FACULTAD DE INGENIERÍA

GEOMETRÍA DE MASAS

MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ing. Carlos Barrera - 2025

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

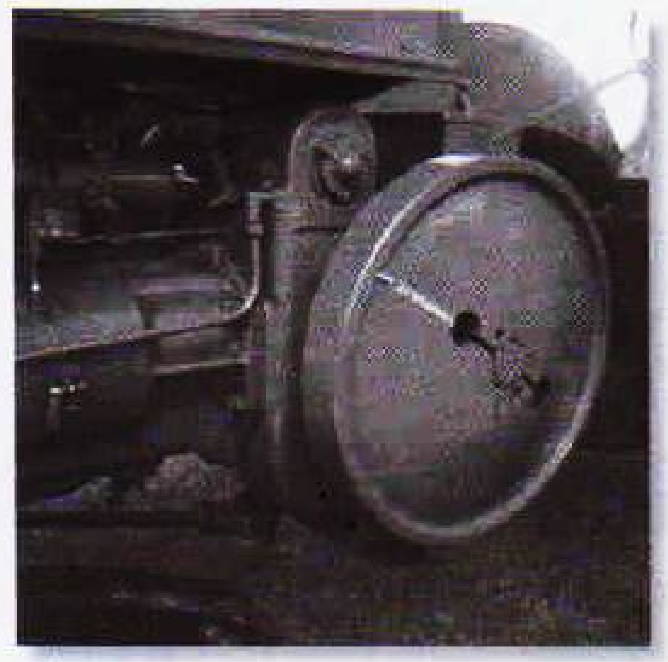
FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS

OBJETIVOS

1. **Determinar el Centro de Masa.**
2. **Analizar el Momento de Inercia de un cuerpo.**
3. **Definir Radio de Giro y Factor de Inercia.**

El volante del motor de este tractor tiene un gran momento de inercia con respecto a su eje de rotación. Una vez en movimiento, será difícil detenerlo, y esto a su vez impedirá que el motor se atasque permitiéndole mantener una potencia constante.

