

# TRENES DE ENGRANAJES

**MECÁNICA APLICADA**  
**MECÁNICA Y MECANISMOS**

Ing. Carlos Barrera-2025

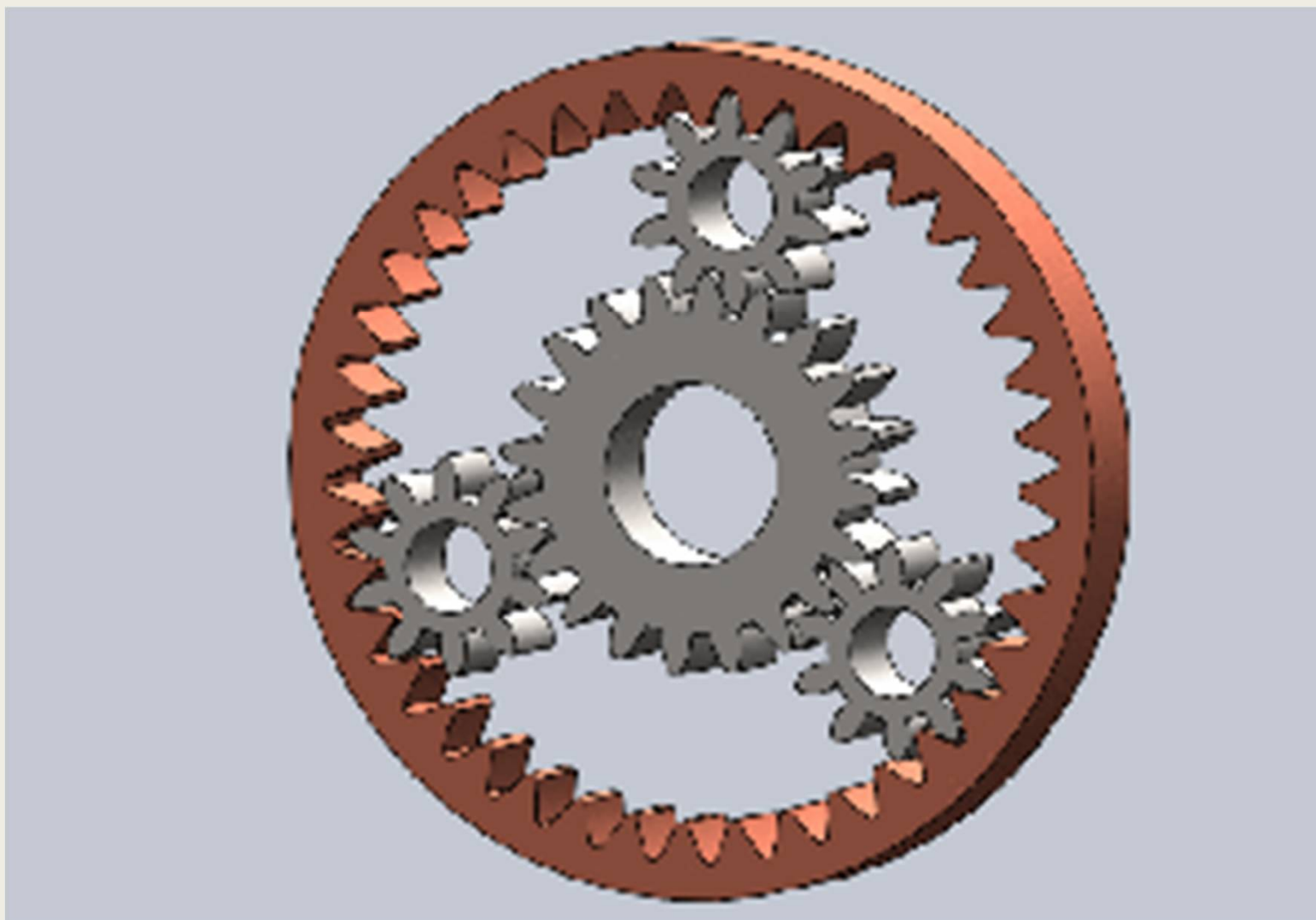


**Cátedra:**  
**MECÁNICA**  
**APLICADA-**  
**MECÁNICA Y**  
**MECANISMOS**



**16:45**





**Si el movimiento se transmite íntegramente por medio de engranajes, la combinación de estos es llamada TREN DE ENGRANAJES.**

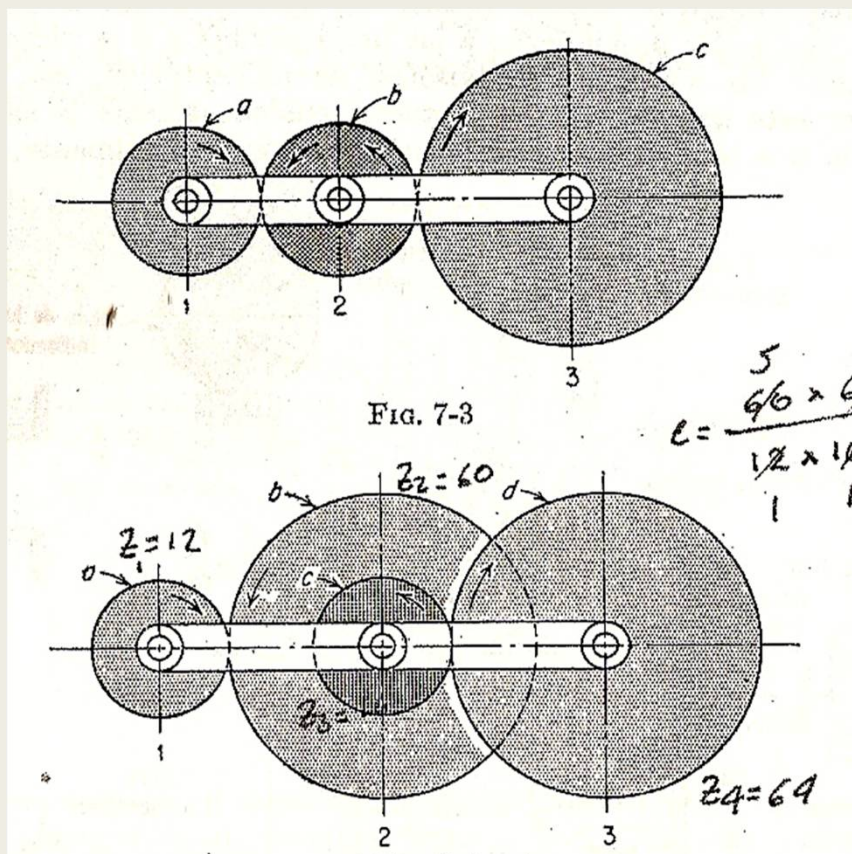
- Trenes ordinarios: pueden dividirse en:
  - Trenes ordinarios simples.
  - Trenes ordinarios compuestos.
- Trenes epicicloidales: pueden subdividirse
  - Trenes epicicloidales simples.
  - Diferenciales.
- Trenes mixtos: coexisten los dos tipos de trenes de engranajes anteriores.

**En los trenes epicicloidales hay algún eje que tiene movimiento relativo respecto de los demás, mientras que en los trenes ordinarios el único movimiento que pueden tener los ejes es el de giro sobre si mismo**

Se pueden dividir en dos clases: **SIMPLES** y **COMPUESTOS**.

En un tren de engranajes simple, cada árbol del mecanismo lleva una sola rueda.

En un tren de engranajes compuesto, cada árbol excepto el primero y el último, lleva dos ruedas solidarias entre sí.

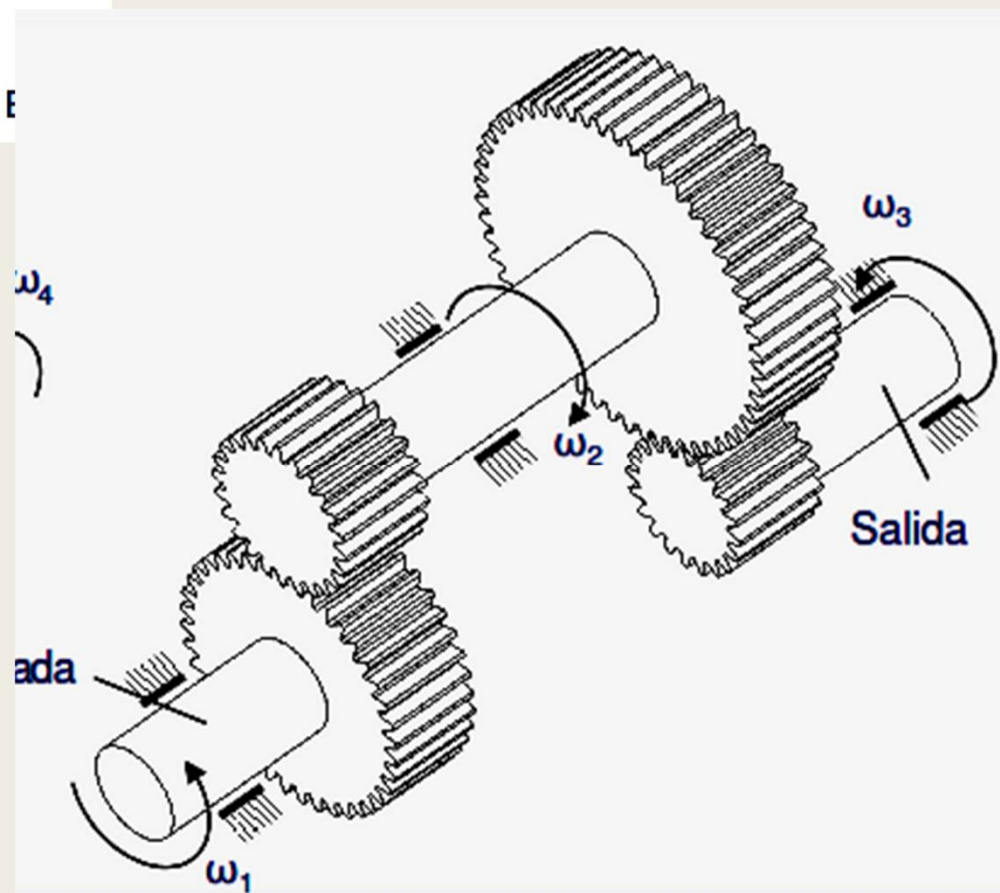
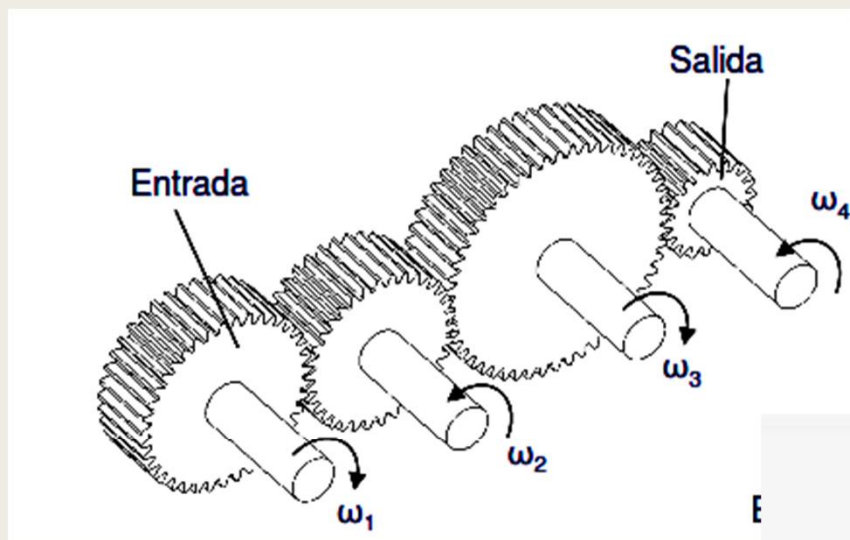


