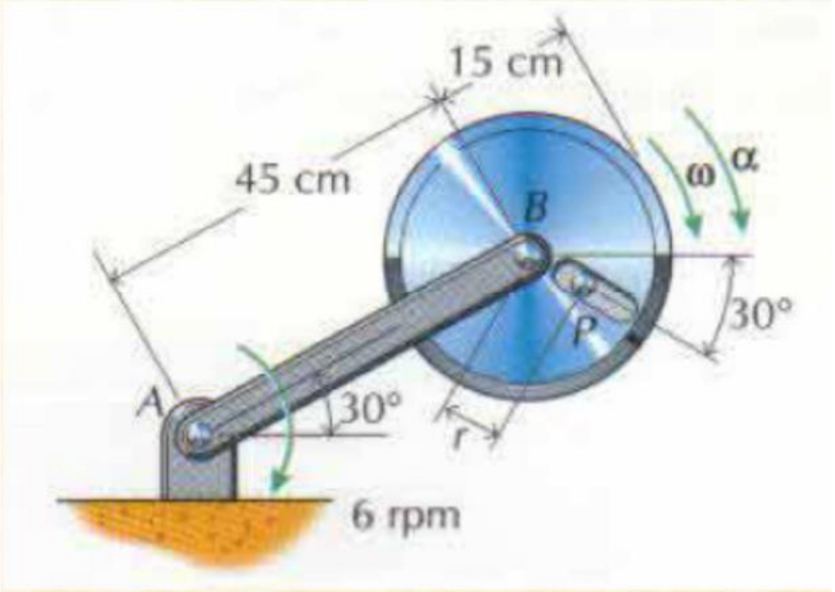
## La velocidad relativa del pasador (dato)

$$\boxed{v_{prel} = 2,5\ i\ \left(\frac{cm}{seg}\right)}$$

$$v_P = v_B + \omega * r_{P/B} + v_{Prel}$$

- **Calculamos w* r $_{P/B}$**

$w.r_{P/B} = (-1,2566\,k\frac{rad}{seg}).(7,5\,i).cm =$ ***-9,425 j (cm/seg)***



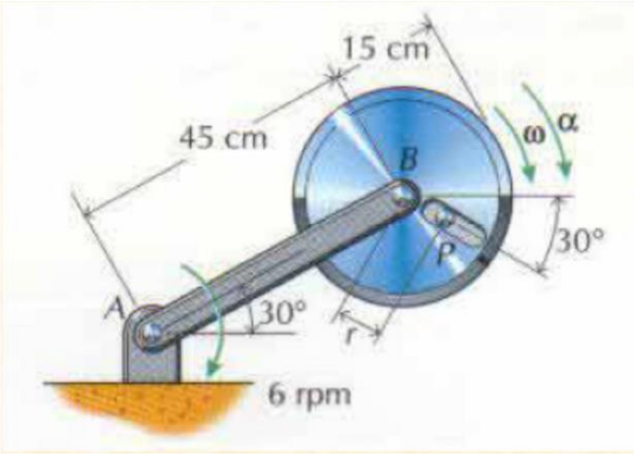

$$v_P = v_B + \omega * r_{P/B} + v_{Prel}$$

V $_P$= $(24,48\,i - 14,135\,j) + ($*−9,425 j*$) + (2,5\,i)$ = ***27 i -23,6*** ***j (cm/seg)***

$\boxed{\text{V}_P = \mathit{35{,}9}\ \textit{(cm/seg)}}$ ***VELOCIDAD ABSOLUTA DEL PASADOR P***

# Calculamos la aceleración absoluta del pasador

- $a_P = a_B + \alpha * r_{P/B} * \omega * \left(\omega * r_{P/B}\right) + a_{Prel} + 2\omega * v_{Prel}$




$\mathbf{a_B} = \left(6 \cdot \left(\frac{2\pi}{60}\right)\right)^2 \cdot 18\ cm =$ **(-8,883 i -15,385 j**$\left(\frac{cm}{seg^2}\right)$

$\alpha \cdot r_{P/B} = \left(0,1\, k \frac{rad}{seg^2}\right) \cdot (7,5\, i) \cdot cm =$ ***-0,75 j (cm/seg²)***

$\omega * (\omega * r_{P/B}) = \left(-1,2566\, k \frac{rad}{seg}\right) * (-3,770\ \mathrm{j}) \cdot cm/\mathrm{seg} =$ ***-11,843 i (cm/seg²)***