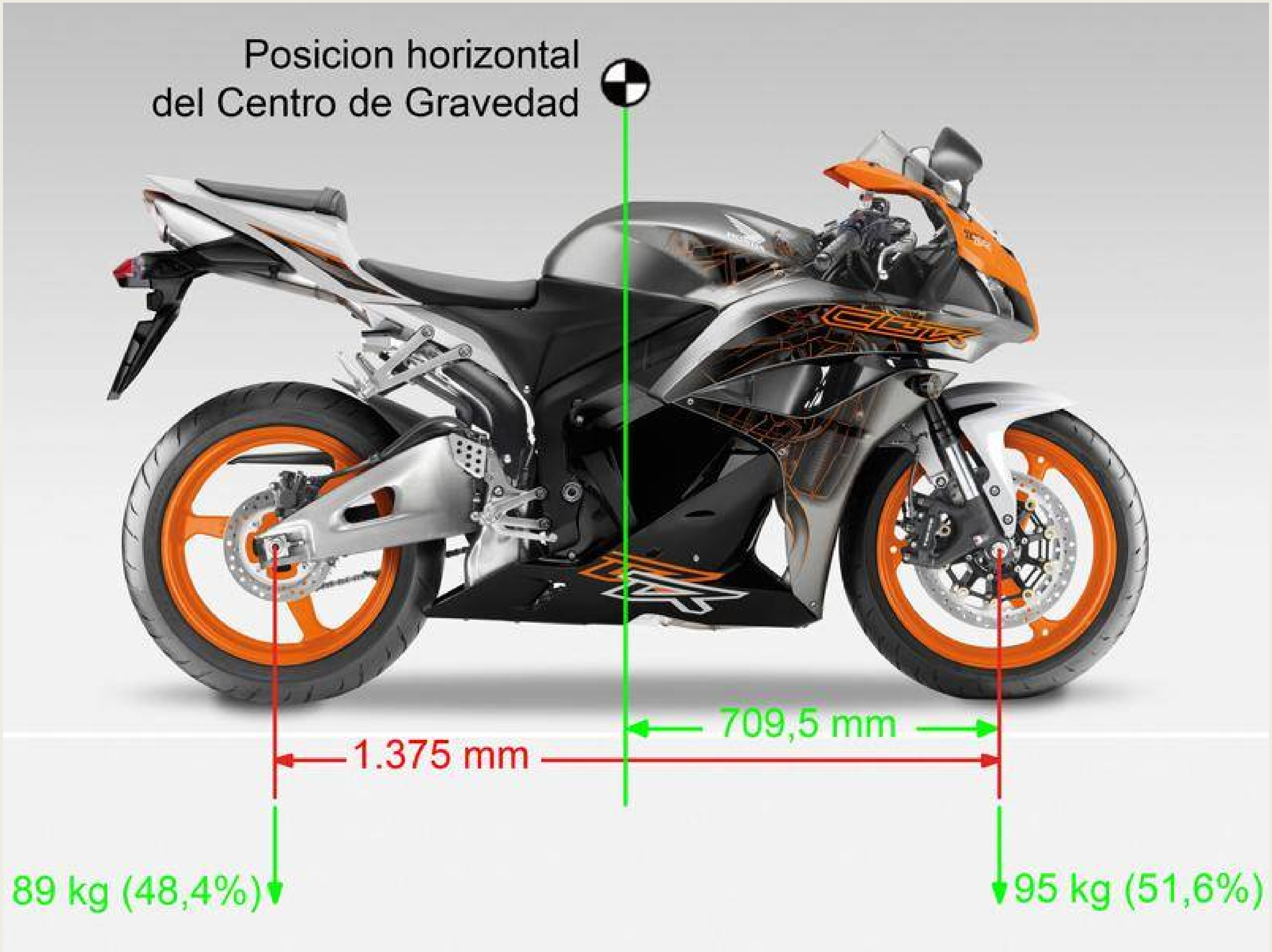


16:28

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS



16:28

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

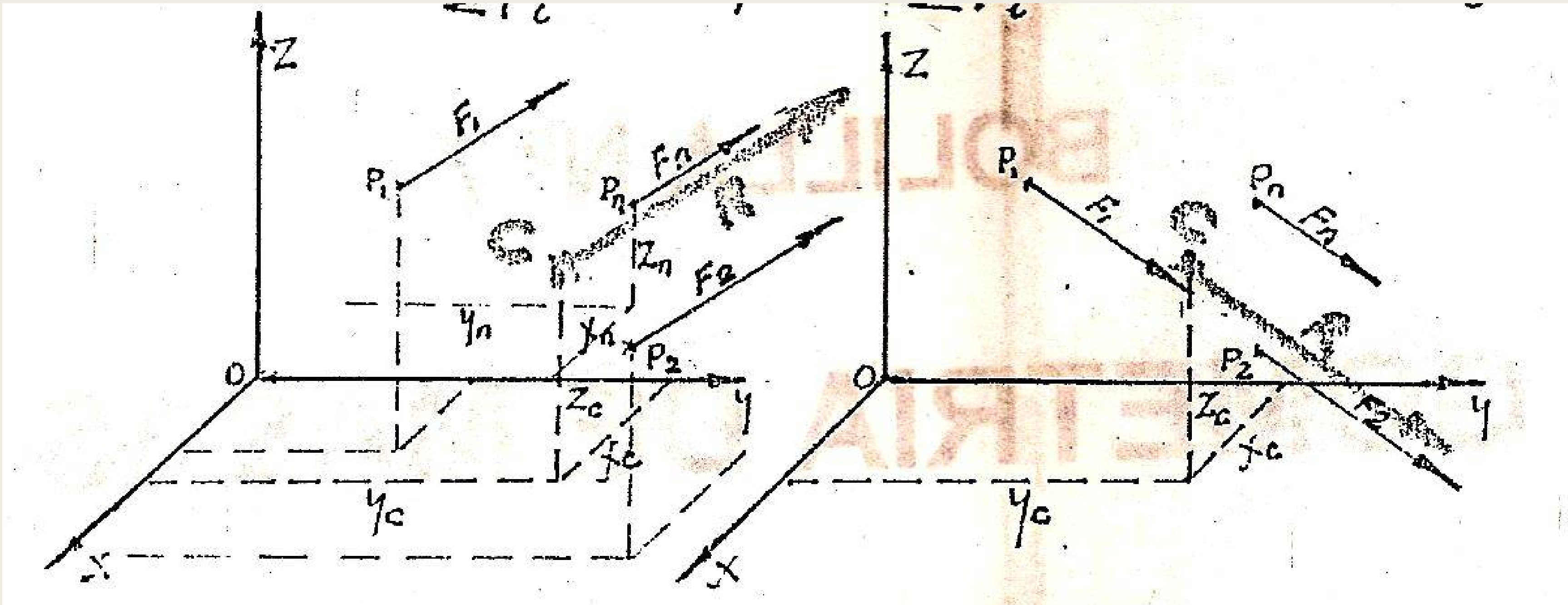
FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS

Centro de gravedad

Las coordenadas del centroide son:

$$x_c = \frac{\sum F_i * x_i}{\sum F_i} \qquad y_c = \frac{\sum F_i * y_i}{\sum F_i} \qquad z_c = \frac{\sum F_i * z_i}{\sum F_i}$$



16:28

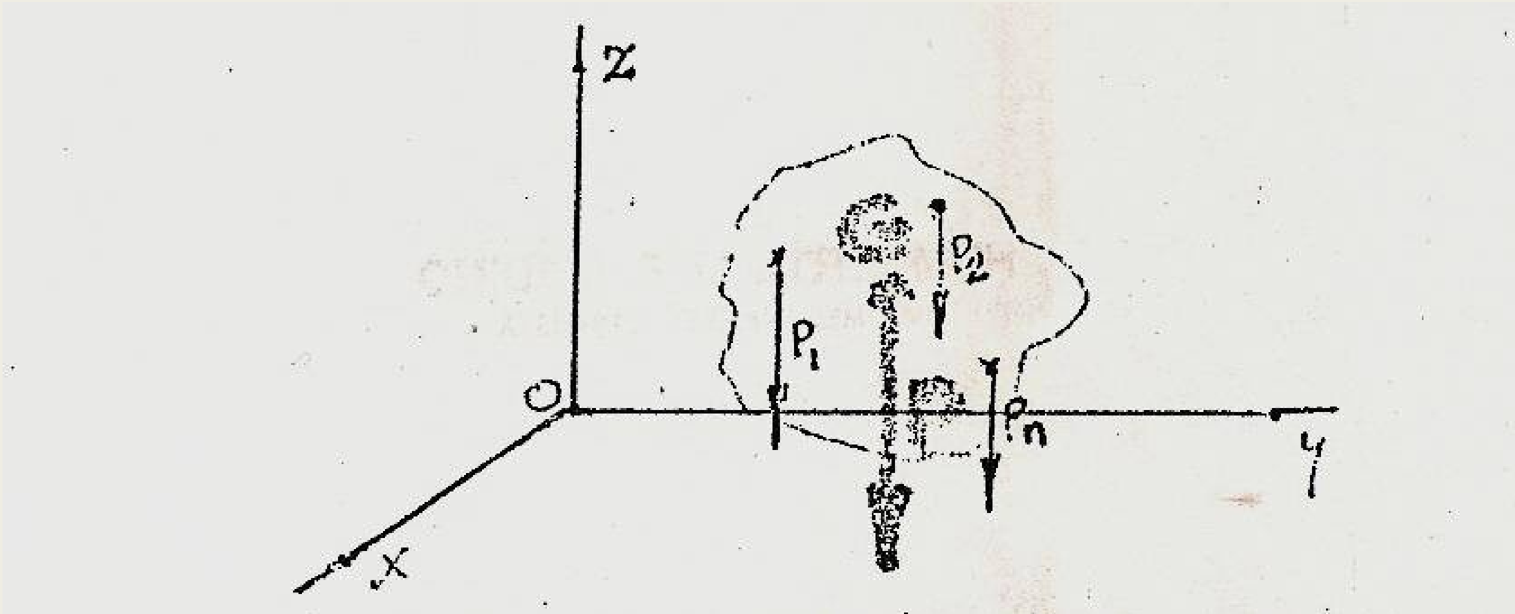
UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA-MECÁNICA Y MECANISMOS