**Tren simple**

**Tren  
compuesto**

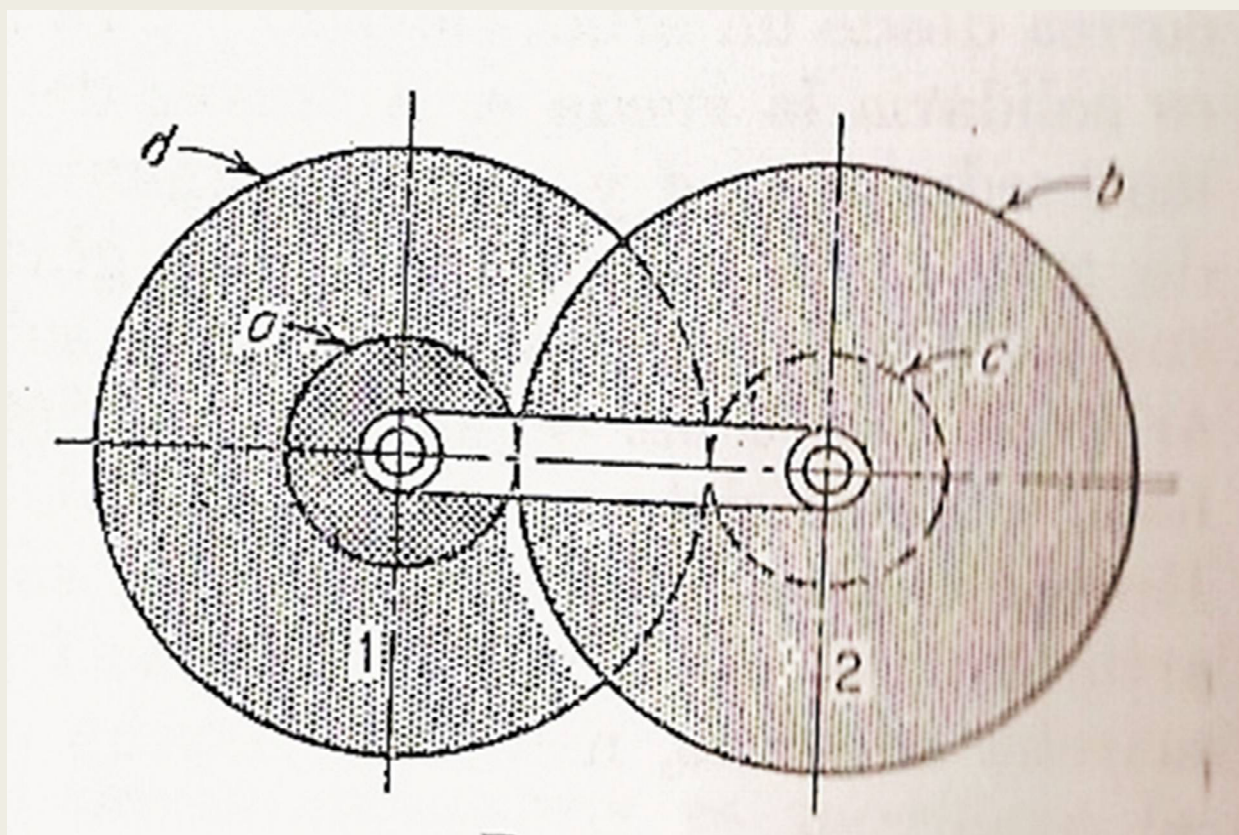


16:45



Trenes compuestos del tipo mostrado en las figuras, encuentran aplicación en mecanismos para máquinas de gran velocidad como turbinas de vapor y algunos motores eléctricos.

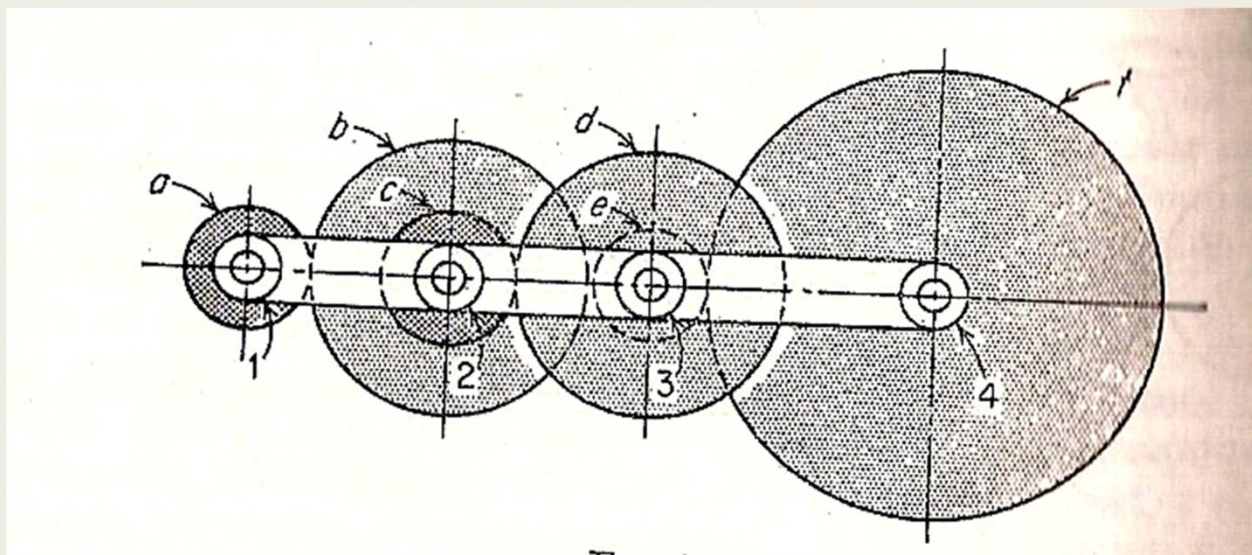
Estos trenes van encerrados en un cárter formando un conjunto que une el motor con la máquina y se llama **REDUCTOR DE VELOCIDAD**.





En la figura tenemos cuatro árboles, conectados por medio de ruedas dentadas representadas por sus círculos primitivos.

Sean  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  y  $n_4$  los valores de las velocidades de los árboles 1, 2, 3 y 4 respectivamente.



Dos ruedas engranadas deben tener el mismo paso.

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{b}{a} \quad \frac{n_2}{n_3} = \frac{d}{c} \quad \frac{n_3}{n_4} = \frac{f}{e}$$

Por consiguiente,  $\frac{n_1}{n_4} = \frac{n_1}{n_2} \frac{n_2}{n_3} \frac{n_3}{n_4} = \frac{b}{a} \frac{d}{c} \frac{f}{e} = \frac{bdf}{ace}$

La ecuación expresada en la expresión anterior, es válida para todo tren de este tipo y puede enunciarse así:

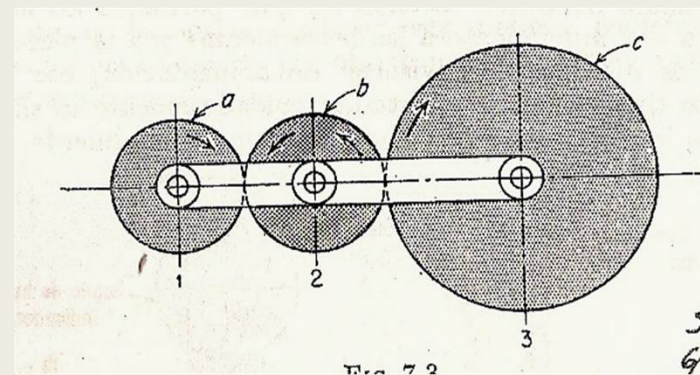
**El valor de la relación de velocidades angulares entre la primera rueda motriz y la última conducida es igual al producto de los números de dientes de las ruedas conducidas dividido por el producto de los números de dientes de las conductoras o motrices.**

## SENTIDO DE GIRO

Si dos ruedas están en contacto directo, su sentido de giro será opuesto, salvo en el caso de una rueda interna.

Pero si se coloca entre ellas, una rueda intermedia, girarán en el mismo sentido.

En el caso del ejemplo, la rueda b es a la vez conductora y conducida. Una rueda así es llamada rueda loca.



