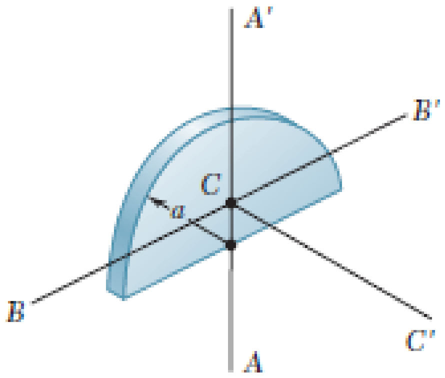
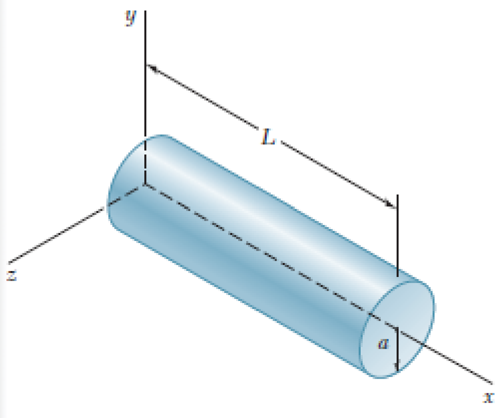
FACULTAD DE INGENIERÍA

GEOMETRÍA DE MASAS

MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ing. Carlos Barrera

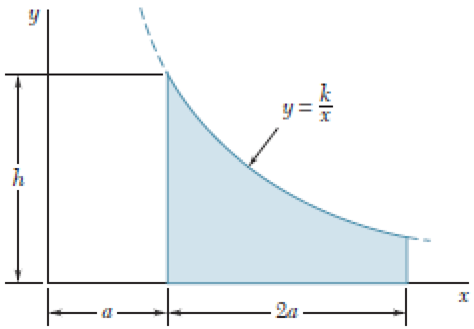


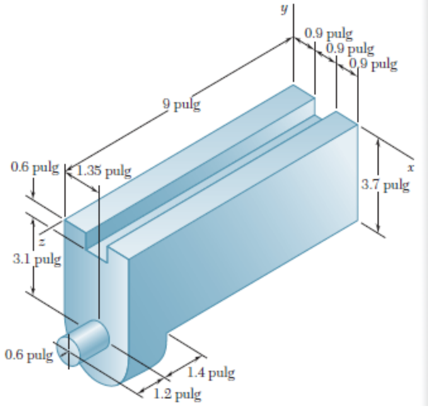


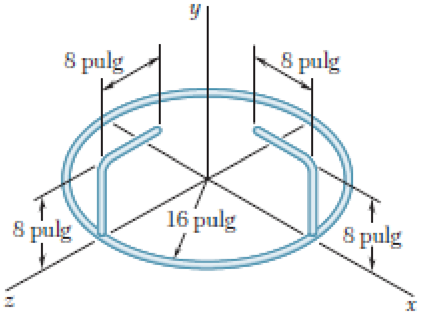
UNIDAD 3
GEOMETRÍA DE MASAS

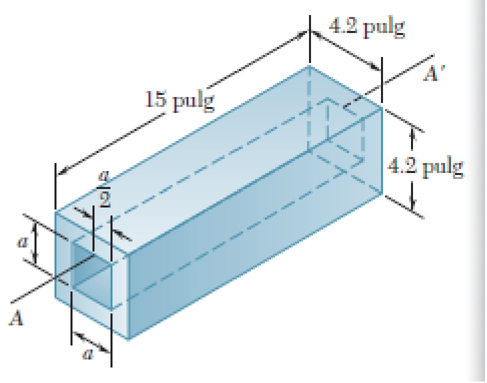
Ing. Carlos Barrera

Ing. Cristián Aguilera










Momento de Inercia
es la analogia rotacional de la
Masa
que cuando se multiplica por la
Aceleración Angular
se iguala al
Par
neto, en la
2ª Ley de Newton para la Rotación
que es un ejemplo de varios
Paralelismos Rotación-Lineal
los cuales son parte de la descripción del
Movimiento Rotacional
es un factor en la
Energía Cinética Rotacional
y el
Momento Angular
y el principio fundamental de la
Conservación del Momento Angular
para una masa puntual es
$I = mr^2$
y es responsable de la
Distribución de Masa
que conduce al
Momento de Inercia de Objetos Comunes
asistido por el
Teorema del Eje Paralelo
asistido por el
Teorema del Eje Perpendicular
tales como
Varilla
Aro
Cilindro
Esfera
que pueden ser
Combinados

1. Definición de Momentos de Inercia para Áreas
2. Teorema del eje-paralelo
3. Radio de giro de un área
4. Momentos of Inercia para Áreas compuestas
5. Producto de Inercia para un Área
6. Momento de Inercia para un Área
7. Círculo de Mohr para Momentos de Inercia
8. Momentos de inercia de una distribución de masas

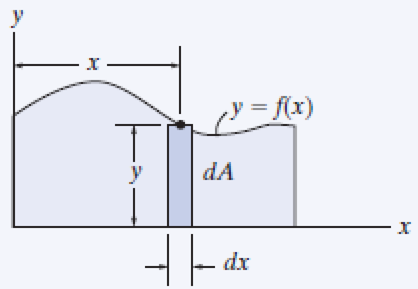
Momento de inercia de área

El *momento de inercia de un área* representa el segundo momento del área con respecto a un eje. Se usa con frecuencia en fórmulas relacionadas con la resistencia y la estabilidad de elementos estructurales o elementos mecánicos.

$$I_x = \int_A y^2\, dA$$

Si la forma del área es irregular pero puede describirse de manera matemática, entonces debe seleccionarse un elemento diferencial e integrarse sobre toda el área para determinar el momento de inercia.

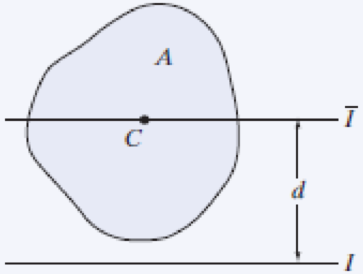
$$I_y = \int_A x^2\, dA$$



Teorema de los ejes paralelos

Si se conoce el momento de inercia para un área con respecto a un eje centroidal, entonces su momento de inercia con respecto a un eje paralelo puede determinarse con el teorema de los ejes paralelos.

$$I = \bar{I} + Ad^2$$



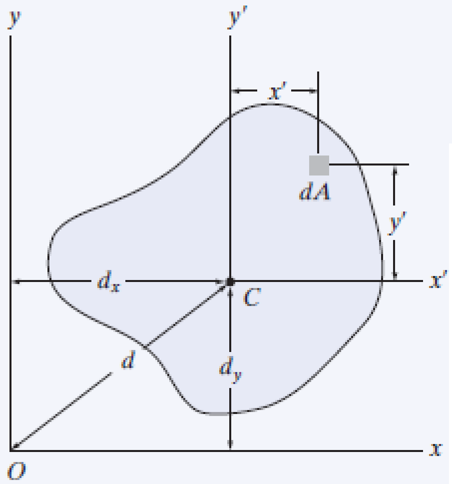
Producto de inercia

El *producto de inercia* de un área se usa en fórmulas para determinar la orientación de un eje con respecto al cual el momento de inercia del área es un máximo o un mínimo.

$$I_{xy} = \int_A xy\, dA$$

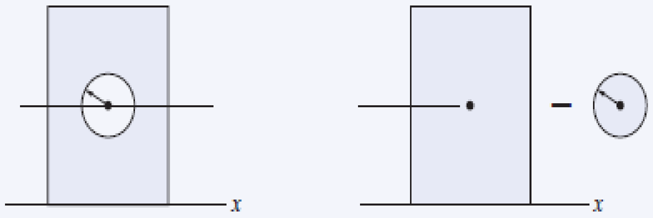
Si se conoce el producto de inercia para un área con respecto a sus ejes centroidales x', y', entonces su valor se puede determinar con respecto a cualesquier ejes x, y mediante el teorema de los ejes paralelos para el producto de inercia.

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + Ad_xd_y$$



Área compuesta

Si un área es una composición de formas comunes, como las que pueden encontrarse en la cubierta posterior interna de este libro, entonces su momento de inercia es igual a la suma algebraica de los momentos de inercia de cada una de sus partes.



Momentos principales de inercia

Siempre que se conozcan los momentos de inercia I_x e I_y, y el producto de inercia I_{xy}, entonces pueden usarse las fórmulas del círculo de Mohr para determinar los *momentos de inercia principales* máximo y mínimo para el área, así como para encontrar la orientación de los ejes de inercia principales.

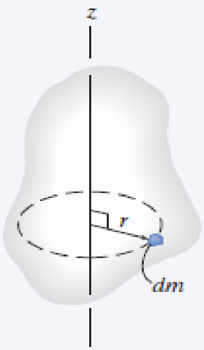
$$I_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2}$$

Momento de inercia de masa

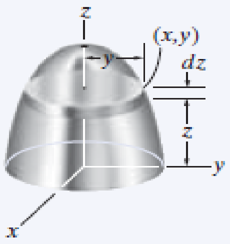
El *momento de inercia de masa* es la propiedad de un cuerpo que mide su resistencia a un cambio en su rotación. Este momento se define como el “segundo momento” de los elementos de masa del cuerpo con respecto a un eje.

$$I = \int_m r^2\, dm$$



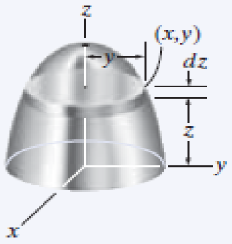
Para cuerpos homogéneos con simetría axial, el momento de inercia de masa se puede determinar por integración simple por medio de elementos de disco o de cascarón.