Si las fuerzas consideradas son el peso de cada partícula de un sistema material, las expresiones anteriores quedan:

$$x_G = \frac{\sum_1^n P_i x_i}{\sum P_i} \qquad y_G = \frac{\sum_1^n P_i y_i}{\sum P_i} \qquad z_G = \frac{\sum_1^n P_i z_i}{\sum P_i}$$

x_G y_G z_G **Son las coordenadas del Centro de gravedad**



Ing. Carlos Barrera

Teniendo en cuenta que P= m*g se tiene

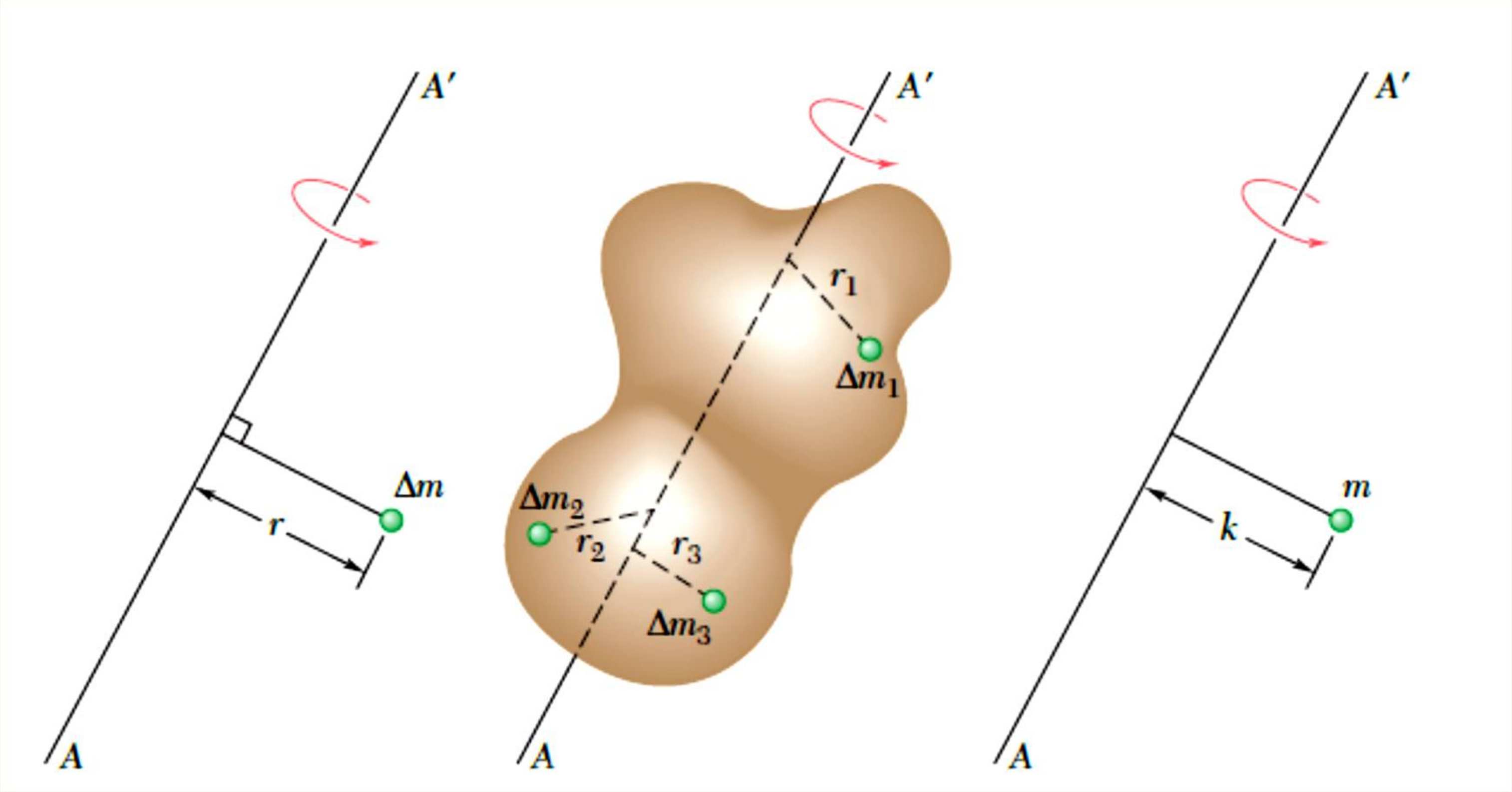
$$x_G = \frac{\sum_1^n m_i g x_i}{\sum m_i\, g} \qquad y_G = \frac{\sum_1^n m_i y_i}{\sum m_i} \qquad z_G = \frac{\sum_1^n m_i z_i}{\sum m_i}$$

Se obtienen las coordenadas del Centro de Masa que en este caso coincide con el CG.

Teniendo en cuenta que m= V*densidad se puede establecer:

$$x_G = \frac{\sum_1^n V_i x_i}{\sum V_i} \qquad y_G = \frac{\sum_1^n V_i y_i}{\sum V_i} \qquad z_G = \frac{\sum_1^n V_i z_i}{\sum V_i}$$

MOMENTO DE INERCIA DE MASAS



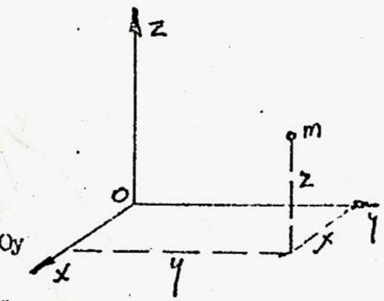
$$I = \int r^2 * dm$$

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA-MECÁNICA Y MECANISMOS

Momentos de segundo Orden



Momentos Planares $J_{xOy} = m\,z^2$

$J_{xOz} = m\,y^2$

$J_{yOz} = m\,x^2$

Momentos Axiales

$$J_x = m\,(y^2 + z^2) = J_{xOz} + J_{xOy}$$

$$J_y = m\,(x^2 + z^2) = J_{yOz} + J_{xOy}$$

$$J_z = m\,(x^2 + y^2) = J_{yOz} + J_{xOy}$$

Momento Polar (respecto al origen) $J_o = m\,(x^2 + y^2 + z^2) = J_{xOy} + J_{xOz} + J_{yOz}$

Tambien se verifican las siguientes igualdades:

$$J_o = J_x + J_{yOz} = J_y + J_{xOz} = J_z + J_{xOy} \quad y \quad J_o = \frac{J_x + J_y + J_z}{2}$$