**La relación de velocidades es:**

$$\frac{n_a}{n_c} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} = \frac{c}{a}$$

**La introducción de una rueda loca en los engranajes sirve para cambiar el sentido de giro, pero no la relación de velocidades.**

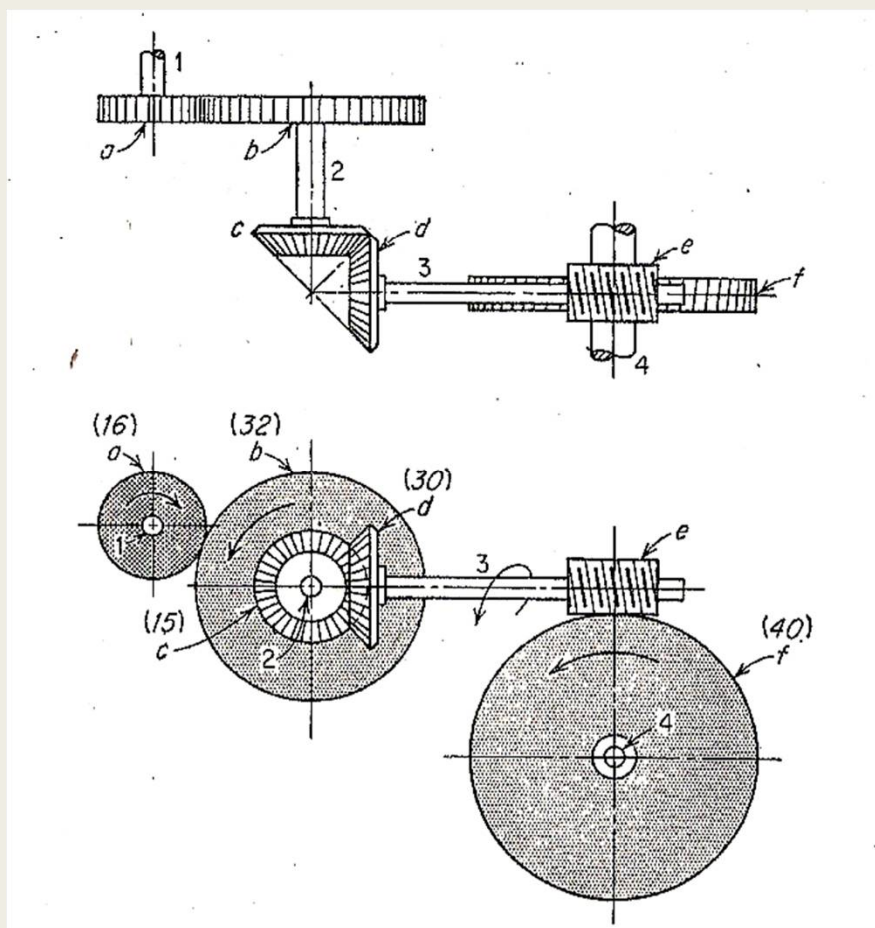
**Si un tren se compone enteramente de ruedas rectas, los árboles adyacentes giran en sentido opuesto y los alternos en el mismo. Si hay un número impar de árboles, el primero y el último girarán en el mismo sentido, y al revés si el número de árboles es par, el primero y el último tendrán sentido de giro opuestos.**

**El procedimiento más seguro para determinar los sentidos de giro, es hacerlo por inspección, sin seguir ninguna regla.**



## TRENES DE ENGRANAJES CON EJES NO PARALELOS

Los métodos deducidos anteriormente para la relación de velocidades son generales y se aplican en todos los casos, con las apropiadas adecuaciones. En la figura se muestra un tren cuyos ejes no son todos paralelos.



$$\frac{n_4}{n_1} = \frac{n_4}{n_3} \frac{n_3}{n_2} \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{40} \times \frac{15}{30} \times \frac{16}{32} = \frac{1}{160}$$

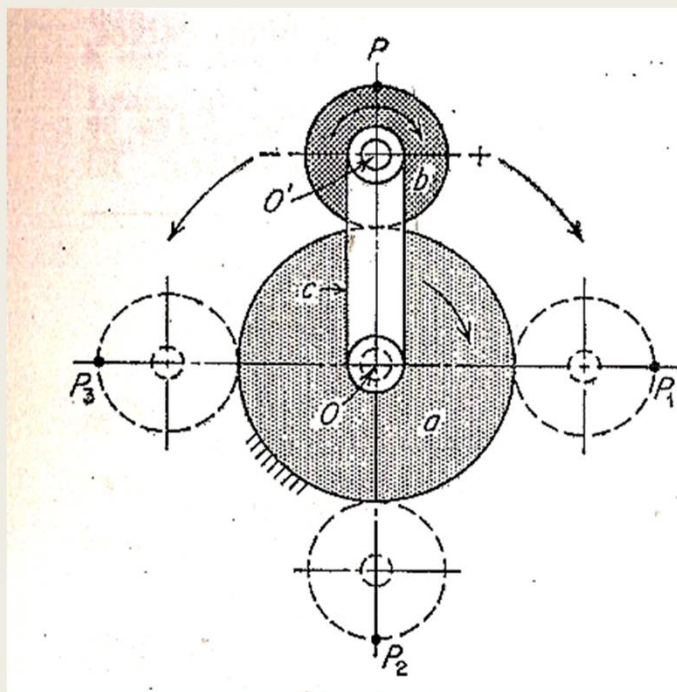
$$n_4 = 320 \times \frac{1}{160} = 2 \text{ rpm.}$$

# TRENES DE ENGRANAJES PLANETARIOS

En los trenes vistos anteriormente, los ejes de las ruedas se mantenían en posiciones fijas entre sí.

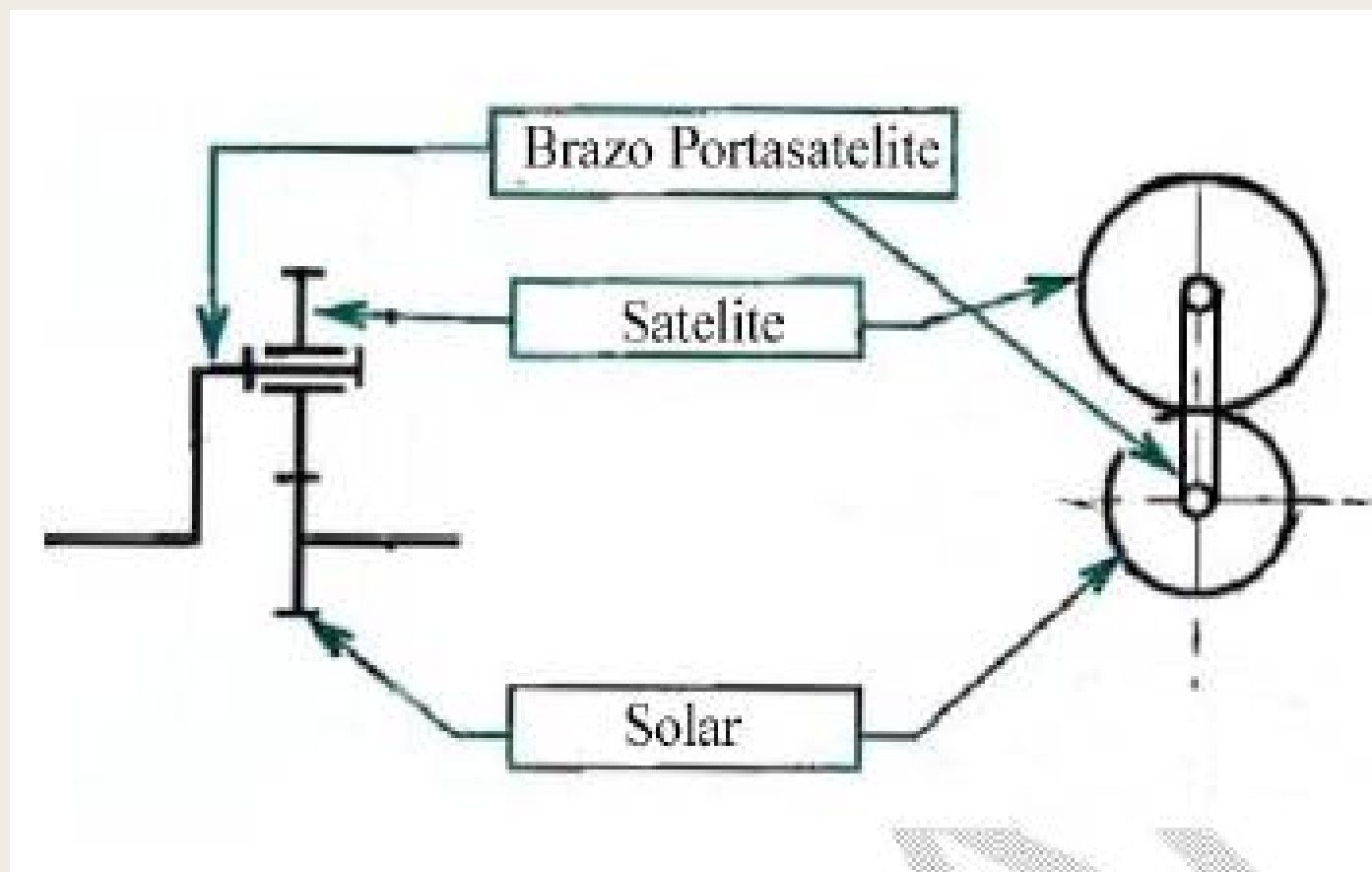
La característica de un tren de engranajes planetarios consiste en que alguno o algunos de los ejes de las ruedas cambian sus posiciones respecto a los otros.

Por ejemplo, en la figura, b rueda sobre la rueda estacionaria a, mientras el brazo c gira. Por lo tanto, el eje de la rueda b cambia de posición.





## TRENES DE ENGRANAJES PLANETARIOS SIMPLES (EPICICLOIDAL)



16:45

Sean  $a$  y  $b$  dos ruedas montadas sobre el brazo  $c$  de tal manera que si  $c$  está fijo,  $a$  y  $b$  serán un tren de engranajes ordinario.

Supongamos que  $a$  es el órgano fijo del tren,  $c$  puede girar alrededor de  $O$  arrastrando a  $b$ , girando esta última rueda alrededor de su propio eje  $O'$ .

Se desea determinar el número de vueltas que dará  $b$ , con respecto al órgano fijo  $a$ , por cada vuelta de  $c$  alrededor de  $O$ .

Supongamos que  $a$ , desconectada del bastidor de tal manera que  $a$ ,  $b$  y  $c$  pueden dar una vuelta juntas, como una sola pieza, en el sentido marcado por la flecha, alrededor de  $O$ .

Se fija ahora el brazo  $c$  y la rueda  $a$  se gira en sentido contrario una vuelta completa, con lo que vuelve a su posición original y su movimiento resultante es nulo.

Al mismo tiempo,  $b$  estará obligada a dar  $a/b$  vueltas con el sentido de giro inicial.