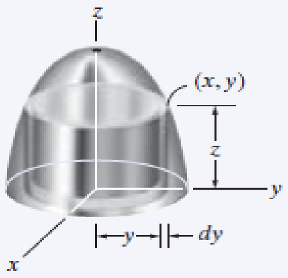
$$I = \rho \int_V r^2 dV$$



Para cuerpos homogéneos con simetría axial, el momento de inercia de masa se puede determinar por integración simple por medio de elementos de disco o de cascarón.

$$I = \rho \int_V r^2 dV$$





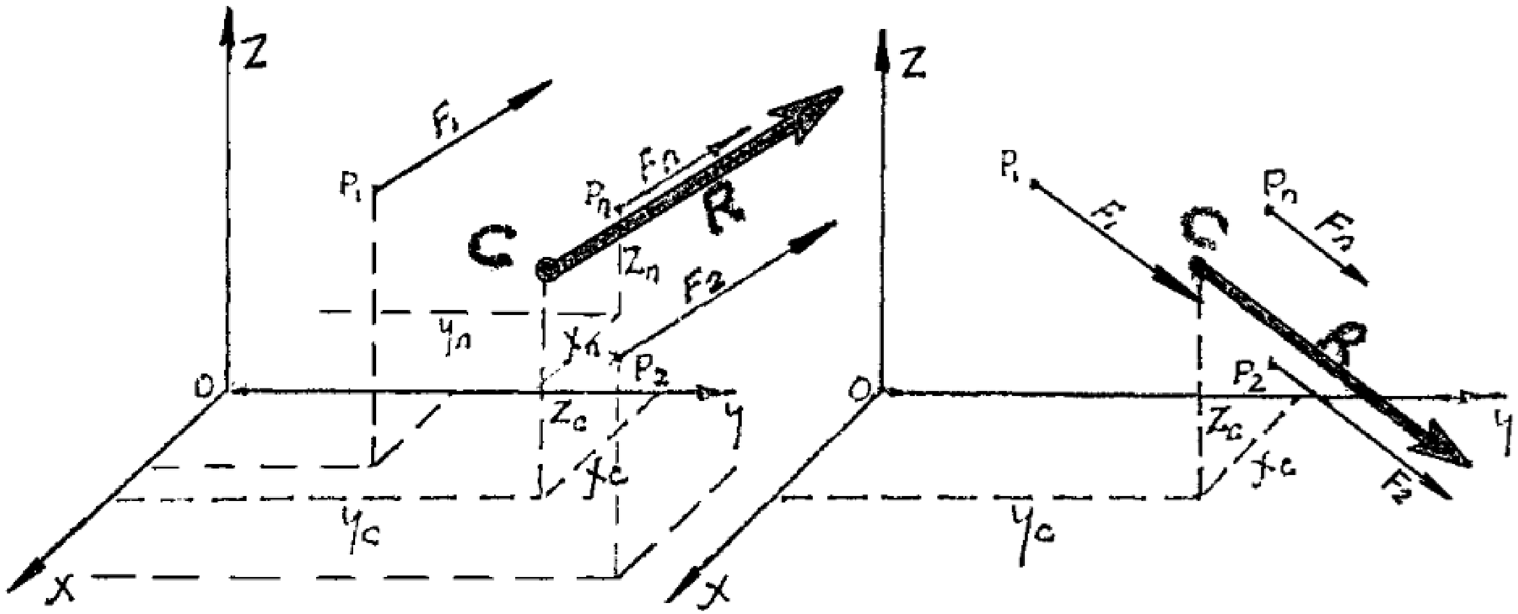
El momento de inercia de masa de un cuerpo compuesto se determina al usar valores tabulares de sus formas compuestas, que pueden encontrarse en la cubierta posterior interna del libro, junto con el teorema de los ejes paralelos.

$$I = I_G + md^2$$

CENTRO DE GRAVEDAD

- Cuando en Estática se componía un ***<u>sistema de fuerzas paralelas aplicadas</u>***, se obtenía una resultante única aplicada en un punto llamado **CENTROIDE**, punto que no cambiaba si se giraban las fuerzas tomando otra dirección, pero manteniéndose siempre paralelas. Las coordenadas del **CENTROIDE** podían establecerse así:

$$x_c = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{\sum F_i} \; ; \; y_c = \frac{\sum F_i \cdot y_i}{\sum F_i} \; ; \; z_c = \frac{\sum F_i \cdot z_i}{\sum F_i}$$

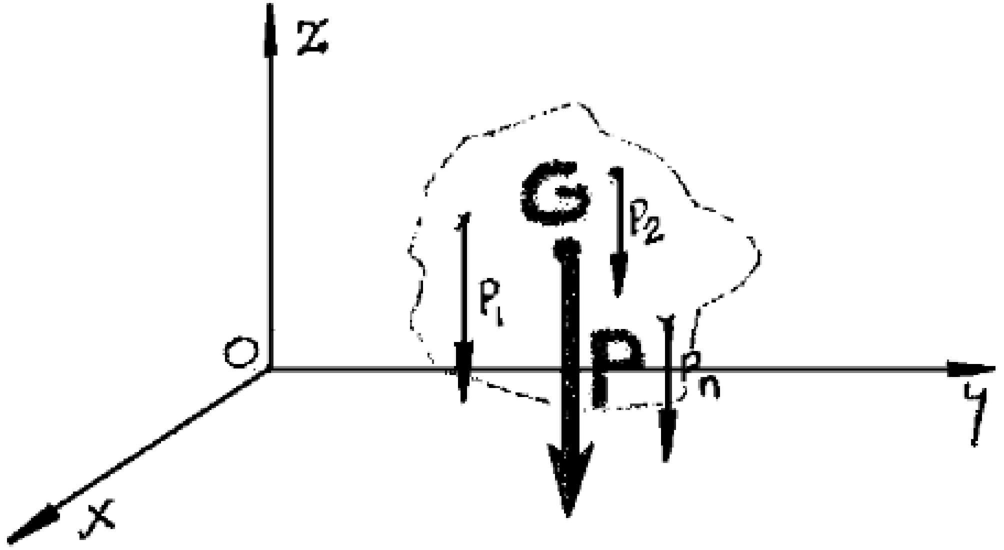


CENTRO DE GRAVEDAD

- En particular si las fuerzas paralelas consideradas son ***el peso de cada partícula de un sistema material***, debido a la gravedad, las expresiones anteriores toman la forma

$$x_c = \frac{\sum_1^n P_i \cdot x_i}{\sum_1^n P_i};\ y_c = \frac{\sum_1^n P_i \cdot y_i}{\sum_1^n P_i};\ z_c = \frac{\sum_1^n P_i \cdot z_i}{\sum_1^n P_i}$$

Donde $x_G; y_G; z_G$ que serían las coordenadas del Centroide, son ahora las coordenadas del CENTRO DE GRAVEDAD (CG) del sistema considerado.



CENTRO DE GRAVEDAD

- Teniendo en cuenta que P=m.g remplazando se tiene:

$$x_G = \frac{\sum_1^n m_i \cdot g \cdot x_i}{\sum_1^n m_i \cdot g} = \frac{g \cdot \sum_1^n m_i \cdot x_i}{g \cdot \sum_1^n m_i} = \frac{\sum_1^n m_i \cdot x_i}{\sum_1^n m_i}$$

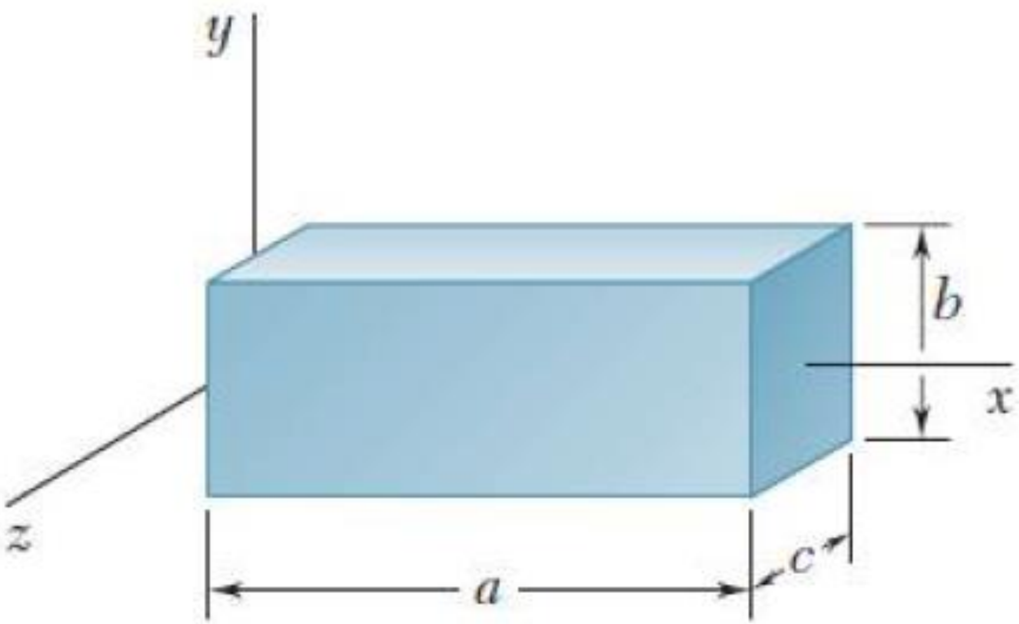
$$y_G = \frac{\sum_1^n m_i \cdot y_i}{\sum_1^n m_i} \; ; \; z_G = \frac{\sum_1^n m_i \cdot z_i}{\sum_1^n m_i}$$

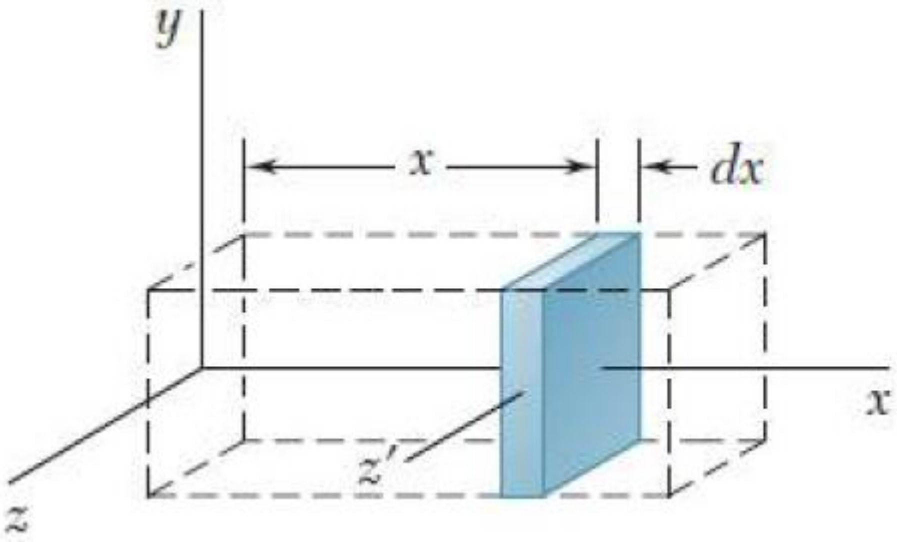
- Por último, teniendo en cuenta que ***m=V.ρ (volumen por densidad)*** y considerando el caso particular de ρ constante, se puede establecer:

$$x_G = \frac{\sum_1^n V_i \cdot x_i}{\sum_1^n V_i} \; ; \; y_c = \frac{\sum_1^n V_i \cdot y_i}{\sum_1^n V_i} \; ; \; z_c = \frac{\sum_1^n V_i \cdot z_i}{\sum_1^n V_i}$$

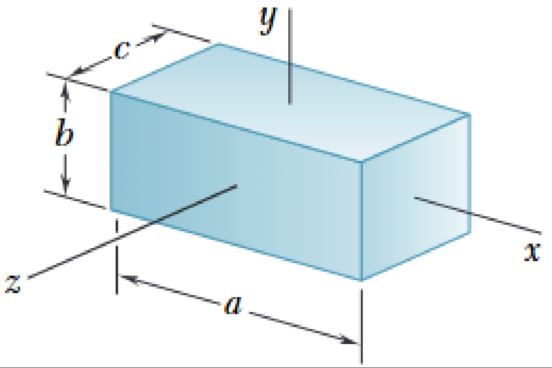
Ejercicio N° 1

Calcular el momento de inercia con respecto al eje z en el prisma rectangular homogéneo.