Si se trata de un sistema de puntos materiales habría que hacer la sumatoria de los productos de las masas por los cuadrados de las distancias

$$J_x = \sum_1^n m_i\, d_{x_i}^2 = \sum_1^n m_i\,(y_i^2 + z_i^2)$$

y si el sistema de puntos materiales forma un sólido contínuo, llamando ρ a la densidad específica de la masa de cada punto

$$J_x = \iiint \rho\,(y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$$

Si el cuerpo es de densidad homogenea ρ puede sacarse fuera del signo integral.-

Todos los momentos de inercia son expresiones esencialmente positivas.-

16:28

Ing. Carlos Barrera

Producto de inercia

Es el producto de la masa de un punto material por la distancia a dos planos.

$$J_{xy} = m * x * y$$

Si es un sistema de puntos materiales

$$J_{xy} = \sum_{1}^{n} m_i * x_i * y_i$$

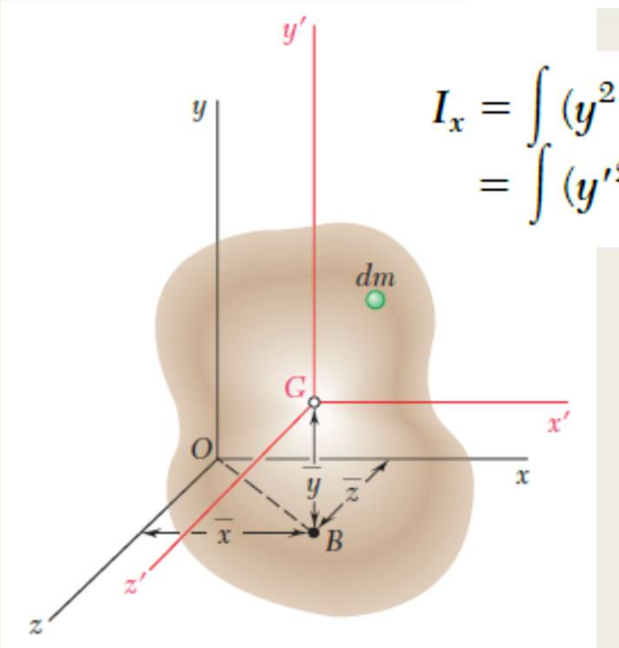
Y si se trata de un sólido continuo

$$J_{xy} = \int x * y * dm$$

Los productos de inercia pueden ser positivos, negativos o nulos

Teorema de Steiner o de ejes paralelos

$$x = x' + \bar{x} \qquad y = y' + \bar{y} \qquad z = z' + \bar{z}$$



$$I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm = \int [(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2]\, dm$$
$$= \int (y'^2 + z'^2)\, dm + 2\bar{y} \int y'\, dm + 2\bar{z} \int z'\, dm + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \int dm$$

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)$$

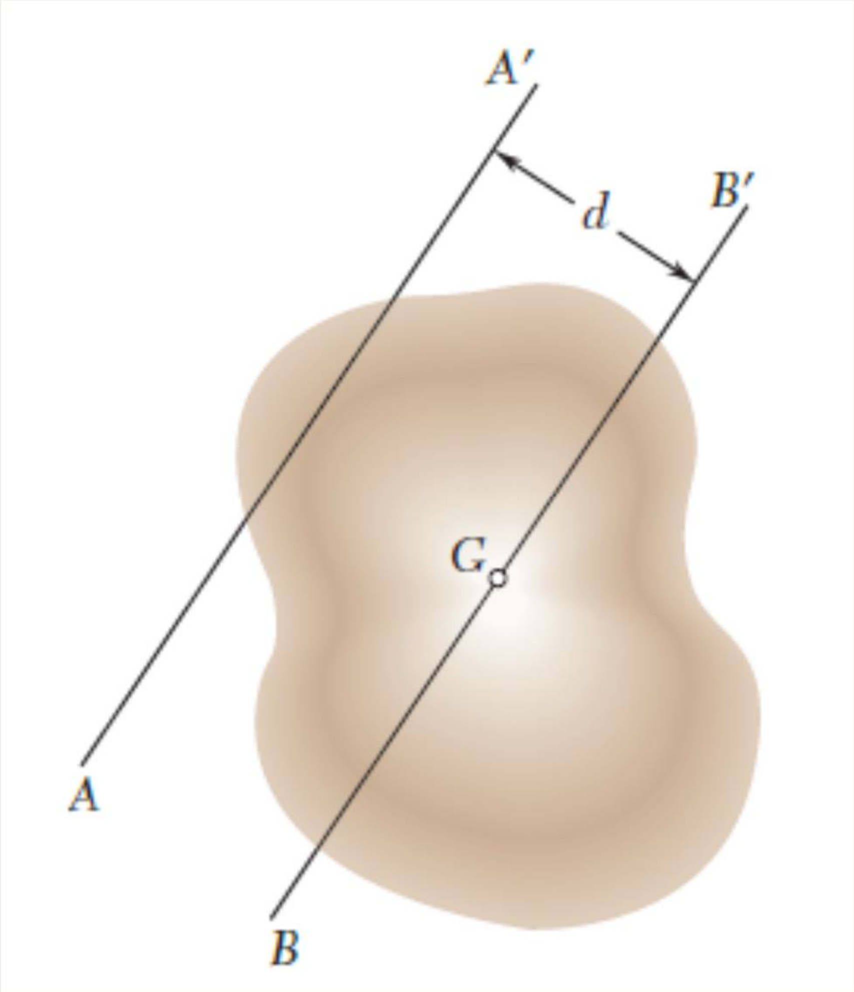
De igual manera

$$I_y = \bar{I}_{y'} + m(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) \qquad I_z = \bar{I}_{z'} + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$$