Este método de análisis puede resumirse así: Tomar el sentido de giro horario como positivo (+). Considerando el mecanismo bloqueado y dando una vuelta alrededor de O en sentido positivo, cada pieza dará +1 vuelta. Si el brazo c queda fijo y que a gira una vuelta completa en sentido negativo, los movimientos son:

	$a$	$b$	$c$
Movimientos con el brazo $c$ .....	+ 1	+ 1	+ 1
Movimientos relativos al brazo $c$ .....	- 1	$+\frac{a}{b}$	+ 0
Movimientos totales.....	0	$1 + \frac{a}{b}$	+ 1



**El movimiento total o absoluto de cualquier rueda es igual al movimiento angular del brazo o movimiento de arrastre más el movimiento de la rueda relativo al brazo.**

**De la tabla se puede deducir la relación de velocidades entre la rueda b y el brazo c.**

$$\frac{n_b}{n_c} = \frac{1 + a/b}{1}$$

# METODO TABULAR

**Se procede de la siguiente manera:**

- 1) Se supone el tren epicycloidal bloqueado y se gira una vuelta a todo el sistema.
- 2) Se fija el brazo y se gira una vuelta en sentido contrario al anterior a la rueda que está unida a la bancada. Se calcula el número de vueltas que girará el resto de las ruedas, que se comportarán, al haber fijado el brazo, como un tren ordinario.
- 3) Se suman las vueltas que han girado cada una de las ruedas en los pasos 1) y 2) (composición del movimiento) y se calcula la relación de transmisión como el cociente entre el número de vueltas total de la rueda conductora entre el de la conducida.

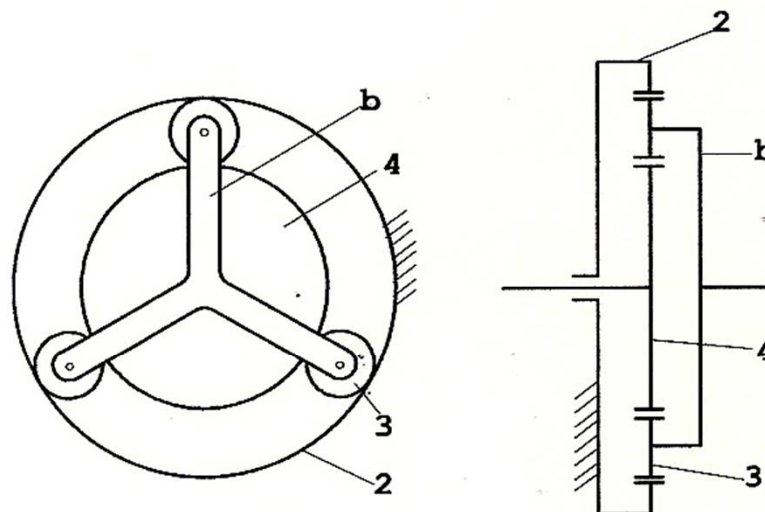


Fig-7. Tren de engranajes epicicloidales

	2	3	4	brazo
Movimiento del brazo	+1	+1	+1	+1
Movimiento relativo al brazo	-1	$-\frac{z_2}{z_3}$	$+\frac{z_2}{z_3} \cdot \frac{z_3}{z_4}$	0
Movimiento total	0	$1 - \frac{z_2}{z_3}$	$1 + \frac{z_2}{z_4}$	+1

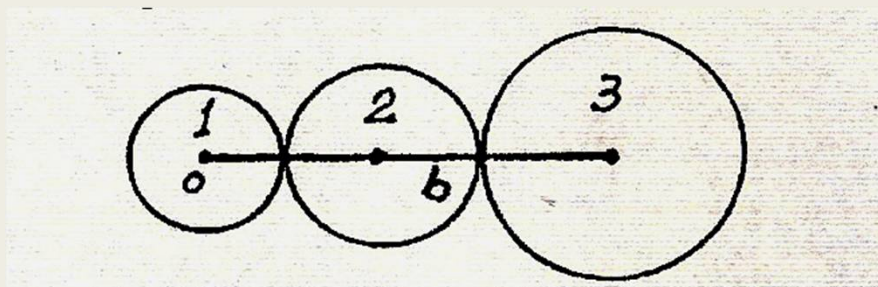


En la tabla se presentan los valores de velocidad del brazo, los de las ruedas con respecto al brazo y los absolutos de cada una de las ruedas.

$$i = \frac{n_b}{n_4} = \frac{1}{1 + \frac{z_2}{z_4}}$$

# FORMULA DE WILLIS

Si tenemos el tren epicycloidal de la figura:



**Donde:**

$\omega_b$ ;  $\omega_1$ ;  $\omega_2$ ;  $\omega_3$  las velocidades absolutas respecto a  $O$  (fijo).  
 $\omega_{1/b}$ ;  $\omega_{2/b}$ ;  $\omega_{3/b}$  las velocidades relativas respecto al brazo.

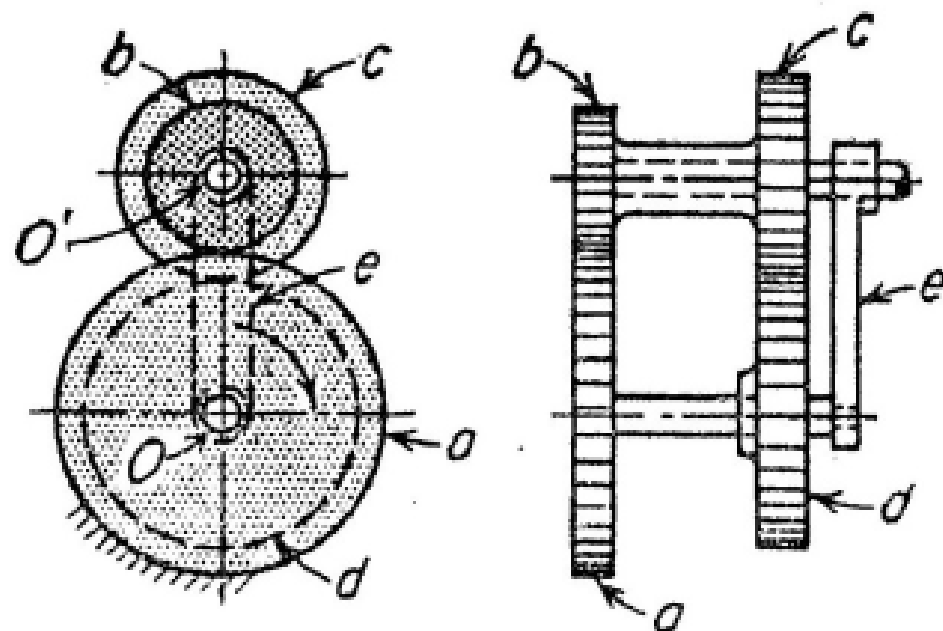
$$\omega_1 = \omega_{1/b} + \omega_b \therefore \omega_{1/b} = \omega_1 - \omega_b$$

$$\omega_3 = \omega_{3/b} + \omega_b \therefore \omega_{3/b} = \omega_3 - \omega_b$$

$$\frac{\omega_{1/b}}{\omega_{3/b}} = \frac{\omega_1 - \omega_b}{\omega_3 - \omega_b}; \quad \text{siendo} \quad \frac{\omega_{1/b}}{\omega_{2/b}} = i$$

$$i = \frac{\omega_1 - \omega_b}{\omega_3 - \omega_b} \quad \text{o} \quad i = \frac{\omega_e - \omega_b}{\omega_s - \omega_b} \quad \text{o} \quad i = \frac{n_e - n_b}{n_s - n_b}$$



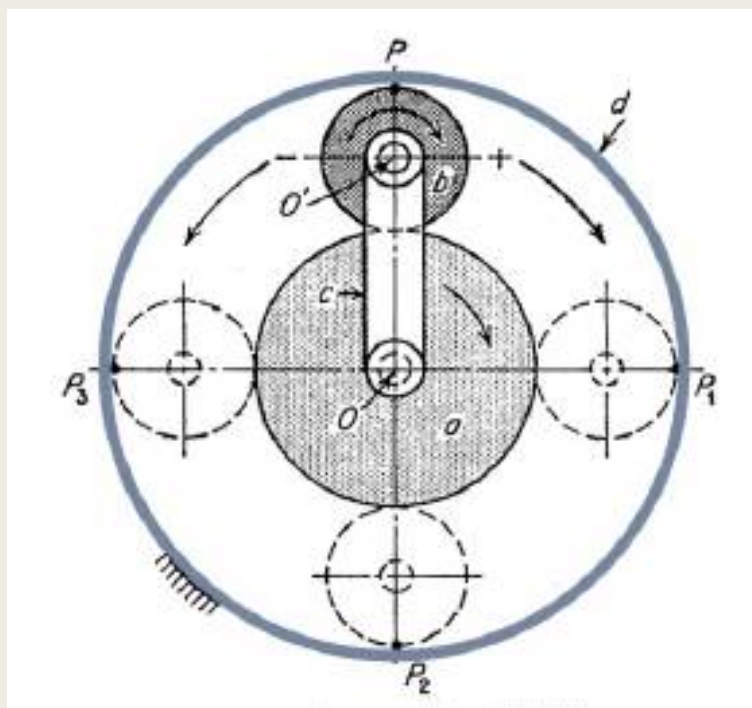


## Tren epicicloidal compuesto

$$i_{e-d} = \frac{n_e}{n_d} = \frac{1}{1 - \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$$

	elemento "a"	Elemento "b"	Elemento "c"	Elemento "d"	Elemento "e" (brazo)
Movimiento con el elemento "e" (brazo)	+1	+1	+1	+1	+1
Movimiento relativo al elemento "e" (brazo bloqueado)	-1	+ a/b	+ a/b	-( a/b).(c/d)	0
Movimiento total	0	1 + a/b	1 + a/b	1-( a.c)/(b.d)	+1