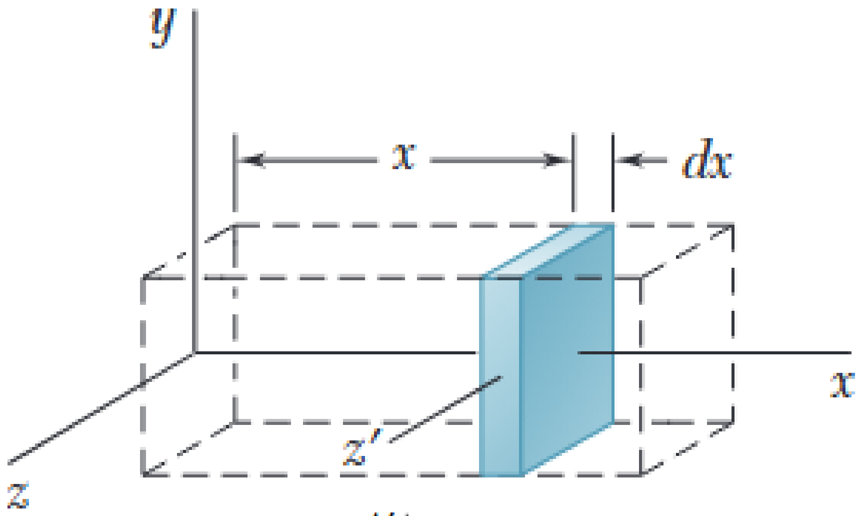


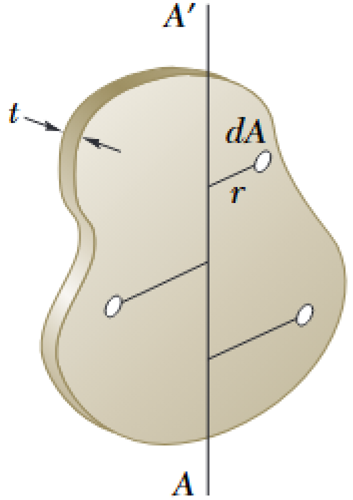
$$x_G = \frac{\sum_1^n V_i \cdot x_i}{\sum_1^n V_i}$$

Prisma rectangular		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$

Conocimientos previos

- Se elige como elemento diferencial de masa la placa delgada que se muestra; de tal modo $dm = \rho bc\, dx$





MOMENTOS DE INERCIA DE PLACAS DELGADAS

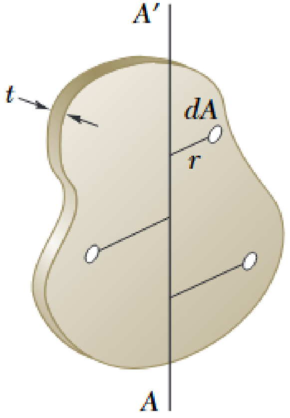
Consideramos una placa delgada de espesor uniforme t, hecha de un material homogéneo de densidad (densidad masa por unidad de volumen). El momento de inercia de masa de la placa con respecto a un eje AA contenido en el plano de la placa es

$$I_{AA',\ \text{masa}} = \int r^2\, dm$$

Puesto que dm= ρ t dA, se escribe

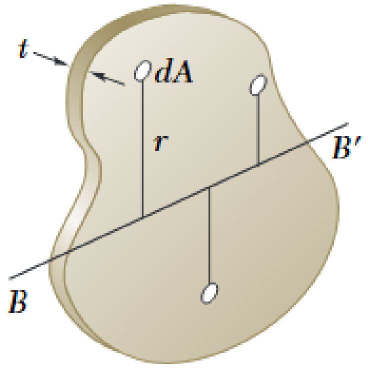
$$I_{AA',\ \text{masa}} = \rho t \int r^2\, dA$$

Conocimientos previos



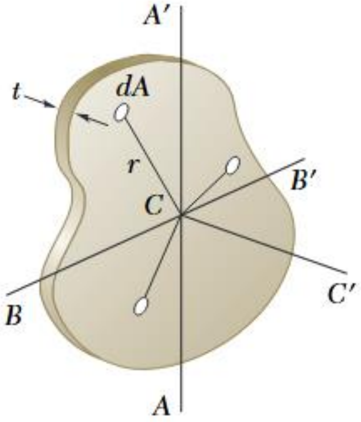
Pero r representa la distancia del elemento de área dA al eje AA´; la integral por lo tanto es igual al momento de inercia del área de la placa con respecto a AA´. Se tiene

$$\boxed{I_{AA',\ \text{masa}} = \rho t I_{AA',\ \text{área}}} \quad \boxed{I_{BB',\ \text{masa}} = \rho t I_{BB',\ \text{área}}} \quad \boxed{I_{CC',\ \text{masa}} = \rho t J_{C,\ \text{área}}}$$



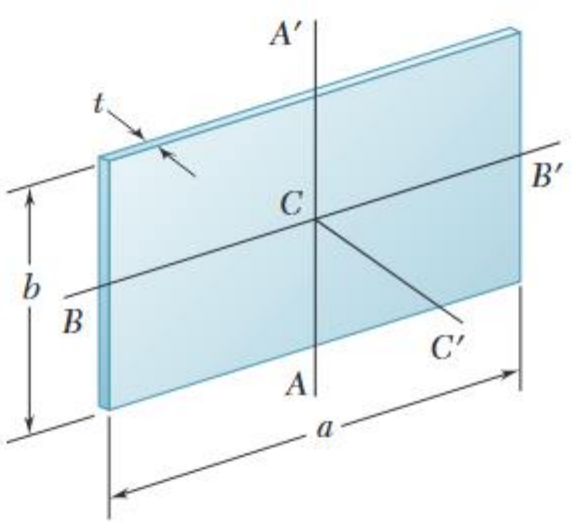
donde J_C es el momento polar de inercia del área de la placa con respecto al punto C.

Al recordar la relación $J_C = I_{AA´} + I_{BB´}$ que existe entre los momentos polar y rectangular de inercia de un área, se escribe la siguiente relación entre los momentos de inercia de masa de una placa delgada:



$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'}$$

Conocimientos previos



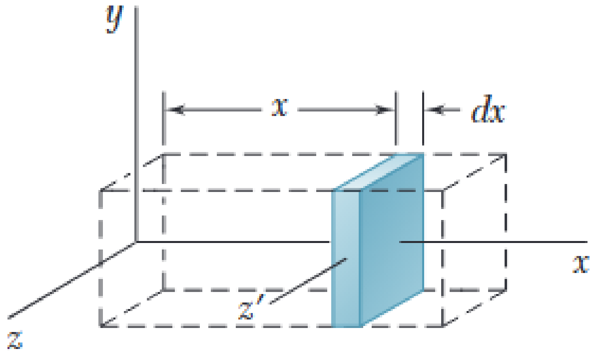
Placa rectangular. En el caso de una placa rectangular de lados a y b, se obtienen los siguientes momentos de inercia de masa con respecto a los ejes que pasan por el centro de gravedad de la placa

$$I_{AA',\text{ masa}} = \rho t I_{AA',\text{ área}} = \rho t(\tfrac{1}{12}a^3b)$$
$$I_{BB',\text{ masa}} = \rho t I_{BB',\text{ área}} = \rho t(\tfrac{1}{12}ab^3)$$

Al observar que el producto ρ.a.b.t es igual a la masa m de la placa, se escriben los momentos de inercia de masa de una placa rectangular delgada del modo siguiente

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{12}ma^2 \qquad I_{BB'} = \tfrac{1}{12}mb^2$$
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$

SOLUCIÓN



Se elige como elemento diferencial de masa la placa delgada que se muestra; de tal modo $dm = \rho bc\, dx$

Refiriéndose a la sección (conocimientos previos), se encuentra que el momento de inercia del elemento con respecto al eje z´ es

$$dI_{z'} = \tfrac{1}{12}b^2\, dm$$

- Al aplicar el teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner, se obtiene el momento de inercia de masa de la placa con respecto al eje z.

$$dI_z = dI_{z'} + x^2\, dm = \tfrac{1}{12}b^2\, dm + x^2\, dm = (\tfrac{1}{12}b^2 + x^2)\, \rho bc\, dx$$

- Si se integra desde x= 0 a x = a, se obtiene

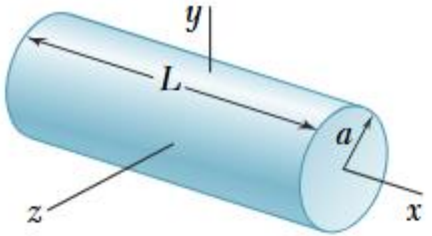
$$I_z = \int dI_z = \int_0^a (\tfrac{1}{12}b^2 + x^2)\, \rho bc\, dx = \rho abc(\tfrac{1}{12}b^2 + \tfrac{1}{3}a^2)$$

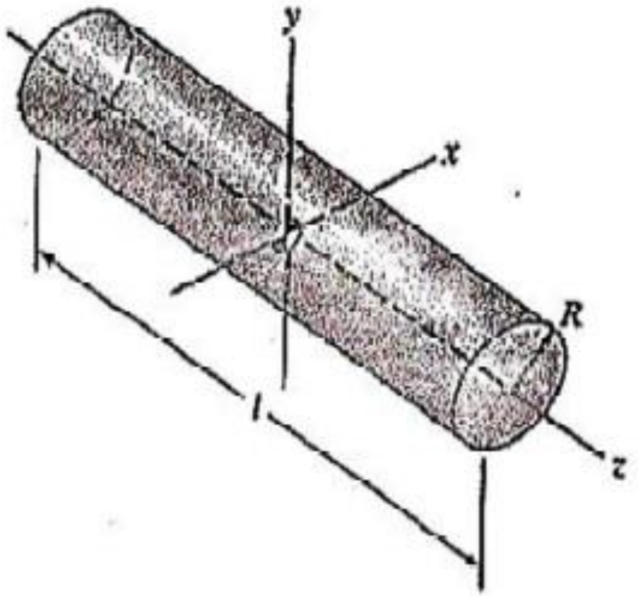
- Puesto que la masa total del prisma es m =ρabc, se puede escribir