$2\omega * v_{Prel} = 2\left(-1,2566\, k \frac{rad}{seg}\right) * (2,5\ \mathrm{j}) \cdot cm/\mathrm{seg} =$ ***6,283 j (cm/seg²)***

$a_{Prel} = 0$

$a_P = -20,7\, i \frac{cm}{seg^2} - 22,4\, j \cdot \frac{cm}{seg^2}$

$\boxed{a_P = 30,5\ (cm/seg^2)}$

***ACELERACIÓN ABSOLUTA DEL PASADOR P***

**Ejercicio N°2**

La barra acodada OAB gira alrededor del eje vertical OB. En el instante considerado, su velocidad y aceleración angulares son respectivamente 20 rad/s y 200 rad/s$^2$, ambas en el sentido de las agujas del reloj cuando se observan desde el eje Y positivo.

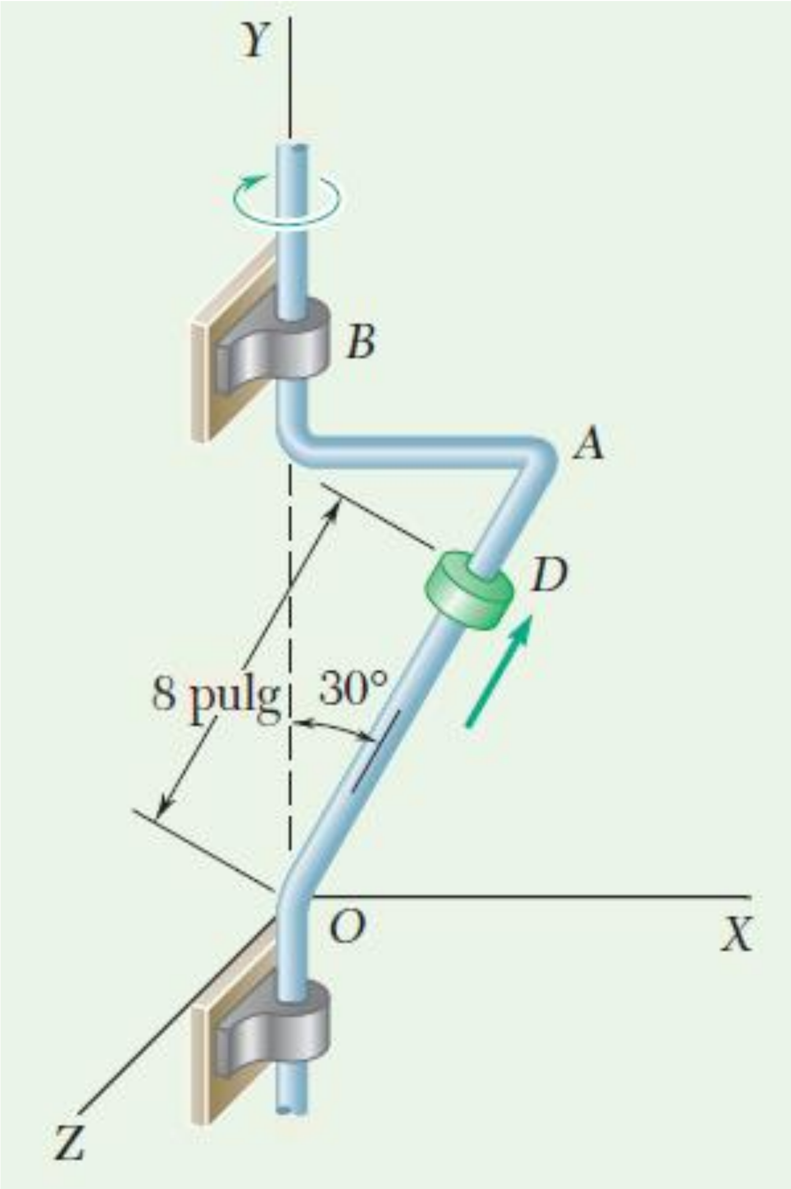
El collarín D se mueve a lo largo de la barra, y en el instante considerado OD=8Pulg.

La velocidad y la aceleración del collarín relativas a la barra son, respectivamente 50 pulg/s y 600 pulg/s$^2$, ambas hacia arriba.

Calcular:

A) La velocidad del collarín.