## Tren Epi-hipocicloidal compuesto

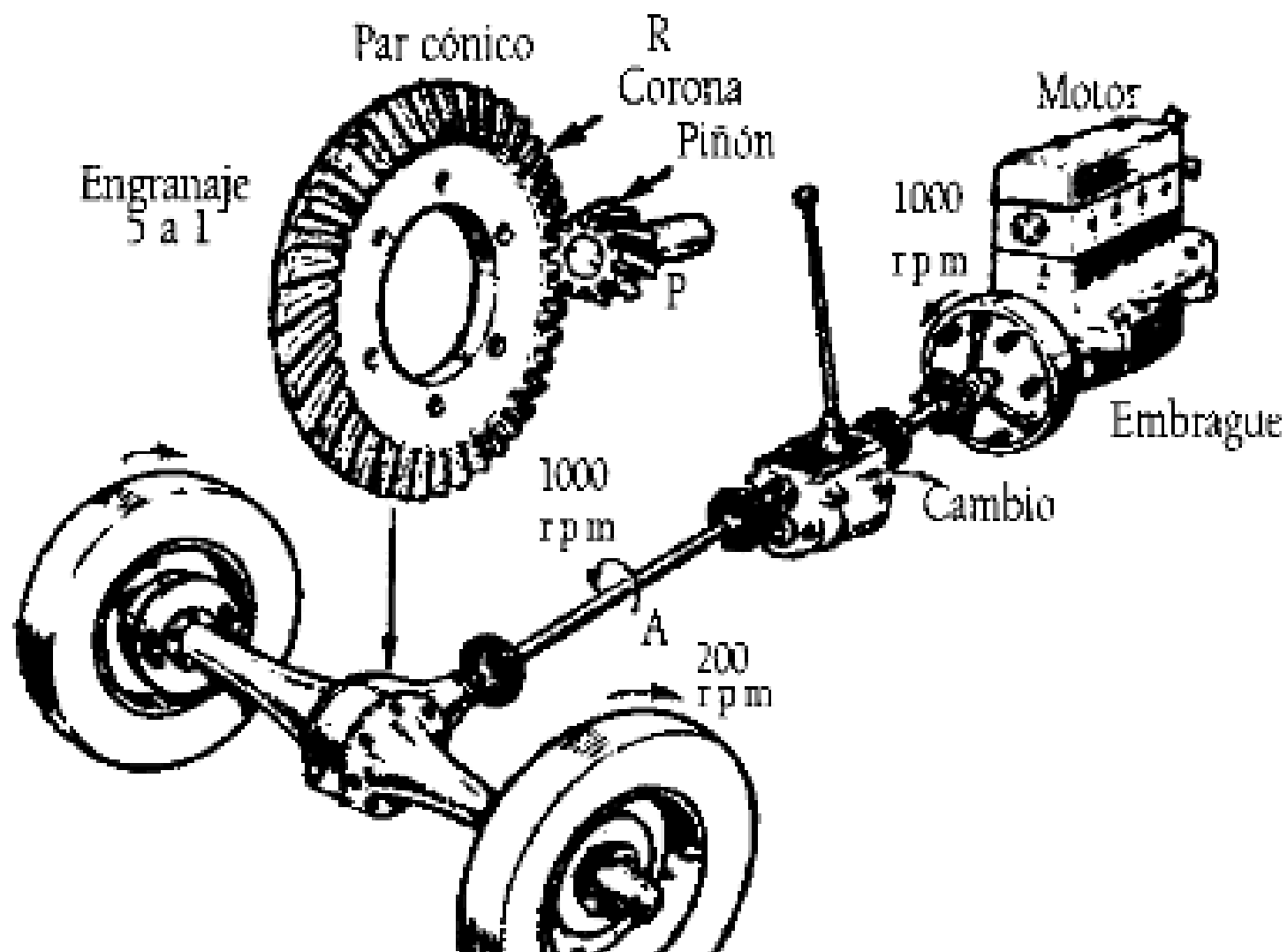


Se le agrega una corona de dentado interior engranando con el satélite.

$$i_{a-c} = \frac{n_a}{n_c} = \frac{1 + \frac{d}{a}}{1} = 1 + \frac{d}{a}$$

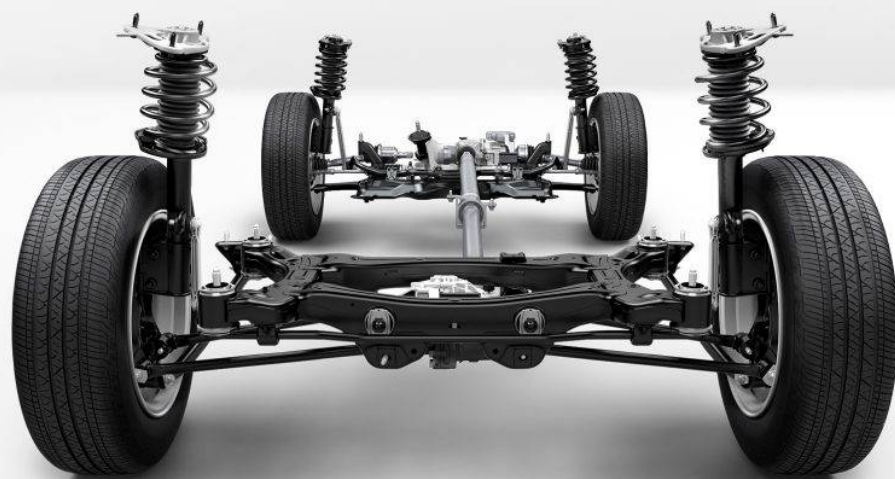
	<i>elemento "a"</i> (solar)	<i>Elemento "b"</i> (satélite)	<i>Elemento "c"</i> (brazo)	<i>Elemento "d"</i> (corona)
Movimiento con el elemento "c" (brazo)	+1	+1	+1	+1
Movimiento relativo al elemento "c" (brazo bloqueado)	+d/a	- d/b	0	-1
Movimiento total	1+d/a	1 - d/b	+1	0