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS

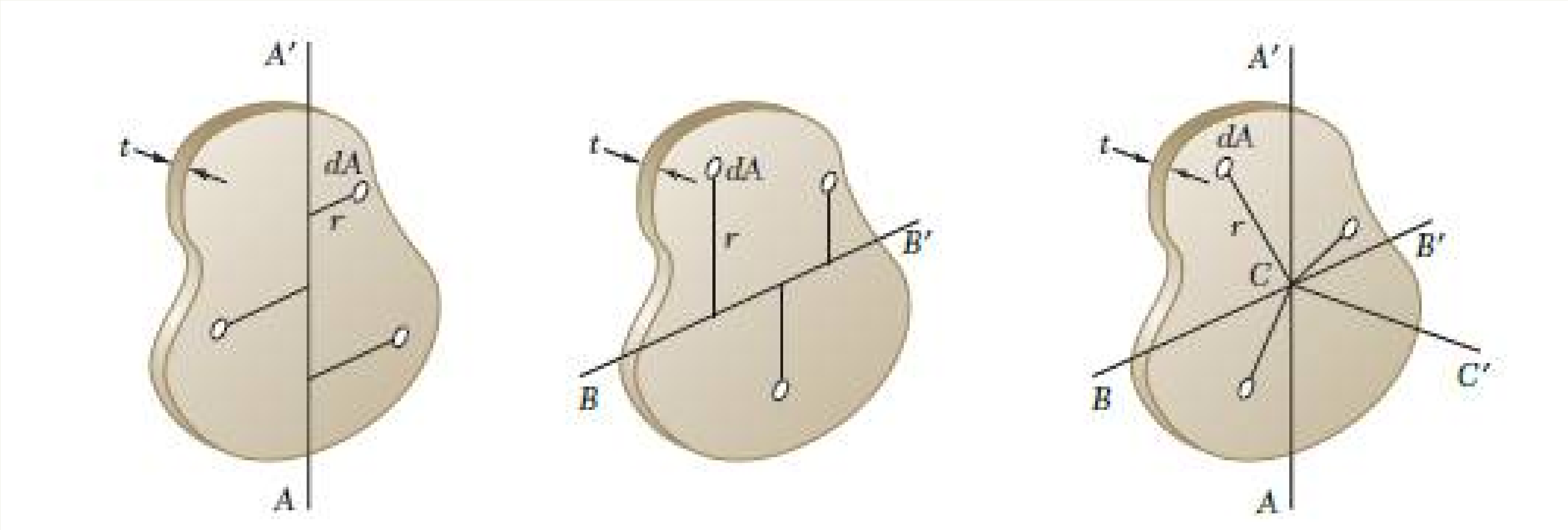


Se observa que la suma representa el cuadrado de la distancia OB entre los ejes y e y´

$$I = \bar{I} + md^2$$

16:28

Momentos de Inercia de Placas Delgadas o Chapas



$$I_{AA',\text{ masa}} = \int r^2\, dm$$

Puesto que $dm = \rho t\, dA$, se escribe

$$I_{AA',\text{ masa}} = \rho t \int r^2\, dA$$

$$I_{AA',\text{ masa}} = \rho t I_{AA',\text{ área}}$$

$$I_{BB',\text{ masa}} = \rho t I_{BB',\text{ área}}$$

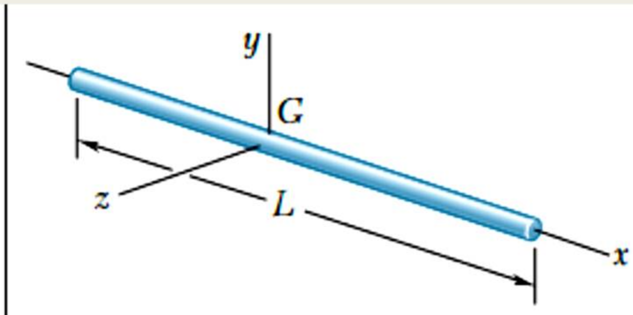
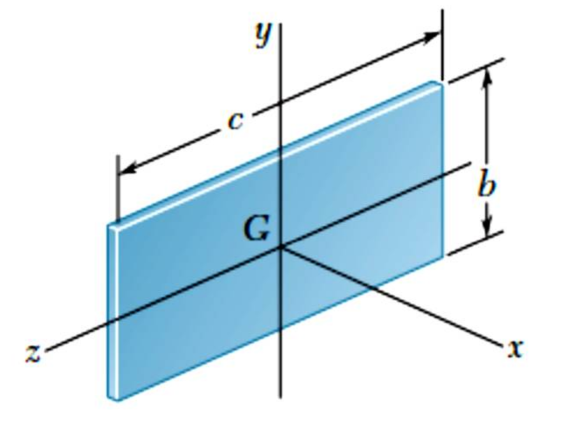
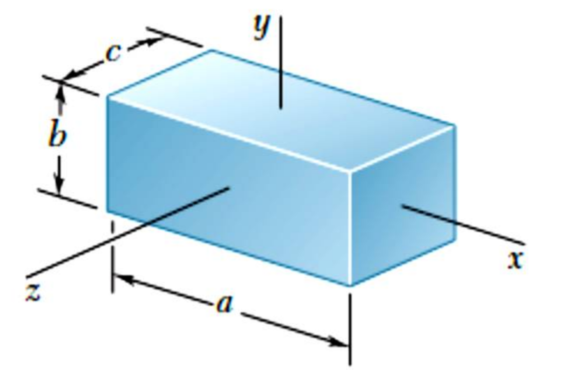
$$I_{CC',\text{ masa}} = \rho t J_{C,\text{ área}}$$

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS

Momentos de Inercia de cuerpos compuestos

Barra delgada $I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$	
Placa rectangular delgada $I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mc^2$ $I_z = \frac{1}{12}mb^2$	
Prisma rectangular $I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	

16:28

Ing. Carlos Barrera

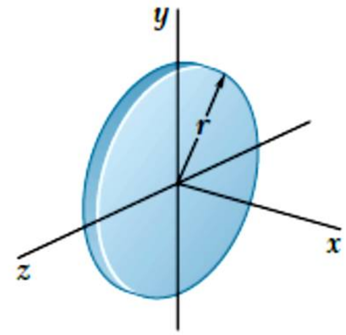
UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS

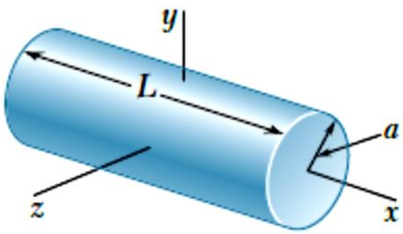
Disco delgado

$$I_x = \tfrac{1}{2}mr^2$$
$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}mr^2$$