B) La aceleración del collarín



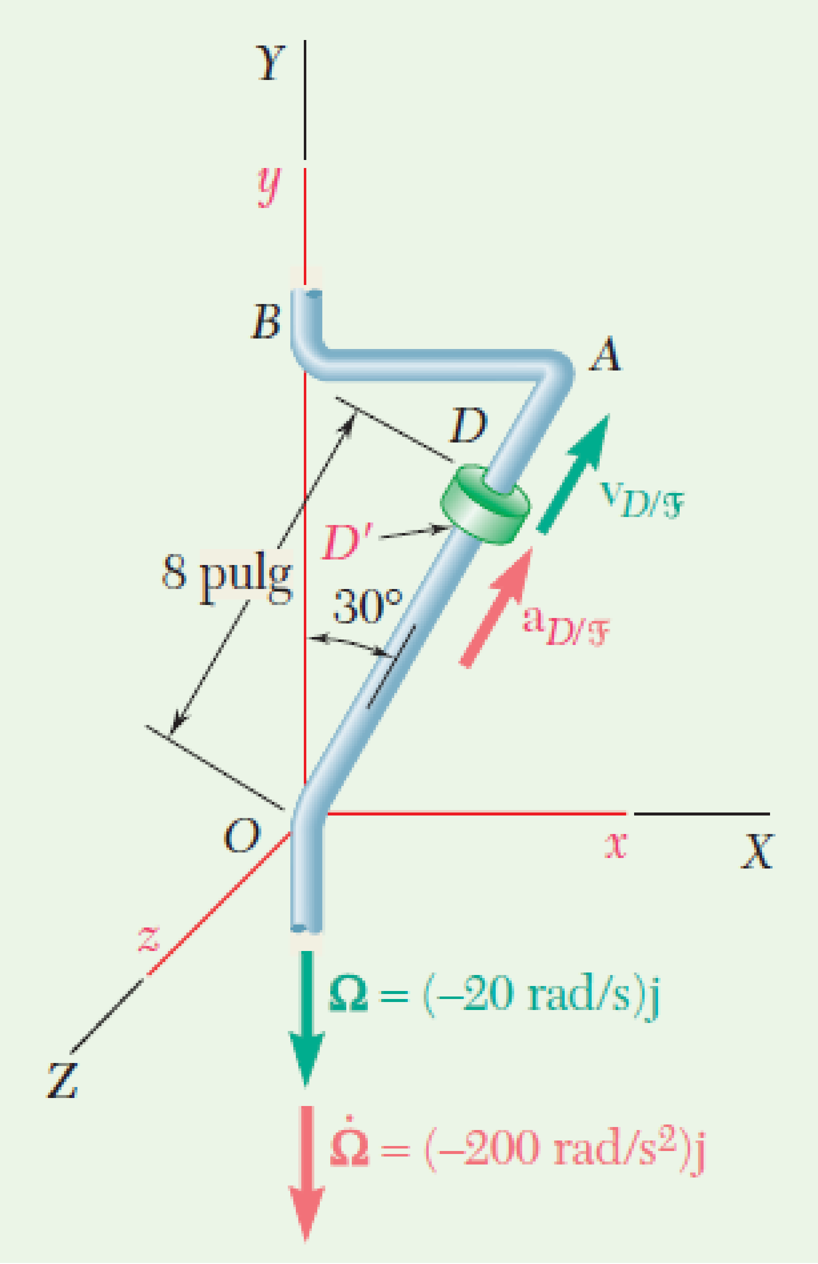
**ESTRATEGIA:** Utilizar la cinemática de los cuerpos rígidos con un sistema de referencia rotatoria dado que el collarín *D* se mueve en relación a la varilla doblada.

Fijar el sistema de referencia rotatorio a la varilla doblada; luego calcular el movimiento en relación al sistema de referencia fijo y el movimiento del collarín en relación al marco de referencia rotatorio.