# EL DIFERENCIAL DEL AUTOMÓVIL



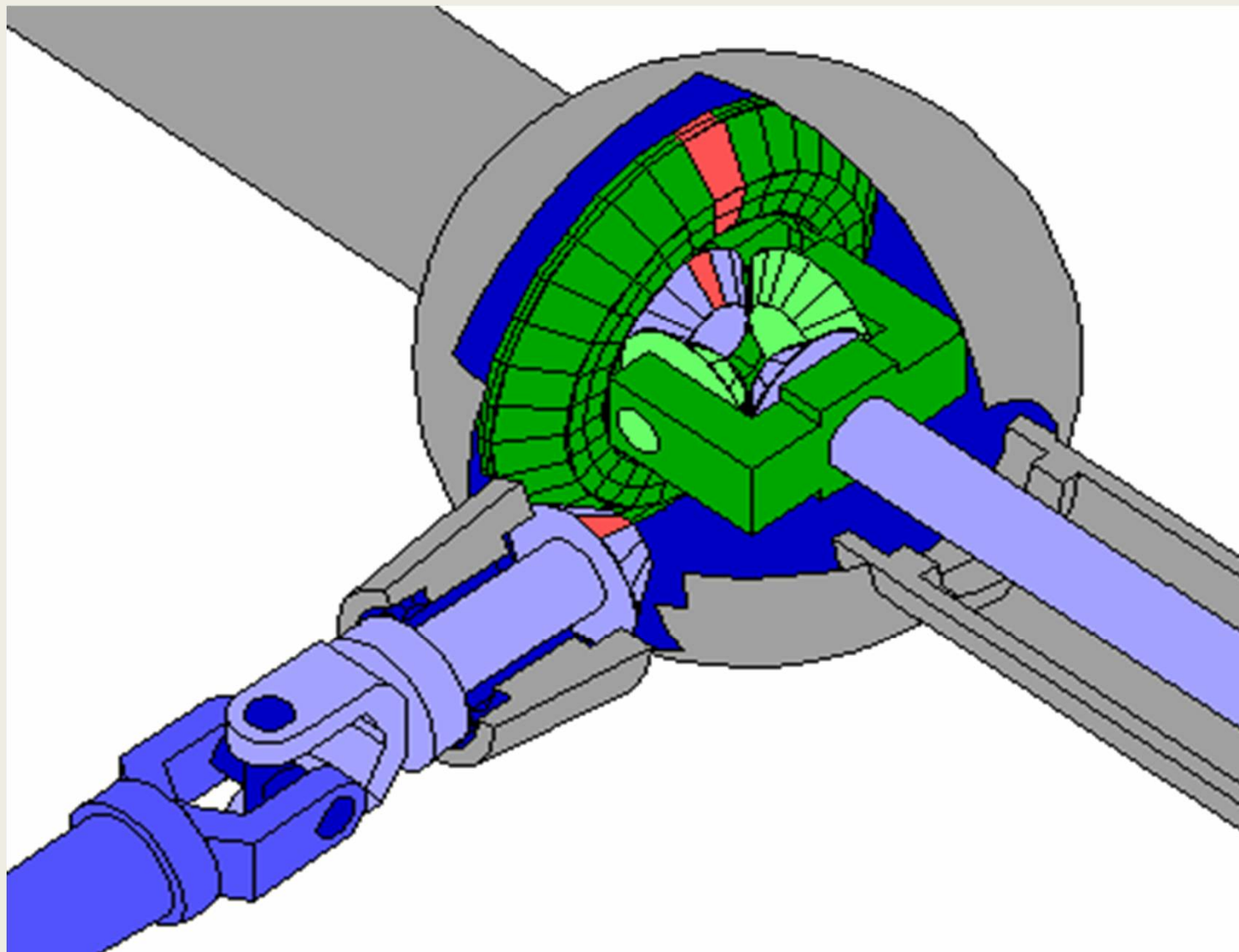


**Cátedra:**  
**MECÁNICA**  
**APLICADA-**  
**MECÁNICA Y**  
**MECANISMOS**

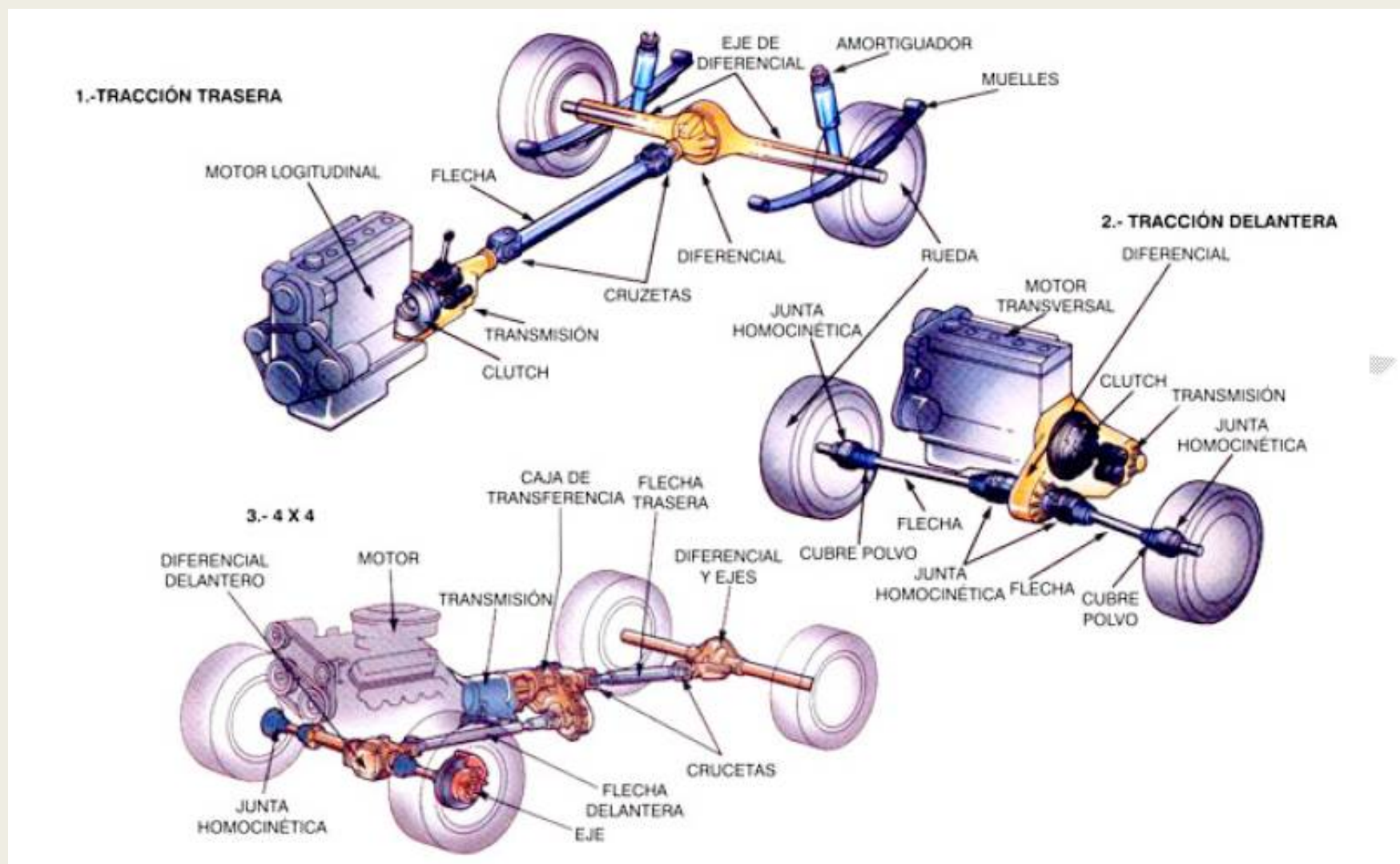


**16:45**

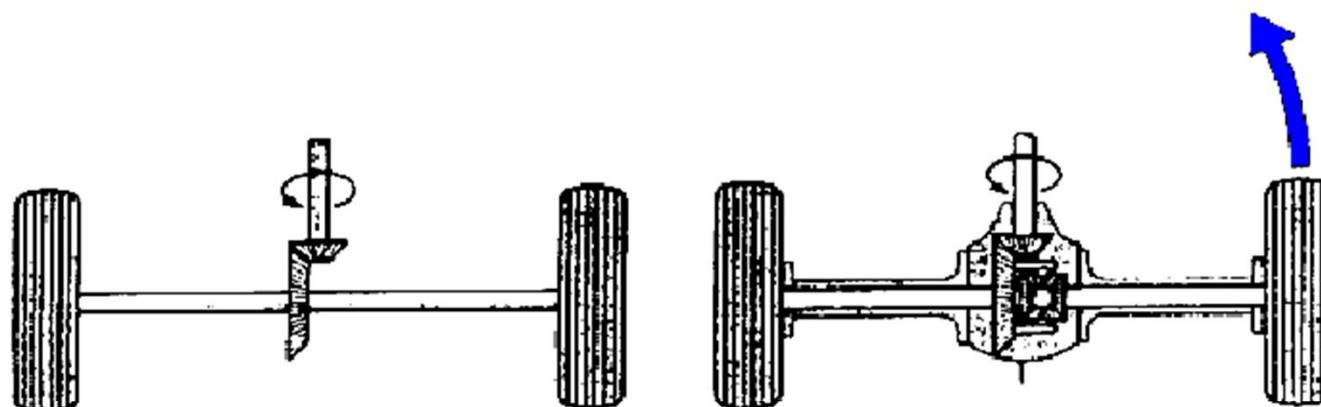
**Ing. Carlos Barrera**



16:45



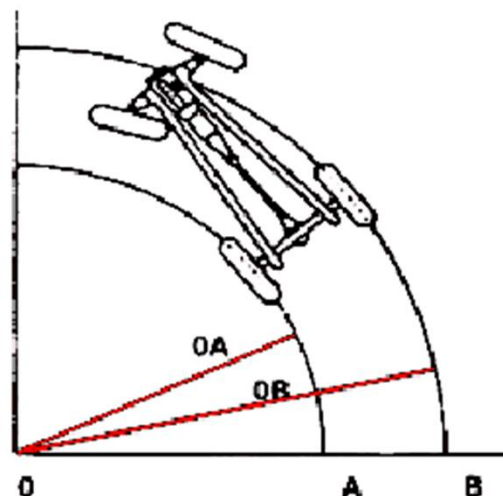




Diferencial

Origina que gire  
lentamente

Origina que gire  
rapidamente



Distancia A < Distancia B

$\omega_A$  : RPM de rueda interior  
 $\omega_B$  : RPM de rueda exterior

RPM : Revoluciones por minuto

**Diferencia de la Trayectoria de las Ruedas**

Si la corona, a la que hace girar el piñón de ataque, está unida a un eje en cuyos extremos se encuentran las ruedas, el mismo número de vueltas dará la rueda de la derecha que la de la izquierda. Pero en una curva la rueda interior recorre el trayecto OA mientras que la externa recorre el trayecto OB, que es una distancia mayor.

Estos caminos desiguales son efectuados al mismo tiempo y suponemos que las dos ruedas darán igual número de vueltas, por lo que siendo de igual tamaño, una será arrastrada por la otra, patinando sobre el piso.

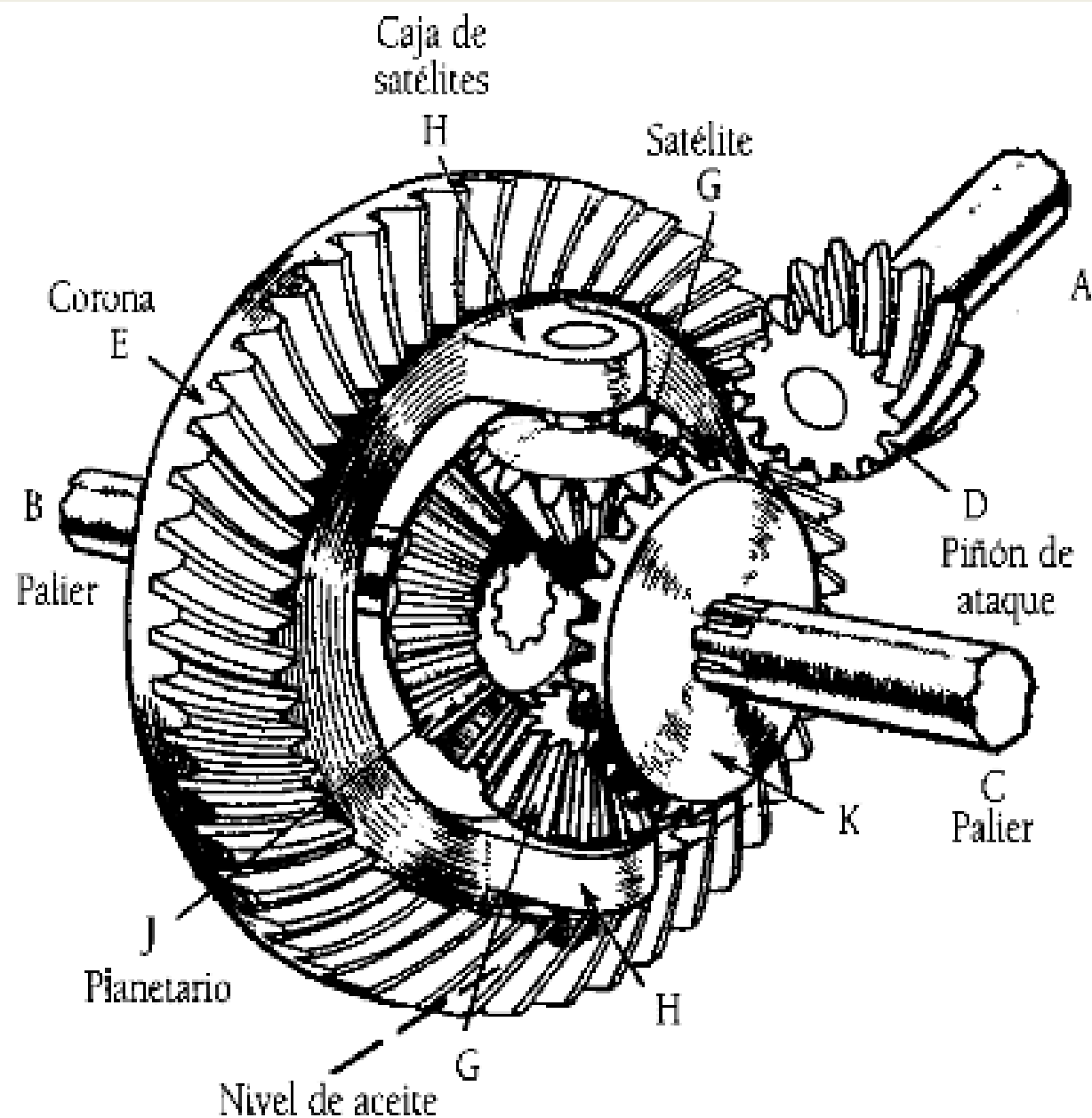
Para evitar esto se recurre al **DIFERENCIAL**, mecanismo que hace dar mayor número de vueltas a la rueda que en la curva le corresponde recorrer la parte externa y disminuye las de la parte interna.

Está constituido por un piñón planetario K solidario de un árbol C y otro planetario J solidario del árbol B.

Cada una de las ruedas motrices va montada en el otro extremo de dichos árboles, llamados semiejes o palieres.