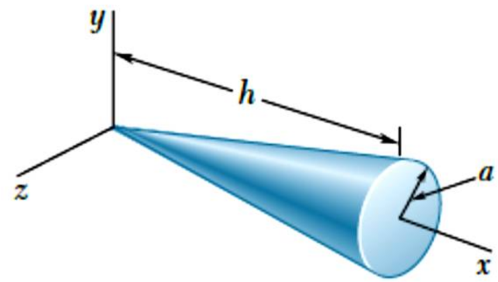
Cilindro circular

$$I_x = \tfrac{1}{2}ma^2$$
$$I_y = I_z = \tfrac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$$



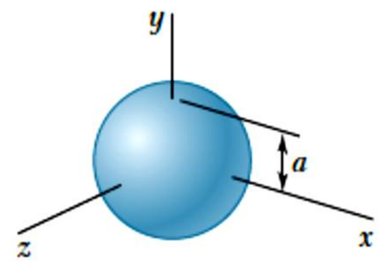
Cono circular

$$I_x = \tfrac{3}{10}ma^2$$
$$I_y = I_z = \tfrac{3}{5}m(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2)$$



Esfera

$$I_x = I_y = I_z = \tfrac{2}{5}ma^2$$



16:28

Ing. Carlos Barrera

Radio de giro o radio de inercia

$$I = k^2 m \qquad \text{o} \qquad k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

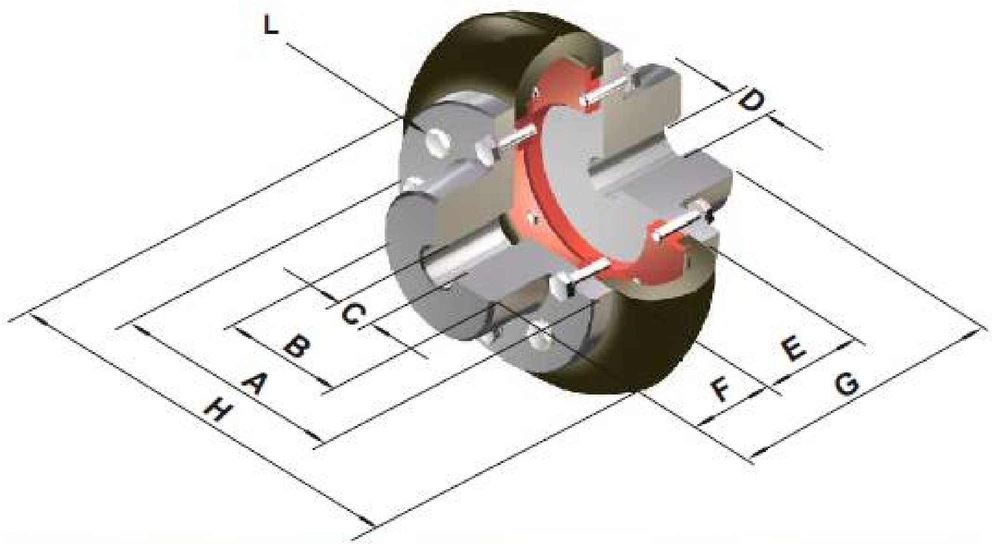
El radio de giro representa la distancia a la cual la masa completa del cuerpo debe concentrarse si el momento de inercia con respecto al eje va a permanecer sin cambio. La masa m reaccionará de igual manera a una rotación o giro alrededor del eje ya que conserve la forma original o si se concentra.

Factor de inercia

En la práctica cuando se acoplan elementos rotantes, se suele utilizar en lugar de los momentos de inercia con respecto al eje, el denominado "Factor de Inercia" "Momento de Impulsión" o "GD^2" Producto del peso del cuerpo rotante por el cuadrado de su diámetro de giro

Este valor se relaciona con el momento de inercia de la siguiente manera

$$GD^2 = m\ g\ (2i)^2 = 4\ m\ g\ i^2 = 4\ g\ J = 4\ 9{,}8\ J = 39{,}2\ J$$



A - Ø Brida Cubo
B - Ø Cuello Cubo
C - Ø Máx. aleasaje
D - Ø Agujero piloto
E - Ancho centro
F - Ancho cubo
G - Long. total
H - Ø Centro
L - Tipo tornillo

Tabla III

ACOPLE CON CUBO NORMAL													BULC	
MODELO	Torq. Nom. Nm	Angulo Torsión (°)	(1) Peso (Kg.)	Gd2 (Kg m2)	A	B	C Máx	D Min	E	F	G	H	Nr.	L-
A-20	38	2°	1.05	0.0017	74	36	20	10	30	25	80	95	12	1/4
A-25	56	5°	1.09	0.0018	74	36	23	10	30	25	80	95	12	1/4
A-30	82	2°	2.40	0.0094	96	49	30	10	40	35	110	127	16	5/1