**MODELAR:**

**Sistemas de referencia.** La velocidad angular y la aceleración angular de la varilla doblada (y el sistema de referencia rotatorio *Oxyz*) en relación con el sistema de referencia fijo *OXYZ* son $\Omega$=(220 rad/s)**j** y $\Omega$=(2200 rad/s2)**j**, respectivamente. El vector de posición de *D* es

$$\mathbf{r} = (8 \text{ pulg})(\text{sen } 30°\mathbf{i} + \cos 30°\mathbf{j}) = (4 \text{ pulg})\mathbf{i} + (6.93 \text{ pulg})\mathbf{j}$$




**El sistema de referencia rotatorio *xyz* está unido a la varilla *OAB*.**

**ANALIZAR:**

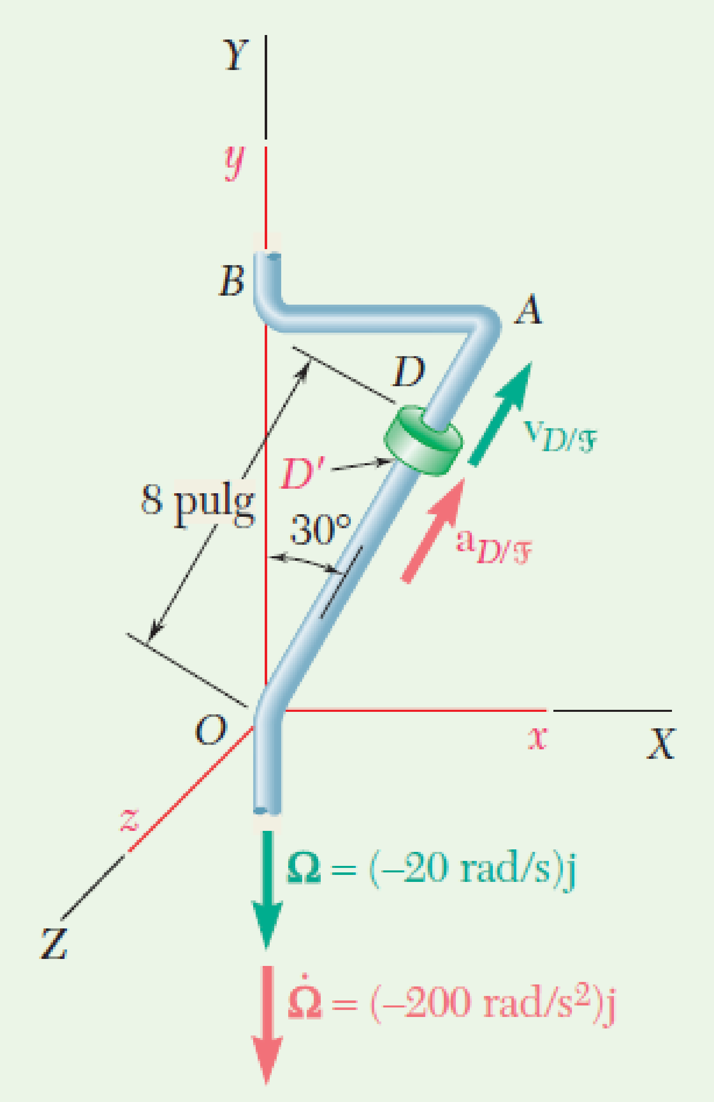
a) **Velocidad $\mathbf{v}_D$.** Denotando por *D´* el punto de la barra que coincide con *D* y por el sistema de referencia en rotación *Oxyz*, se escribe la ecuación.

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_{D'} + \mathbf{v}_{D/\mathcal{F}} \qquad (1)$$

Donde

$$\mathbf{v}_{D'} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = (-20 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times [(4 \text{ pulg})\mathbf{i} + (6.93 \text{ pulg})\mathbf{j}] = (80 \text{ pulg/s})\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_{D/\mathcal{F}} = (50 \text{ pulg/s})(\text{sen } 30°\mathbf{i} + \cos 30°\mathbf{j}) = (25 \text{ pulg/s})\mathbf{i} + (43.3 \text{ pulg/s})\mathbf{j}$$




Al sustituir los valores que se obtienen para $\mathbf{v}_D$ y $\mathbf{V}_{D/\mathcal{F}}$ en(1), se encuentra

$$\boxed{\mathbf{v}_D = (25 \text{ pulg/s})\mathbf{i} + (43.3 \text{ pulg/s})\mathbf{j} + (80 \text{ pulg/s})\mathbf{k}}$$