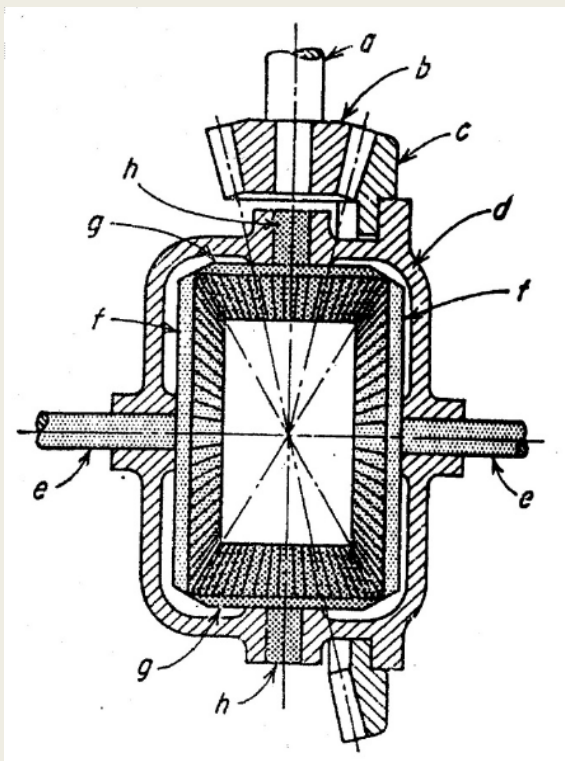
Entre los piñones K y J van situados los satélites G, que pueden girar alrededor de sus ejes H.







	<i>rueda "f" (fija)</i>	<i>Elemento "d" o "c" (brazo)</i>	<i>rueda "g" (brazo)</i>	<i>rueda "f" (libre)</i>
<b>Movimiento con el elemento "d" (brazo)</b>	+1	+1	----	+1
<b>Movimiento relativo al elemento "d" (brazo bloqueado)</b>	-1	0	----	$+\frac{f}{g} \cdot \frac{g}{f}$
<b>Movimiento total</b>	0	+1	----	$1 + \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{f} = 2$



**La rueda izquierda f gira a doble velocidad que la c y en el mismo sentido.**

**16:45**







**Estas dos ruedas están montadas sobre ejes independientes montados sobre soportes.**

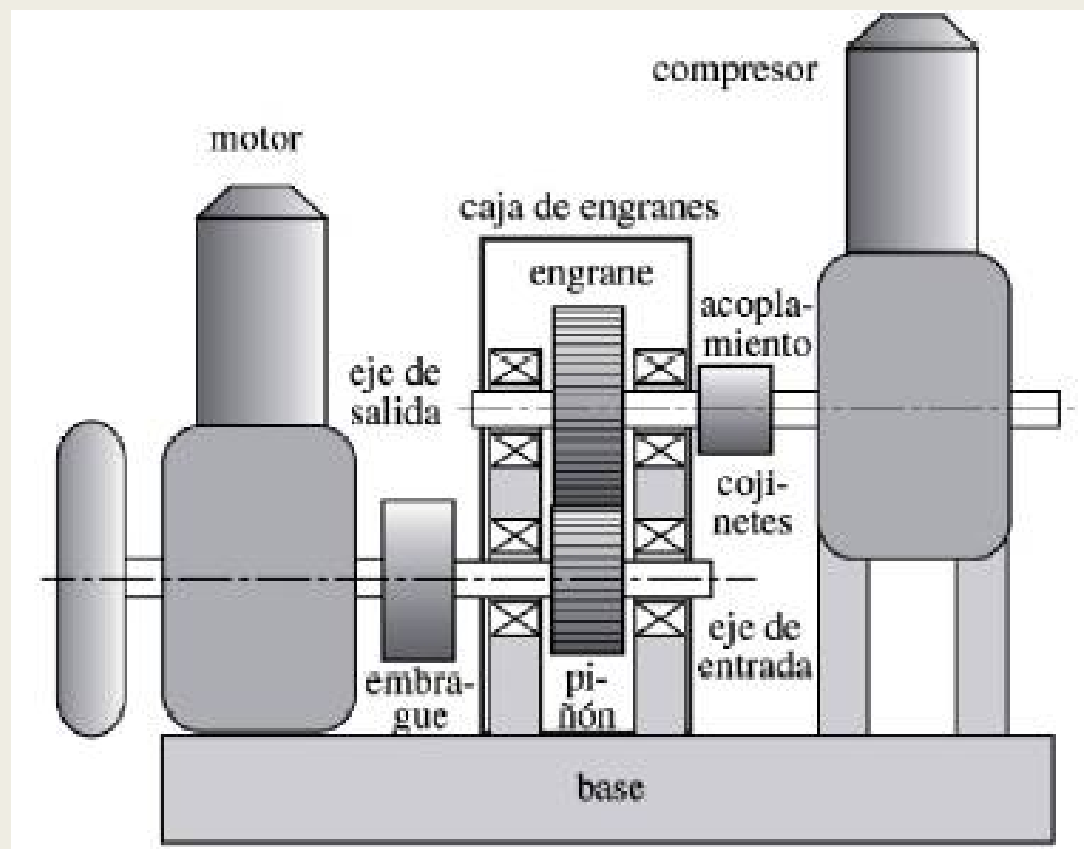
**16:45**



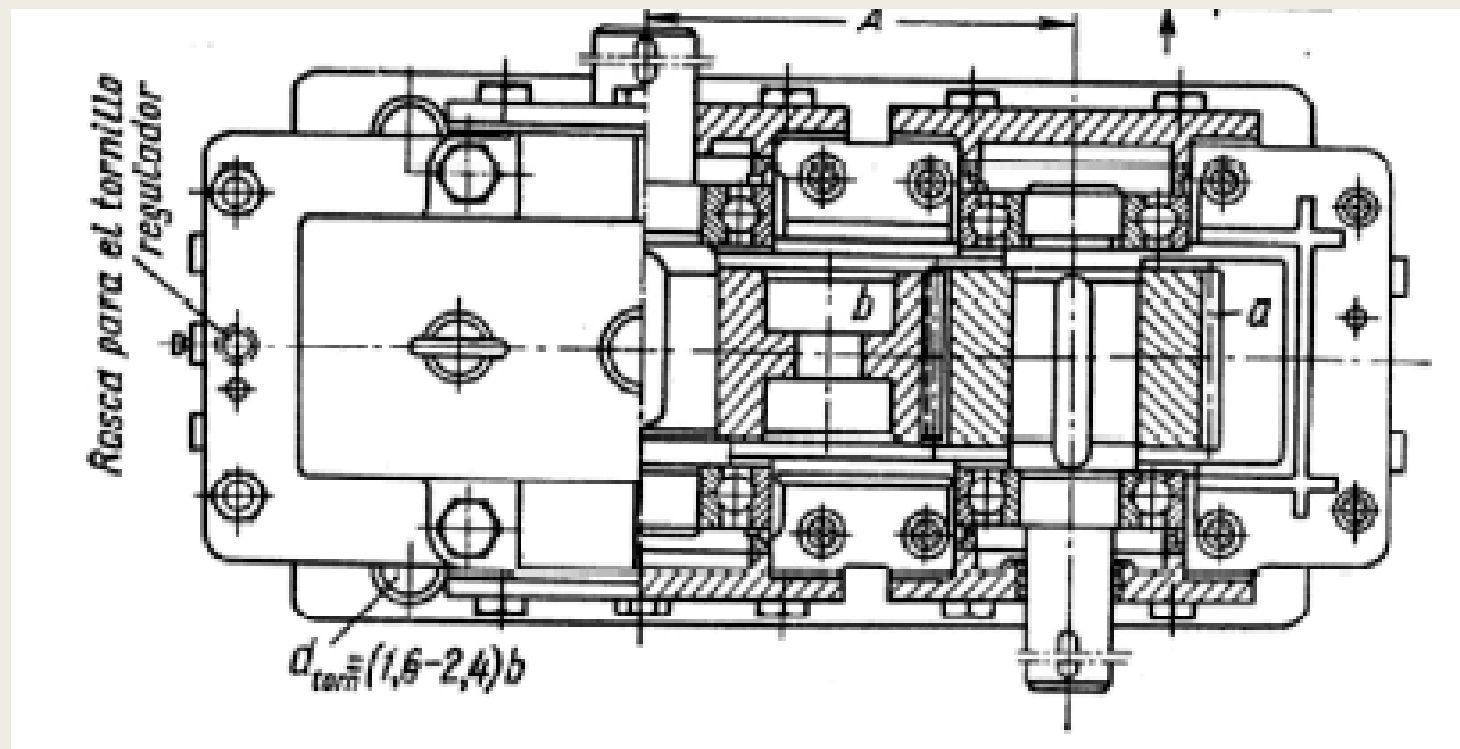
# REDUCTOR DE VELOCIDAD

En algunas aplicaciones las transmisiones por engranajes se utilizan como grupos independientes con el fin de disminuir la velocidad angular del árbol conducido y aumentar el torque.

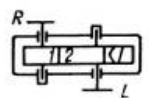
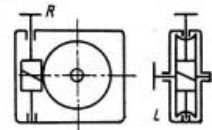
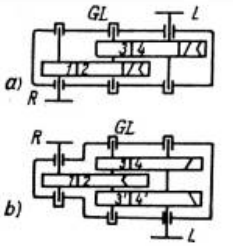
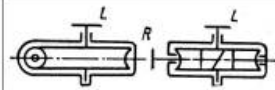
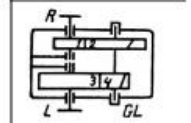
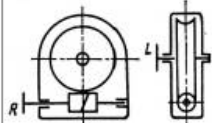
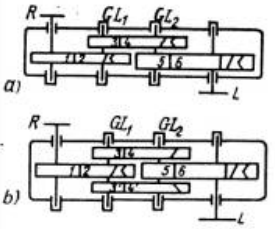
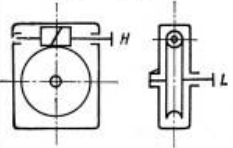
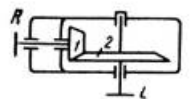
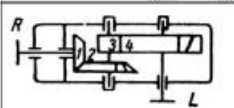
Todo este sistema recibe el nombre de reductor de velocidad. Tenemos reductores de engranajes cilíndricos, cónicos, planetarios, por tornillos sin fin y mixtos.