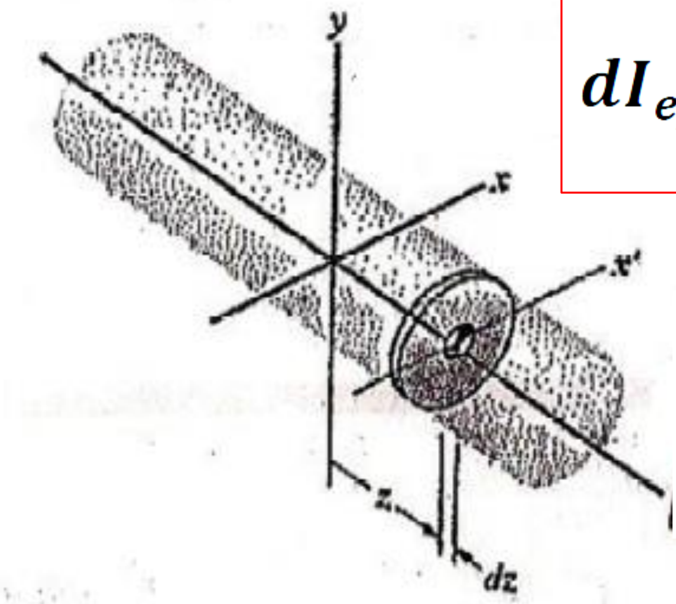
$$I_z = m(\tfrac{1}{12}b^2 + \tfrac{1}{3}a^2) \qquad I_z = \tfrac{1}{12}m(4a^2 + b^2)$$

Ejercicio N° 2

El cilindro homogéneo tiene masa m, longitud l y radio R. Determine sus momentos de inercia de masa respecto a los ejes x, y, z.

Cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$



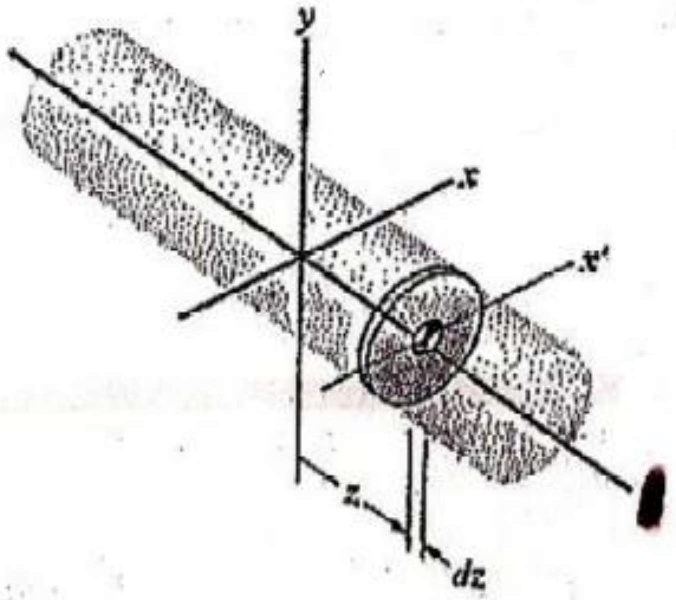


$$\boxed{dI_{eje\,z} = \frac{1}{2}dm\,R^2 = \frac{1}{2}(\rho\pi R^2 dz)R^2}$$

$$I_{eje\,z} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2}\rho\pi R^4 dz = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 l$$

- El momento de inercia respecto al eje se halla por el mismo procedimiento aplicado para hallar el momento de inercia del disco respecto al origen, su valor

$$\boxed{I_z = \frac{1}{2} M R^2}$$



Los momentos de inercia respecto a los planos xz y yz cuya intersección es el eje z son iguales entre sí por simetría

$$I_{xz} = I_{yz}$$

$$I_z = I_{xz} + I_{yz} \quad \Rightarrow \quad I_{xz} = I_{yz} = \frac{1}{2} I_z \quad \Rightarrow \boxed{I_{xz} = I_{yz} = \frac{1}{4} M R^2}$$

Igual que los momentos de inercia del disco respecto a los ejes x e y

Para hallar el momento de inercia respecto al plano xy tomamos un elemento de volumen tal que todos sus puntos se encuentren a la misma distancia z de dicho plano

$$I_{xy} = \int z^2 dm \quad \text{siendo} \begin{cases} dm = \rho d\tau = \dfrac{M}{\pi R^2 H} d\tau \\ d\tau = \pi R^2 dz \end{cases}$$

$$I_{eje\ z} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} \rho \pi R^4 dz = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 l$$

En función de la masa del cilindro.

$$I_{eje\ z} = \frac{1}{2} m R^2$$

El momento de inercia de masa del elemento de disco respecto al eje x'

$$dI_{eje\,x'} = \frac{1}{4} dm\, R^2 = \frac{1}{4}(\rho\pi R^2 dz)R^2$$

Usamos el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia de masa del elemento respecto al eje x

$$dI_{eje\,x} = dI_{eje\,x'} + z^2 dm = \frac{1}{4}(\rho\pi R^2 dz)R^2 + z^2(\rho\pi R^2 dz)$$

Integrando obtenemos el momento de inercia de masa del cilindro respecto al eje x

$$I_{eje\,x} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{1}{4}\rho\pi R^4 + \rho\pi R^2 z^2\right) dz = \frac{1}{4}\rho\pi R^4 l + \frac{1}{12}\rho\pi R^2 l^3$$

En función de la masa del cilindro

$$I_{eje\ x} = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} ml^2$$

Por la simetría del cilindro

$$I_{eje\ y} = I_{eje\ x}$$

y el momento de inercia respecto al eje y que es la intersección de los planos xy con yz la podemos hallar

$$I_y = I_{xy} + I_{yz} \quad \Rightarrow \quad I_y = \frac{1}{12} MH^2 + \frac{1}{4} MR^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_x = I_y = \frac{1}{12} M\left(3R^2 + H^2\right)}$$

Por último, el momento de inercia respecto al origen

$$I_O = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} \quad \Rightarrow I_O = \frac{1}{12} MH^2 + 2\frac{1}{4} MR^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_O = \frac{1}{12} M\left(6R^2 + H^2\right)}$$

Teorema de Steiner - Repaso

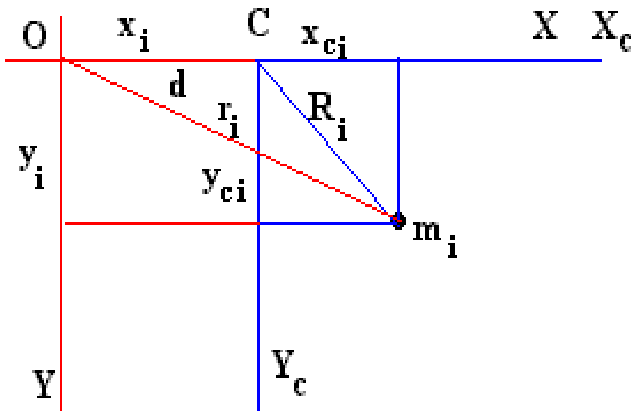
El teorema de Steiner es una fórmula que nos permite calcular el momento de inercia de un sólido rígido respecto de un eje de rotación que pasa por un punto O, cuando conocemos el momento de inercia respecto a un eje paralelo al anterior y que pasa por el centro de masas.

El momento de inercia del sólido respecto de un eje que pasa por O es

$$I_O = \sum m_i r_i^2$$

El momento de inercia respecto de un eje que pasa por C es

$$I_C = \sum m_i R_i^2$$



Para relacionar I_O e I_C hay que relacionar ri y Ri

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 = (x_{ic} + d)^2 + y_{ic}^2 = R_i^2 + 2dx_{ic} + d^2$$

$$I_O = \sum m_i R_i^2 + 2d\sum m_i x_{ic} + d^2 \sum m_i$$

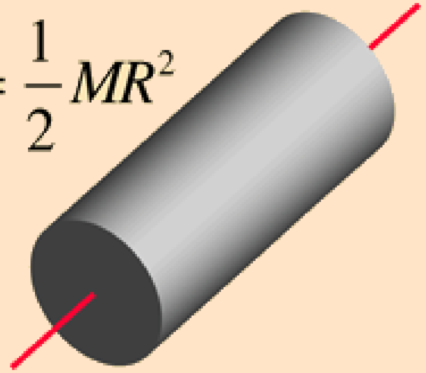
$$I_O = I_C + d^2 M$$

El término intermedio en el segundo miembro es cero ya que obtenemos la posición x_C del centro de masa desde el centro de masa

Momento de Inercia: Cilindro

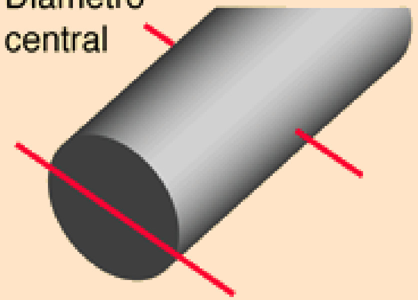
Eje central

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



$$I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$$

Diámetro central



$$I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{3} ML^2$$

Diámetro de un extremo

Un cilindro sólido de
masa m= ____ kg
y radio R = ____ cm
tendrá un momento de inercia sobre su eje central:

$I_{\text{eje central}} =$ ____ kg m^2

Para un cilindro de longitud L = ____ m, se muestran los momento de inercia del cilindro sobre otros ejes.