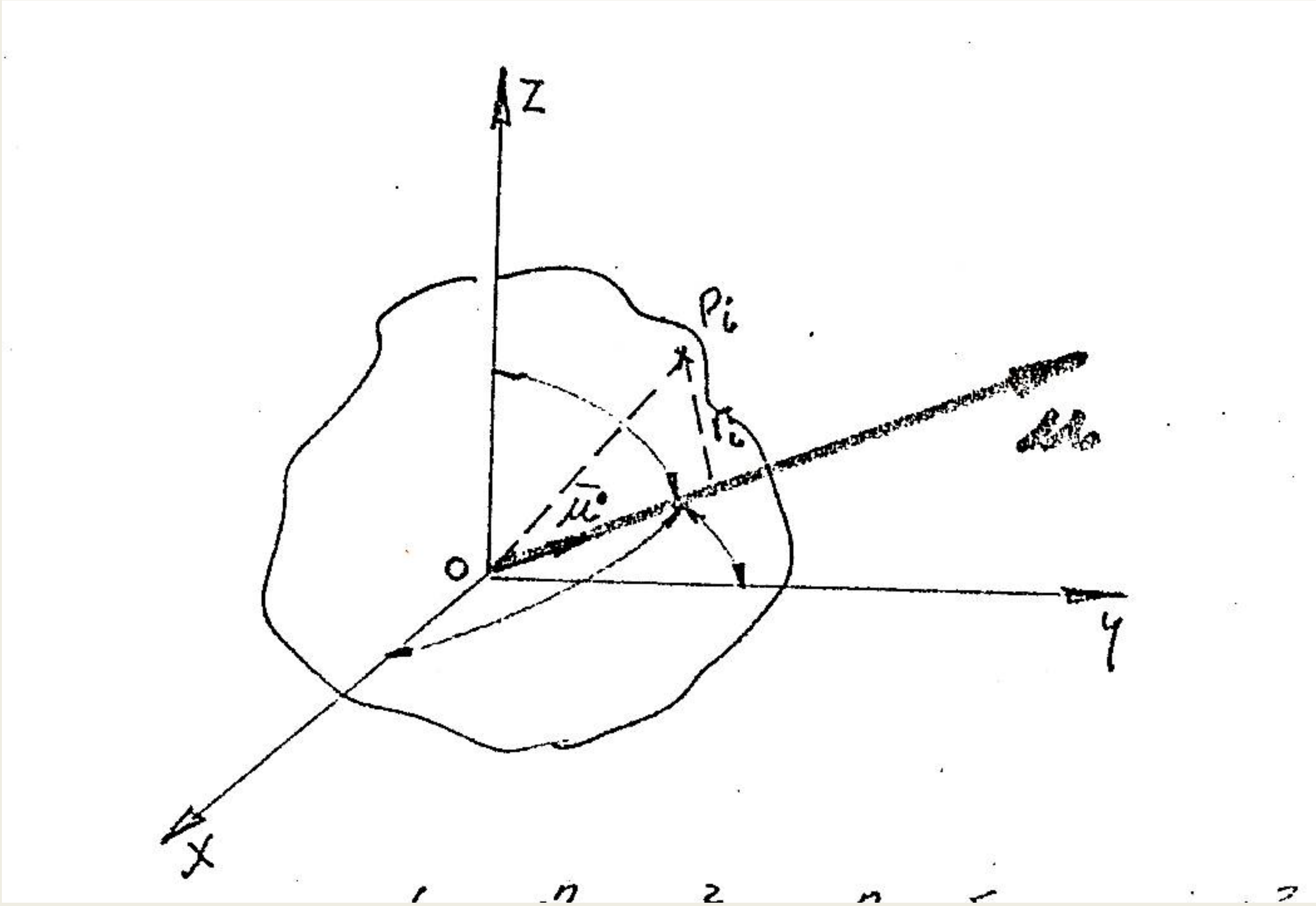
UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS

ROTACION DE EJES

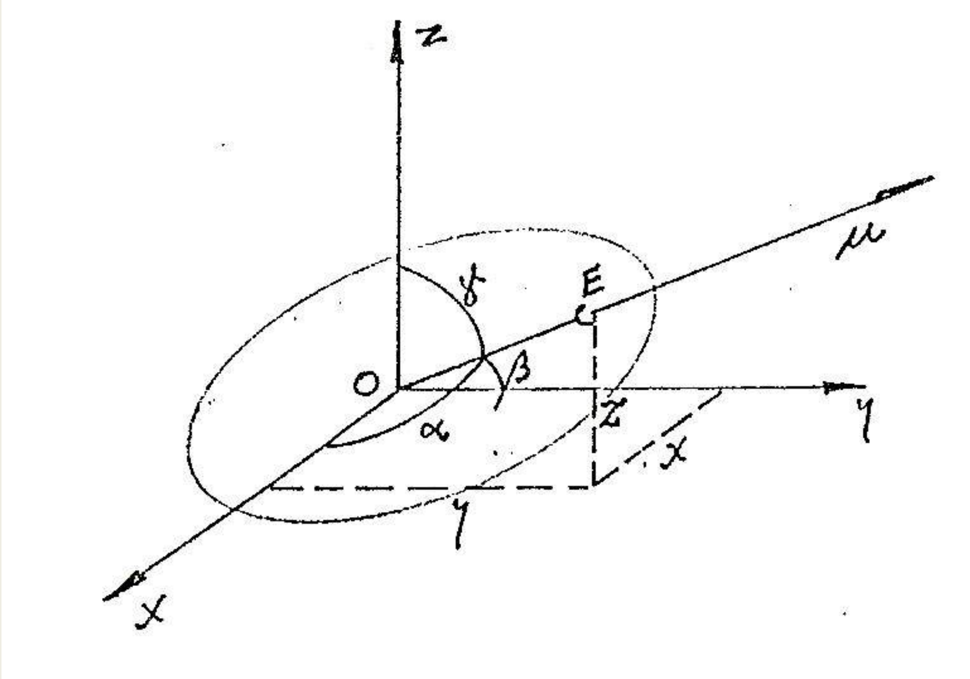
$$J_u = \alpha^2 J_x + \beta^2 J_y + \gamma^2 J_z - 2\alpha\beta J_{xy} - 2\alpha\gamma J_{xz} - 2\beta\gamma J_{yz}$$

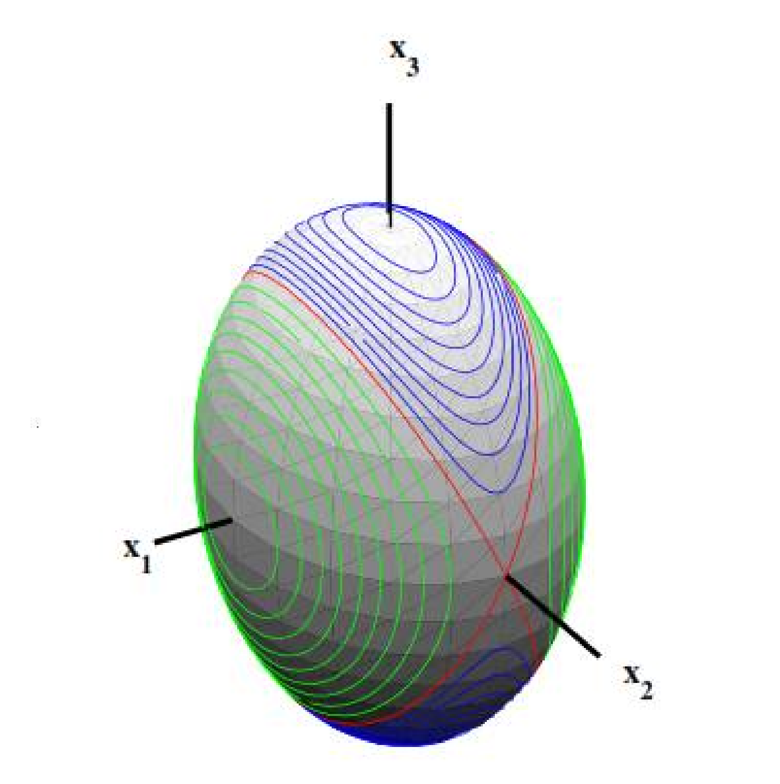


Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS

Elipsoide de Inercia

Si al eje u pasante por "O" se le dan diferentes direcciones y que un punto E se ha marcado sobre cada eje a una distancia OE cuyo módulo vale $\frac{1}{\sqrt{J_U}}$ **el lugar geométrico de los puntos E forma una superficie**





UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS

La ecuación que se obtiene es la ecuación de una superficie cuadrática. La obtenida es la ecuación de un elipsoide , que se denomina ELIPSOIDE DE INERCIA.

dividiendo ambos miembros por J_u tenemos

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2 J_{xy} x y - 2 J_{xz} x z - 2 J_{yz} y z = 1$$

Esta elipsoide define el momento de inercia del cuerpo con respecto a cualquier eje que pasa por O

Si se rotan los ejes de tal manera que sean los ejes principales. La ecuación del elipsoide con respecto a estos ejes es:

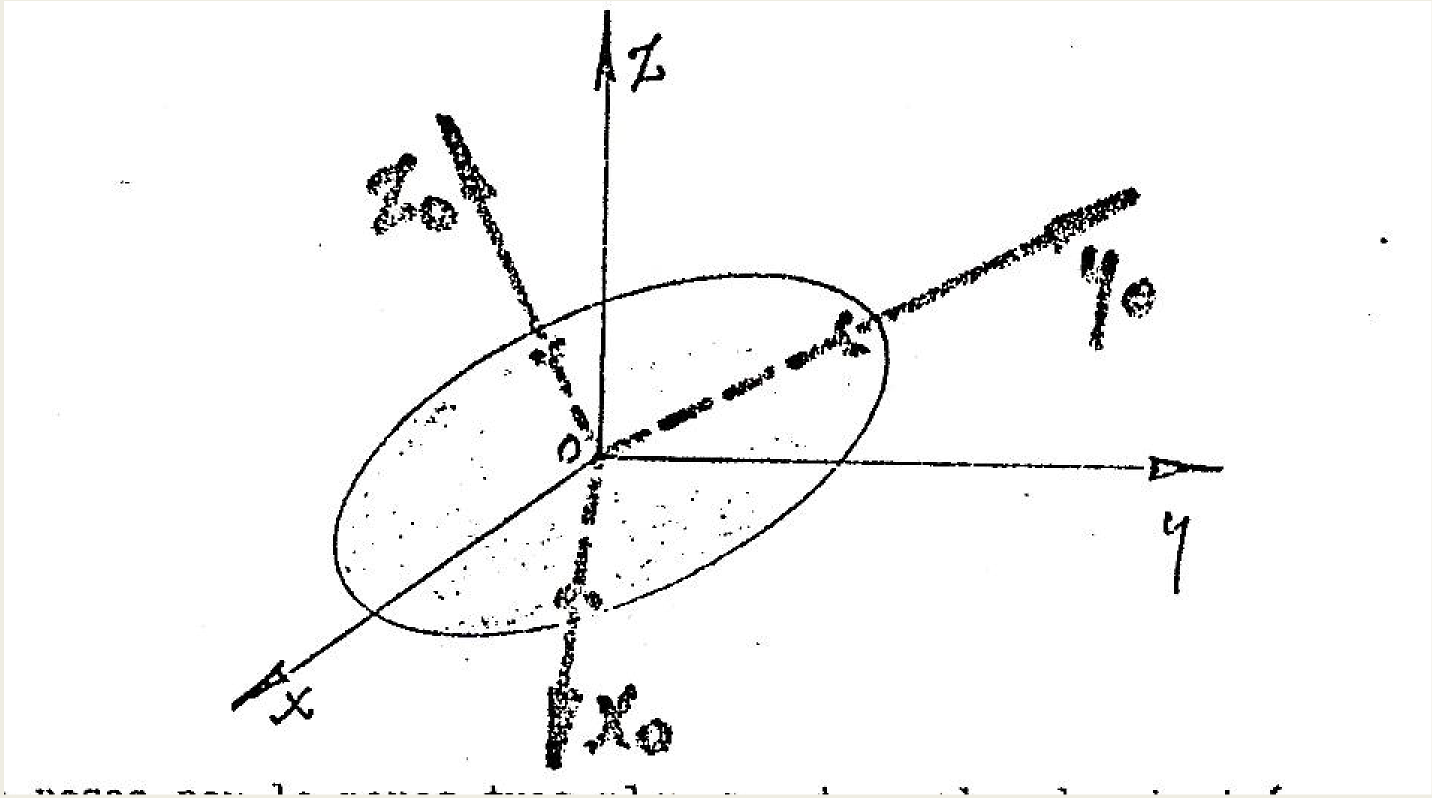
$$J_{x_0} x^2 + J_{y_0} y^2 + J_{z_0} z^2 = 1$$

16:28

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS



El elipsoide tiene 3 planos ortogonales de simetría que reciben el nombre de PLANOS PRINCIPALES DE INERCIA, la intersección de dichos planos dan los 3 EJES PRINCIPALES DE INERCIA.

Si el elipsoide está referido al baricentro se denomina ELIPSOIDE CENTRAL DE INERCIA

16:28

Ing. Carlos Barrera

- Del mismo modo que un vector puede representarse gráficamente en un punto por medio de un segmento lineal con una dirección determinada, un tensor de segundo orden puede representarse en un punto a través de una superficie de segundo orden, esta es un elipsoide.

- Considerando el elipsoide de inercia en un punto, cuanto mayor sea su semidiámetro en una dirección dada, menor será el correspondiente momento de inercia en esa dirección del sistema. El eje mayor del elipsoide corresponde a la dirección de menor momento de inercia, y el eje menor a la dirección de mayor momento de inercia.

- Estas dos son las direcciones principales, y la tercera será la normal a las dos anteriores. Si dos de los momentos de inercia principales son iguales, el elipsoide será de revolución en torno al eje singular, y si los tres son iguales, el elipsoide adoptará una forma esférica.

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS

BIBLIOGRAFIA

- Mecánica Vectorial para Ingenieros — Beer Johnston
- Dinámica — Boresi- Schmidt

16:28