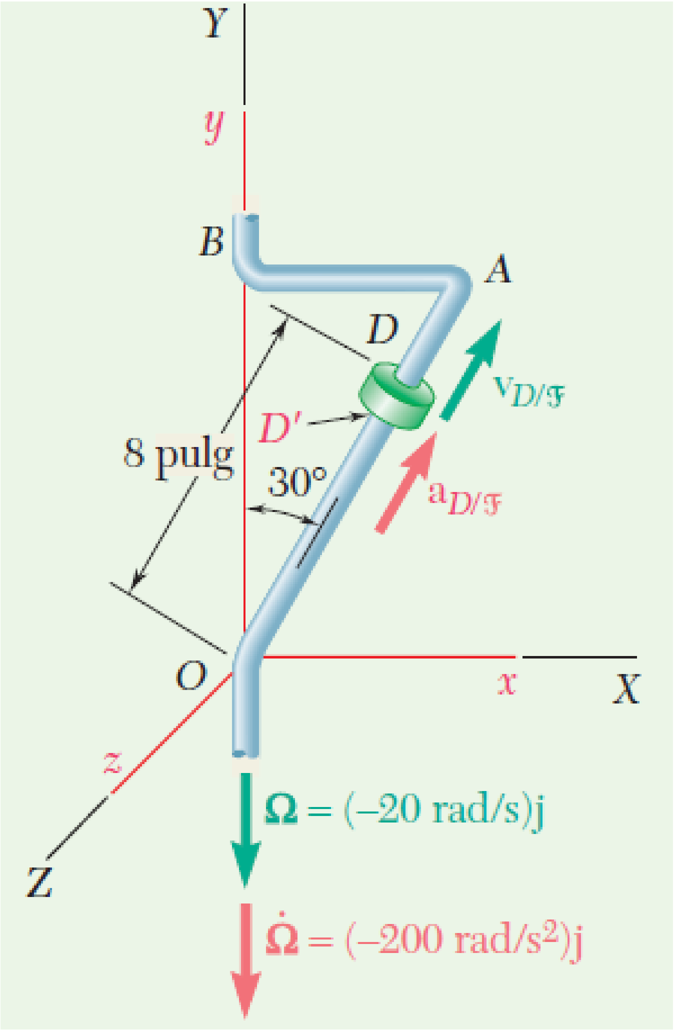
# ANALIZAR:

## *b*) Aceleración $\mathbf{a}_D$. De acuerdo con la ecuación:

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_{D'} + \mathbf{a}_{D/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_C \qquad (2)$$

Donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{D'} &= \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\
&= (-200 \text{ rad/s}^2)\mathbf{j} \times [(4 \text{ pulg})\mathbf{i} + (6.93 \text{ pulg})\mathbf{j}] - (20 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times (80 \text{ pulg/s})\mathbf{k} \\
&= +(800 \text{ pulg/s}^2)\mathbf{k} - (1\,600 \text{ pulg/s}^2)\mathbf{i} \\
\mathbf{a}_{D/\mathcal{F}} &= (600 \text{ pulg/s}^2)(\text{sen } 30°\mathbf{i} + \cos 30°\mathbf{j}) = (300 \text{ pulg/s}^2)\mathbf{i} + (520 \text{ pulg/s}^2)\mathbf{j} \\
\mathbf{a}_C &= 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{D/\mathcal{F}} \\
&= 2(-20 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times [(25 \text{ pulg/s})\mathbf{i} + (43.3 \text{ pulg/s})\mathbf{j}] = (1\,000 \text{ pulg/s}^2)\mathbf{k}
\end{aligned}$$




Al sustituir los valores que se obtienen para $\mathbf{a}_D$, $\mathbf{V}_{D/\mathcal{F}}$ y $\mathbf{a}_C$ en (2)

$$\boxed{\mathbf{a}_D = -(1\,300 \text{ pulg/s}^2)\mathbf{i} + (520 \text{ pulg/s}^2)\mathbf{j} + (1\,800 \text{ pulg/s}^2)\mathbf{k}}$$

**REVISAR y PENSAR:** Para este problema, las 800 pulg/s$^2$**k** en el término $\mathbf{a}_{D/\mathcal{F}}$, corresponden a una aceleración tangencial debido a $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$, mientras que las 1 600 pulg/s$^2$**i** corresponden a la aceleración normal hacia el centro. El término Coriolis refleja el hecho de que el término $\mathbf{a}_{D/\mathcal{F}}$ está cambiando de dirección debido a $\boldsymbol{\Omega}$. Al resolver los problemas tridimensionales como éste, el enfoque del álgebra vectorial es claramente superior dado que es muy difícil visualizar la dirección de los términos de aceleración.