$I_{\text{diámetro central}} =$ ____ kg m^2

$I_{\text{extremo del diámetro}} =$ ____ kg m^2

Los momentos de inercia de determinadas geometrías con esta masa son:

$I_{\text{diámetro disco delgado}} =$ ____ kg m^2

$I_{\text{extremo varilla delgada}} =$ ____ kg m^2

[Mostrar desarrollo de expresiones]

[Caso de Cilindro Hueco]

Momento de Inercia: Cilindro sobre Eje Perpendicular

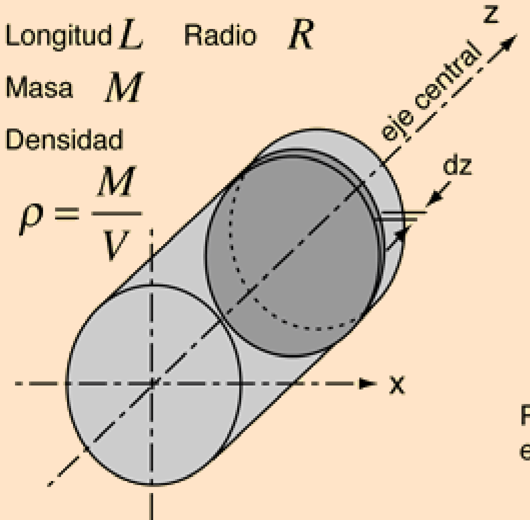
El desarrollo de la expresión del momento de inercia de un cilindro sobre el diámetro de un extremo (el eje x en el diagrama), hace uso de ambos, el teorema de ejes paralelos y el teorema de ejes perpendiculares. El enfoque consiste en encontrar una expresión para un disco delgado a una distancia z del eje, y hacer la suma de todos esos discos

Longitud L Radio R

Masa M

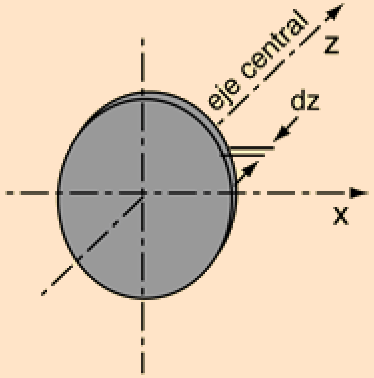
Densidad

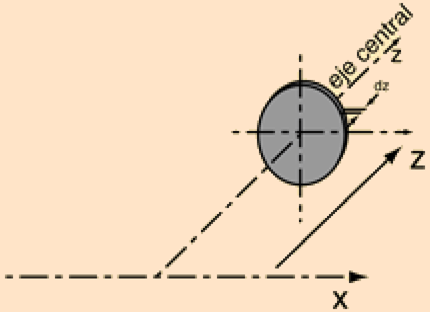
$$\rho = \frac{M}{V}$$



Para un disco delgado:

$$dm = \rho dV = \frac{M}{V} A dz = \frac{M}{L} dz$$





Para un disco infinitamente delgado de grosor dz, el momento de inercia sobre el eje central es

$$dI_z = \frac{1}{2} dmR^2$$

igual que cualquier cilindro sobre su eje central. Pero por el teorema del eje perpendicular

$$dI_z = dI_x + dI_y$$

Como los momentos de inercia x e y deben ser iguales por simetría, se sigue que

$$dI_x = \frac{1}{2} dI_z = \frac{1}{4} dmR^2$$

La obtención del momento de inercia de un cilindro completo sobre un diámetro de su extremo, consiste en una suma de infinitos discos delgados, a diferentes distancias de ese eje. Esto nos lleva a una integral desde z=0 hasta z=L. Para cualquier disco dado a una distancia z de su eje x, usando el teorema de los ejes paralelos, nos da el momento de inercia sobre el eje x.

$$dI_x = \frac{1}{4} dmR^2 + dmz^2$$

Ahora, expresando el elemento de masa dm en términos de z, podemos integrar sobre la longitud L del cilindro.

$$I_x = \int_0^L dI_x = \frac{R^2}{4} \frac{M}{L} \int_0^L dz + \frac{M}{L} \int_0^L z^2 dz$$

$$I_x = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{3} ML^2$$

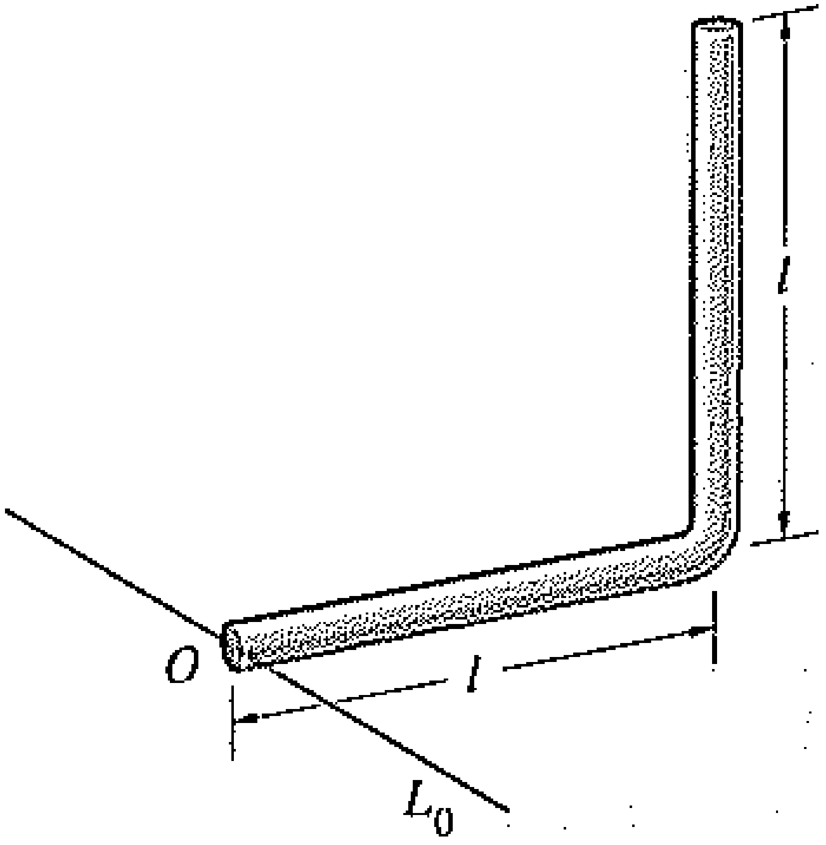
Esta fórmula se puede ver que es plausible si tiene en cuenta, que es la suma de la expresión para un disco delgado sobre un diámetro, mas la expresión para una varilla delgada sobre su extremo. Si toma el caso límite de R=0, obtiene la expresión de la varilla delgado y si toma el caso límite de L=0, obtiene la expresión del disco delgado.

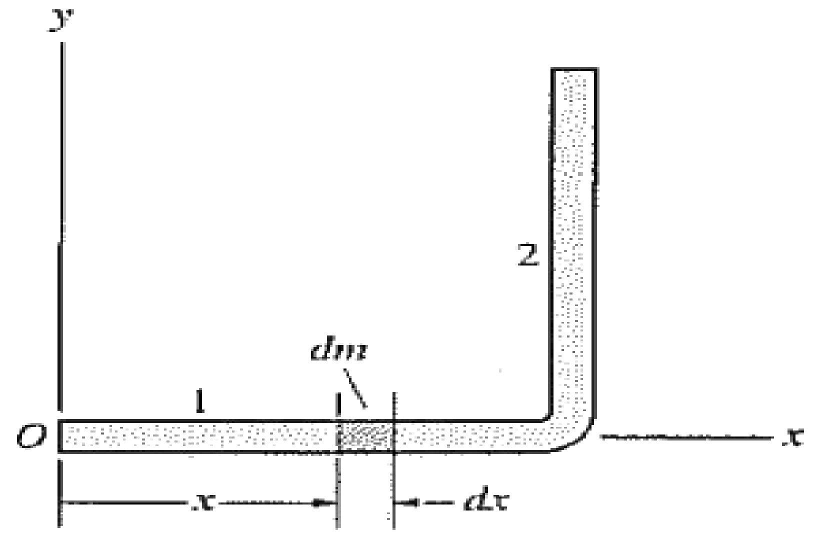
Los últimos pasos hacen uso de la forma polinómica de las integrales.

http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/icyl.html

Ejercicio N° 3

Dos barras esbeltas homogéneas, cada una de longitud l, masa m y área de sección transversal A, están soldadas formando un cuerpo en forma de L. Calcular el momento de inercia de masa del cuerpo respecto al eje L_0 que pasa por O.

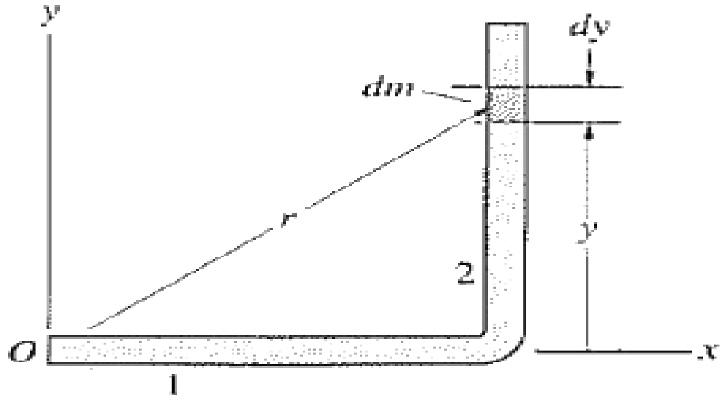




$$(I_0)_1 = \int_m r^2\, dm = \int_0^l \rho A x^2\, dx = \frac{1}{3}\rho A l^3.$$

$$(I_0)_1 = \frac{1}{3} m l^2.$$

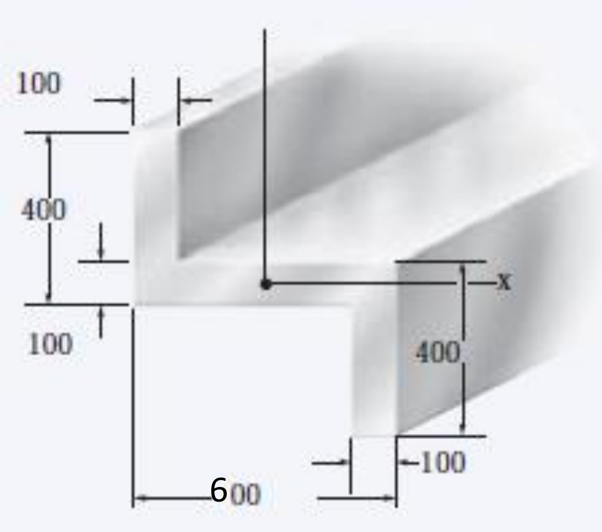
$$(I_0)_2 = \int_m r^2\, dm = \int_0^l \rho A (l^2 + y^2)\, dy = \frac{4}{3}\rho A l^3.$$

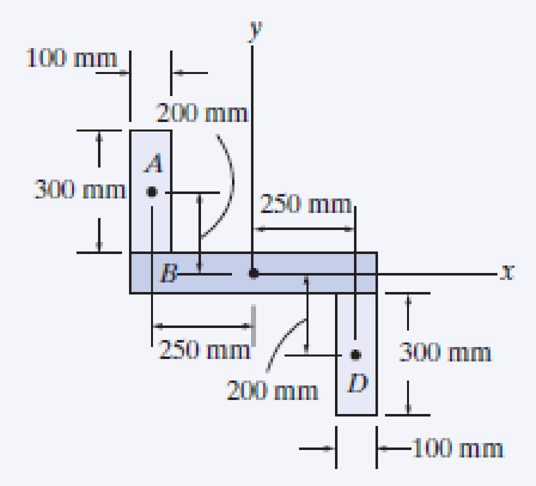


$$(I_0)_2 = \frac{4}{3} m l^2.$$

$$I_0 = (I_0)_1 + (I_0)_2 = \frac{1}{3} m l^2 + \frac{4}{3} m l^2 = \frac{5}{3} m l^2.$$

Determine los momentos de inercia para el área de la sección transversal del elemento que se muestra en la figura con respecto a los ejes centroidales x y y.





SOLUCIÓN

Partes compuestas. La sección transversal puede subdividirse en las tres áreas rectangulares A, B y D que se muestran en la figura inferior. Para efectuar el cálculo, el centroide de cada uno de esos rectángulos está localizado en la figura.

Teorema de los ejes paralelos. Con base en las tablas, el momento de inercia de un rectángulo con respecto a su eje centroidal es $\bar{I} = \frac{1}{12}bh^3$. Por lo tanto, con el teorema de los ejes paralelos para los rectángulos A y D, los cálculos son como sigue:

Rectángulos A y D

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 = \frac{1}{12}(100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2$$
$$= 1.425(10^9)\text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 = \frac{1}{12}(300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2$$
$$= 1.90(10^9)\text{ mm}^4$$

Rectángulo B

$$I_x = \frac{1}{12}(600)(100)^3 = 0.05(10^9)\text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(100)(600)^3 = 1.80(10^9)\text{ mm}^4$$

Suma. Entonces, los momentos de inercia para toda la sección transversal son:

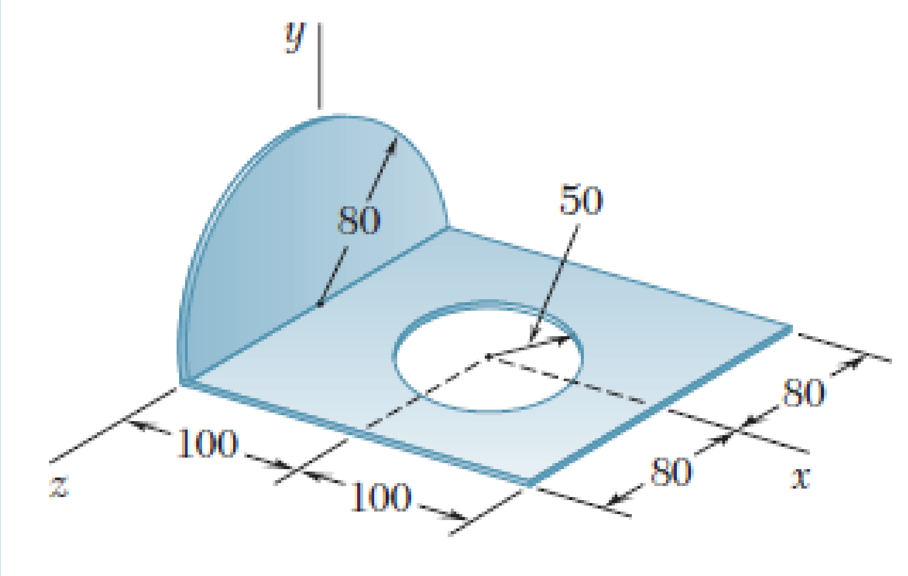
$$I_x = 2[1.425(10^9)] + 0.05(10^9)$$
$$= 2.90(10^9)\text{ mm}^4$$
$$I_y = 2[1.90(10^9)] + 1.80(10^9)$$
$$= 5.60(10^9)\text{ mm}^4$$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. **Cálculo de momentos de inercia de masa.**
2. **Aplicación del teorema de los ejes paralelos.**
3. **Cálculo del momento de inercia de masa de placas delgadas.**
4. **Obtención del momento de inercia de un cuerpo mediante una sola integración directa.**
   - ***a*) En el caso especial de un cuerpo de revolución.**
   - ***b*) En el caso general, cuando el cuerpo no es de revolución.**
5. **Cálculo del momento de inercia de un cuerpo compuesto.**

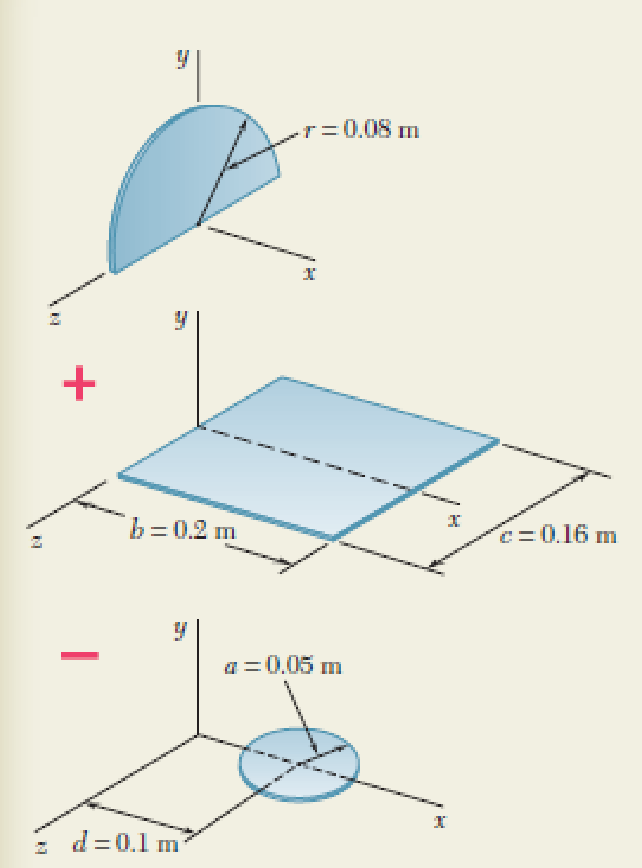
EJERCICIOS A REALIZAR

Una placa de acero delgada mide 4 mm de espesor y se corta y pliega según se muestra. Si la densidad del acero es de 7850 kg/m3.



Dimensiones en mm

Momentos de inercia de placas delgadas



Calcule el momento de inercia de la pieza con respecto al **eje x**.

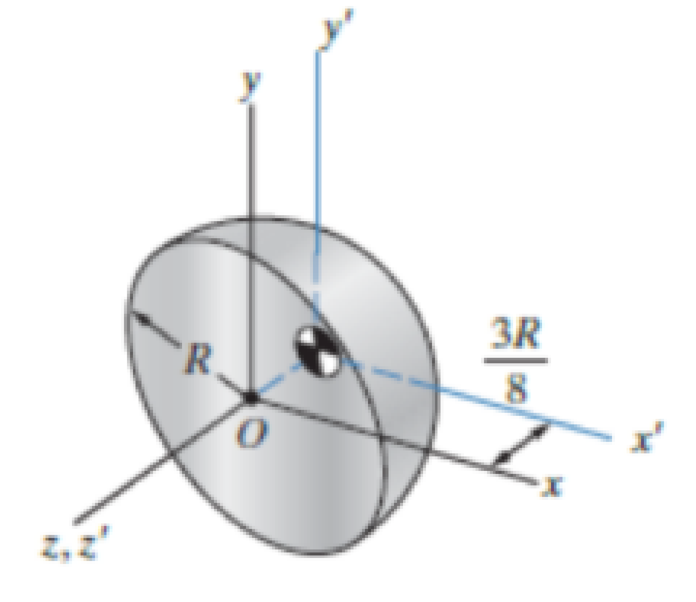
Calcule el momento de inercia de la pieza con respecto al **eje y**.

Calcule el momento de inercia de la pieza con respecto al **eje z**.

EJERCICIOS A REALIZAR

Se requiere calcular los momentos de inercia de una pieza respecto a los ejes x' - y' - z' como se muestra en la figura, que tiene un radio de **R= 113 mm**. La pieza está construida de **aluminio**.

En este primer punto, calcular la inercia **Ix'**



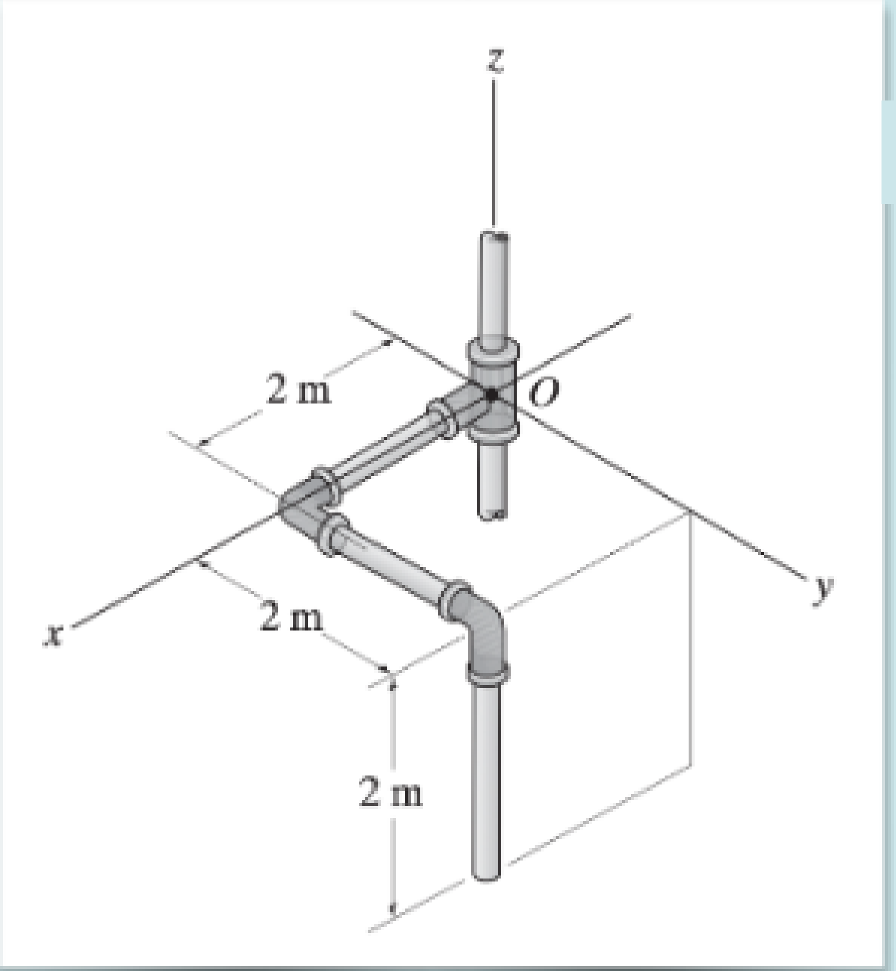
Semiesfera

Ahora, para la misma pieza calcular la inercia **Iy'**

Finalmente, para la misma pieza calcular la inercia **Iz'**

EJERCICIOS A REALIZAR

Se cuenta con un sistema de barras delgadas, que tienen una masa por unidad de longitud de 6 kg/m.



Calcule el momento de inercia de la pieza con respecto al **eje x**.

Calcule el momento de inercia de la pieza con respecto al **eje y**.

Calcule el momento de inercia de la pieza con respecto al **eje z**.

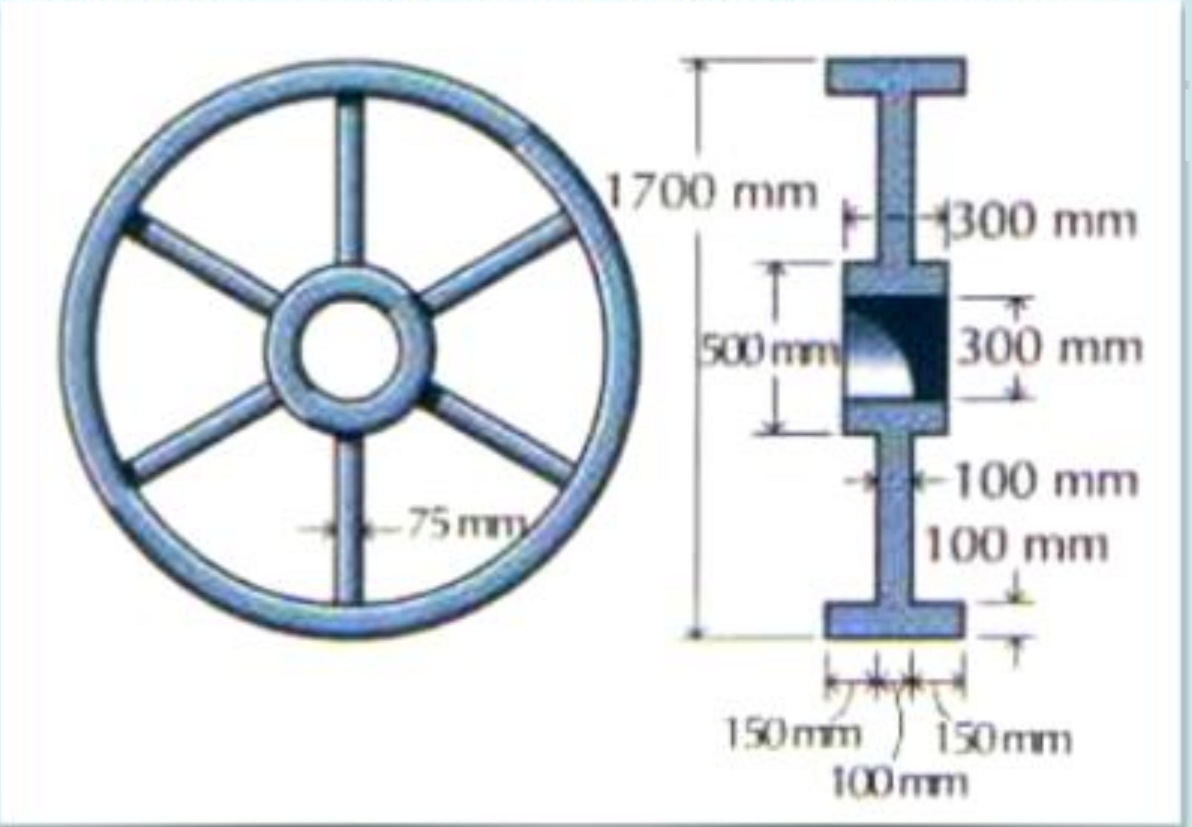
Calcule el producto de inercia I_{xy} de la pieza.

Calcule el producto de inercia I_{yz} de la pieza.

Calcule el producto de inercia I_{xz} de la pieza.

EJERCICIOS A REALIZAR

Se requiere analizar el momento de inercia del volante de hierro fundido mostrado en al figura respecto a su eje de rotación. La densidad del hierro fundido es 7369 kg/m



Calcule el momento de inercia de la **llanta** (anillo mas grande)

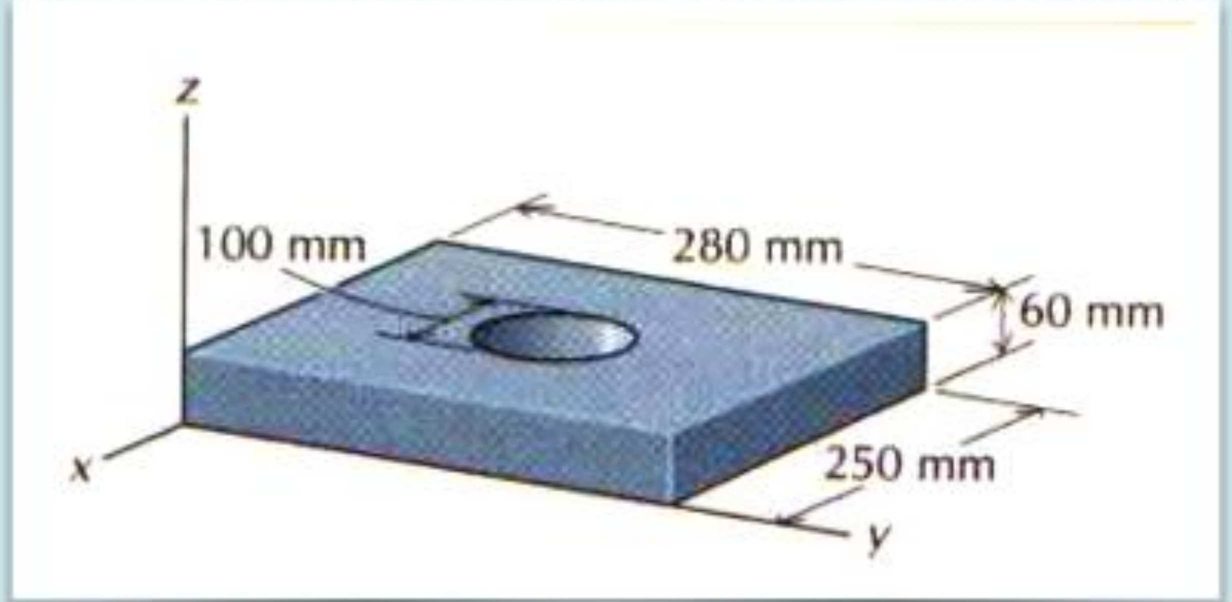
Calcule el momento de inercia del **cubo** (anillo menor)

Calcule el momento de inercia de **un rayo** respecto al eje de rotación del volante.

Calcule el momento de inercia total del volante respecto al eje de rotación.

EJERCICIOS A REALIZAR

Se requiere analizar los productos de inercia de la placa rectangular mostrada en al figura respecto a los ejes **x y z**. El orificio está situado en el centro de la placa. La densidad del acero es 7870 kg/m^3



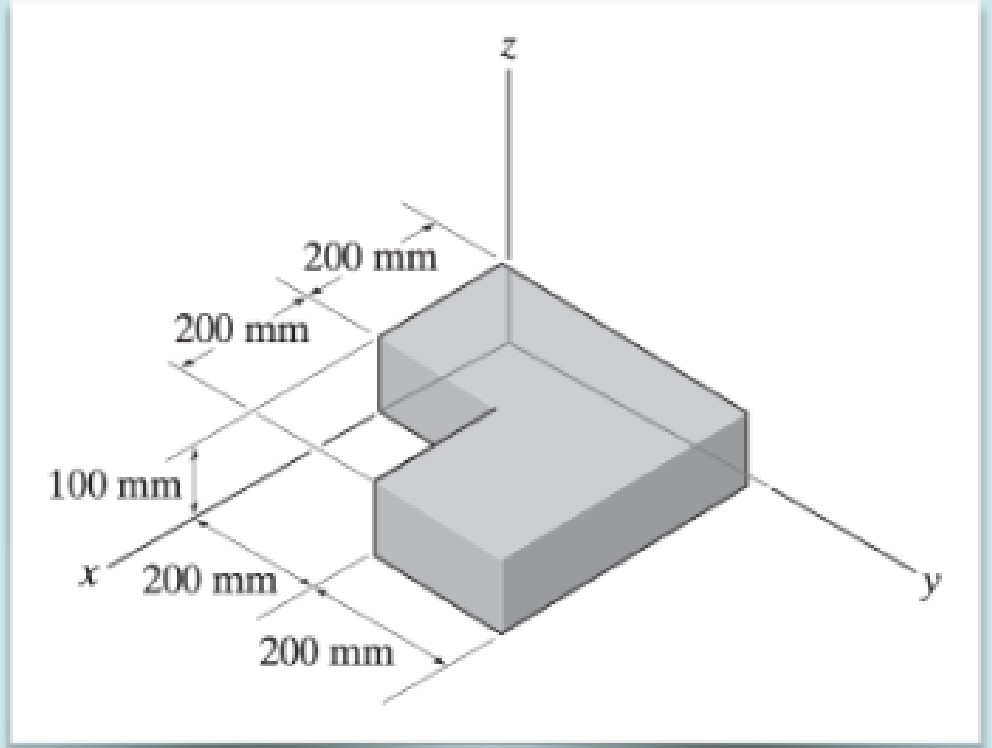
Calcule el producto de inercia $\boldsymbol{I_{xy}}$ de la pieza.

Calcule el producto de inercia $\boldsymbol{I_{yz}}$ de la pieza.

Calcule el producto de inercia $\boldsymbol{I_{xz}}$ de la pieza.

EJERCICIOS A REALIZAR

Se requiere analizar los productos de inercia de la pieza mostrada en al figura respecto a los ejes **x y z**. La densidad del material de la pieza es 7850 kg/m^3



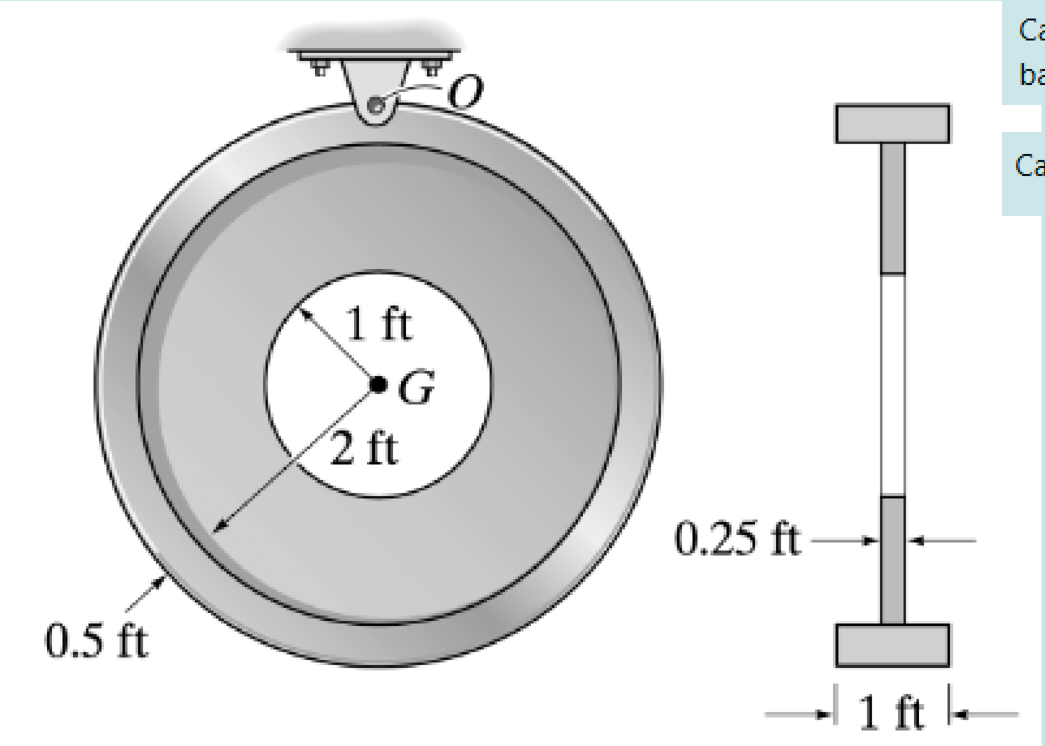
Calcule el producto de inercia $\boldsymbol{I_{xy}}$ de la pieza.

Calcule el producto de inercia $\boldsymbol{I_{yz}}$ de la pieza.

Calcule el producto de inercia $\boldsymbol{I_{xz}}$ de la pieza.

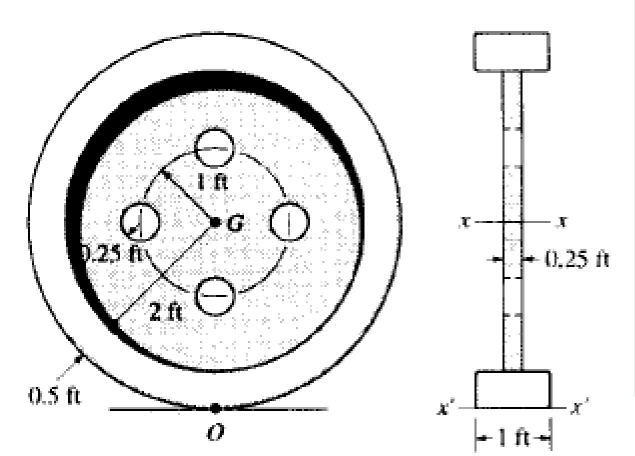
EJERCICIOS A REALIZAR

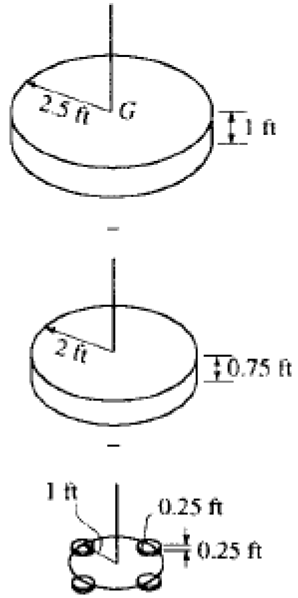
Se requiere analizar la inercia de la pieza mostrada en al figura respecto a los ejes perpendiculares a la imagen, que pasan por el baricentro G y por el punto O. La densidad del material de la pieza es 90 lb/pie^3



Calcule el momento de inercia total del conjunto respecto al eje perpendicular a la figura que pasa por el baricentro G.

Calcule el momento de inercia total del conjunto respecto al eje perpendicular a la figura que pasa por O.

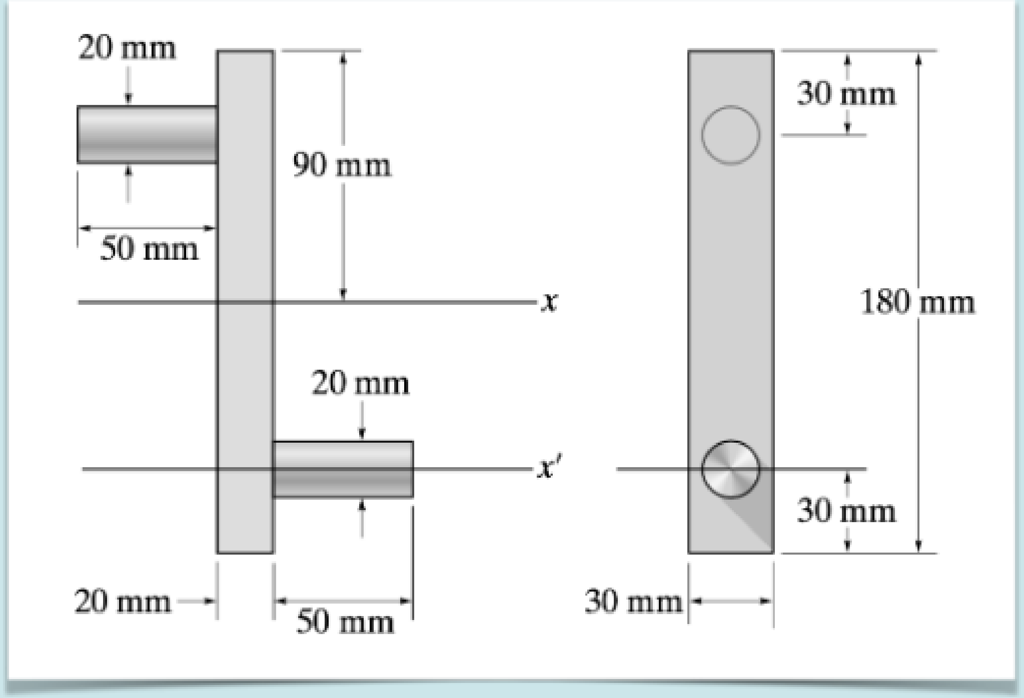




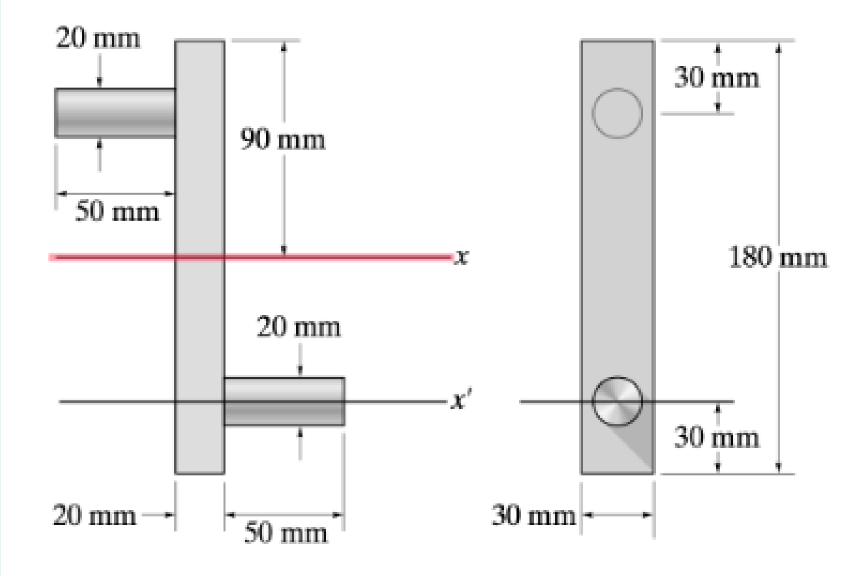
EJEMPLO EXPLICATIVO

EJERCICIOS A REALIZAR

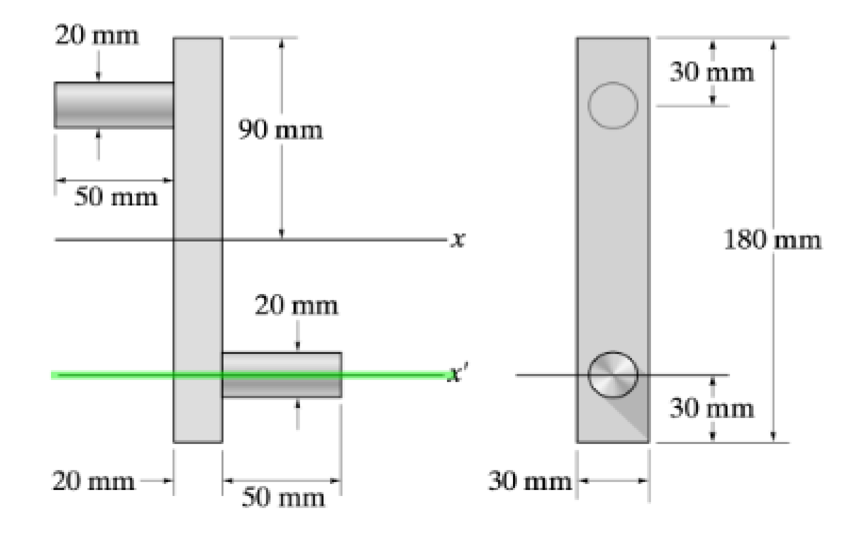
Se necesita analizar los momentos de inercia de la manivela mostrada en la figura, en dos ejes diferentes. El material con el que se fabrica tiene una densidad de 7850 kg/m^3



Calcule el momento de inercia total de la manivela respecto al **eje x**.



Calcule el momento de inercia total de la manivela respecto al **eje x'**.

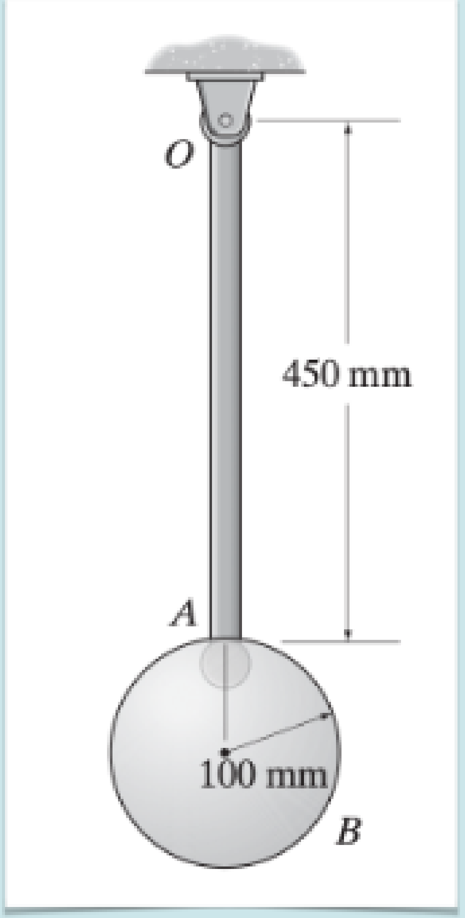


Cálculo de masas

- Volumen
- Peso
- Masa

EJERCICIOS A REALIZAR

El péndulo de la figura esta compuesto por una **barra** de masa 10 kg y 450 mm de largo, y por una **esfera** en el extremo de masa 15 kg de diámetro 100 mm.



Calcule el momento de inercia total del péndulo respecto al eje perpendicular a la figura que pasa por el punto O.