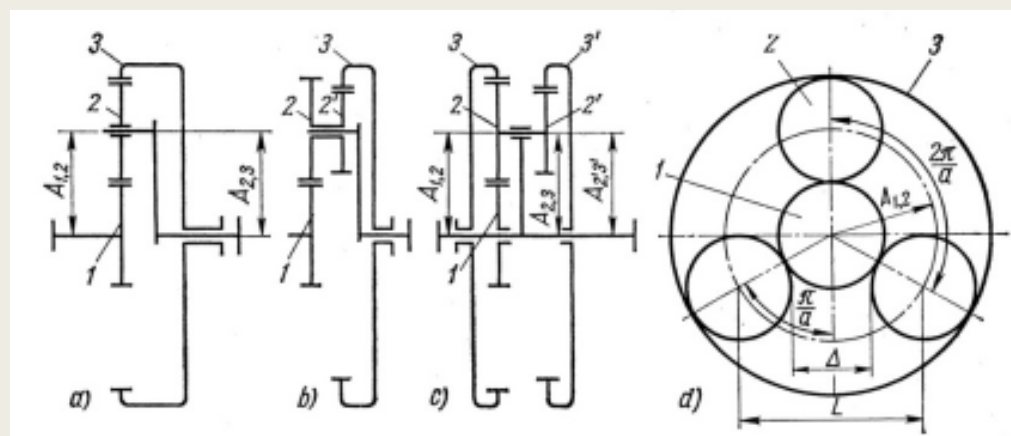
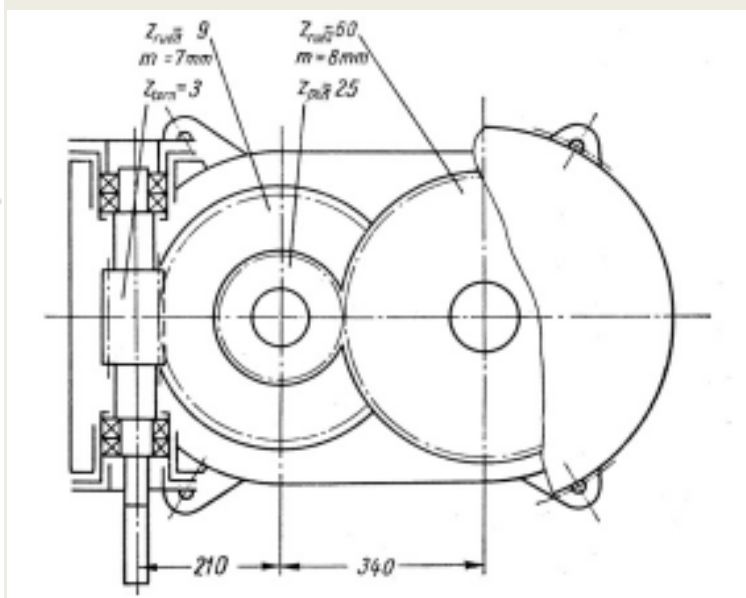
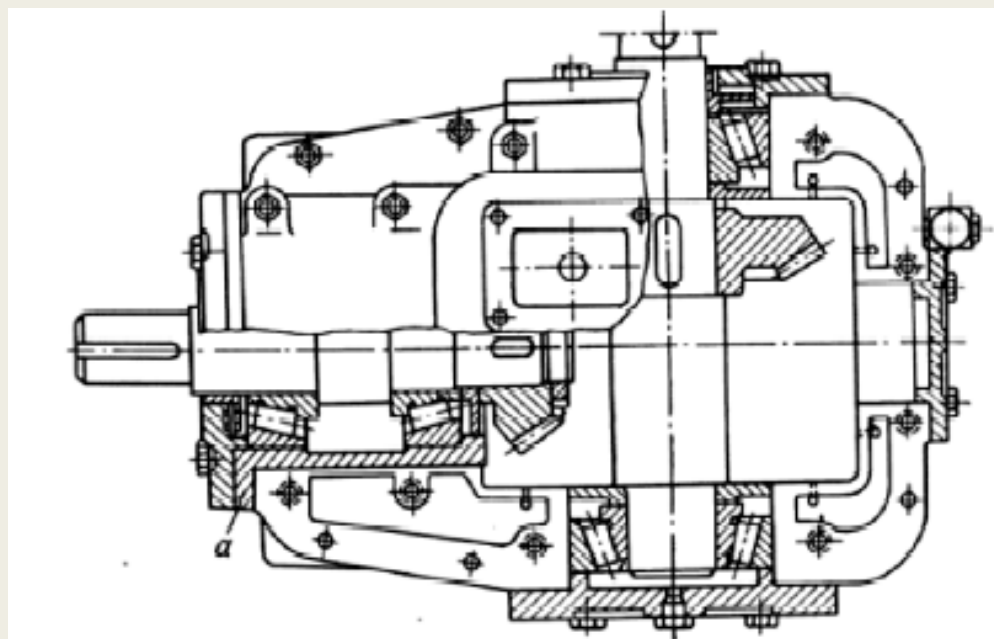
Un par de ruedas dentadas cilíndricas es eficiente en el funcionamiento y se usa para un amplio rango de potencias, con relaciones de engrane pequeñas ( $1 \leq i \leq 10$ ).



En caso de necesitar mayores relaciones de engrane, se emplean reductores de varias etapas, mostrados en la tabla.

Item	Esquema	Engranajes	Item	Esquema	Engranajes
1		Cilíndricos, de una etapa	7		Sin fin-Corona, una etapa, con sin fin vertical
2		Cilíndricos, de dos etapas	8		Sin fin-Corona, una etapa, con sin fin lateral
3		Cilíndricos, de 2 etapas, concurrente.	9		Sin fin-Corona, una etapa, con sin fin inferior
4		Cilíndricos, de 3 etapas	10		Sin fin-Corona, una etapa, con sin fin superior
5		Cónico, una etapa			
6		Combinado conico-Cilindrico, 2 etapas			





Al seleccionar un reductor es necesario analizar el rendimiento, las dimensiones exteriores, el peso, costo de fabricación, posición de los ejes, etc.

El rendimiento de una transmisión por engranaje es bastante mayor que el de las transmisiones por tornillo sin fin.

La comparación de distintos tipos de reductores por las dimensiones exteriores nos indica que con pequeñas relaciones de engrane los reductores por tornillo sin fin resultan de mayor tamaño.

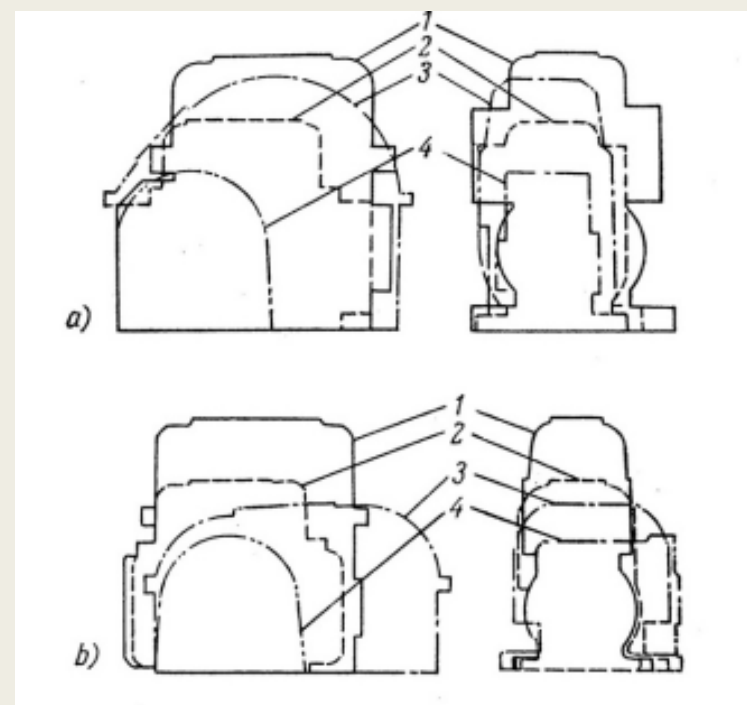
En la figura se representan los tamaños de los reductores

1-reductor por tornillo sin fin cilíndrico con Rueda Helicoidal.

2-reductor por tornillo globoidal

3- reductor de engranaje con ruedas Cilíndricas.

4- reductor planetario



Para las armazones de los reductores se emplea la fundición. La forma de los elementos del bastidor debe tener una cantidad mínima de nervios, rebordes, etc

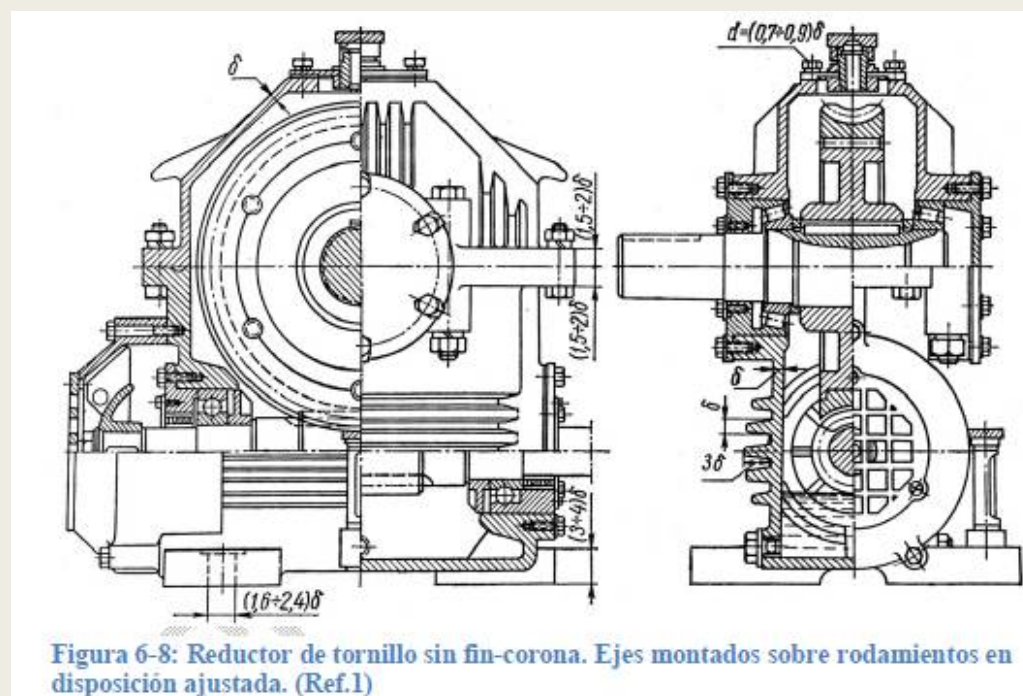
El mecanizado para los cojinetes o para los rodamientos, se realiza con exactitud.

En los árboles de los reductores de pequeña y mediana potencia se emplean cojinetes de contacto rodante, en los reductores de gran potencia, cojinetes planos.

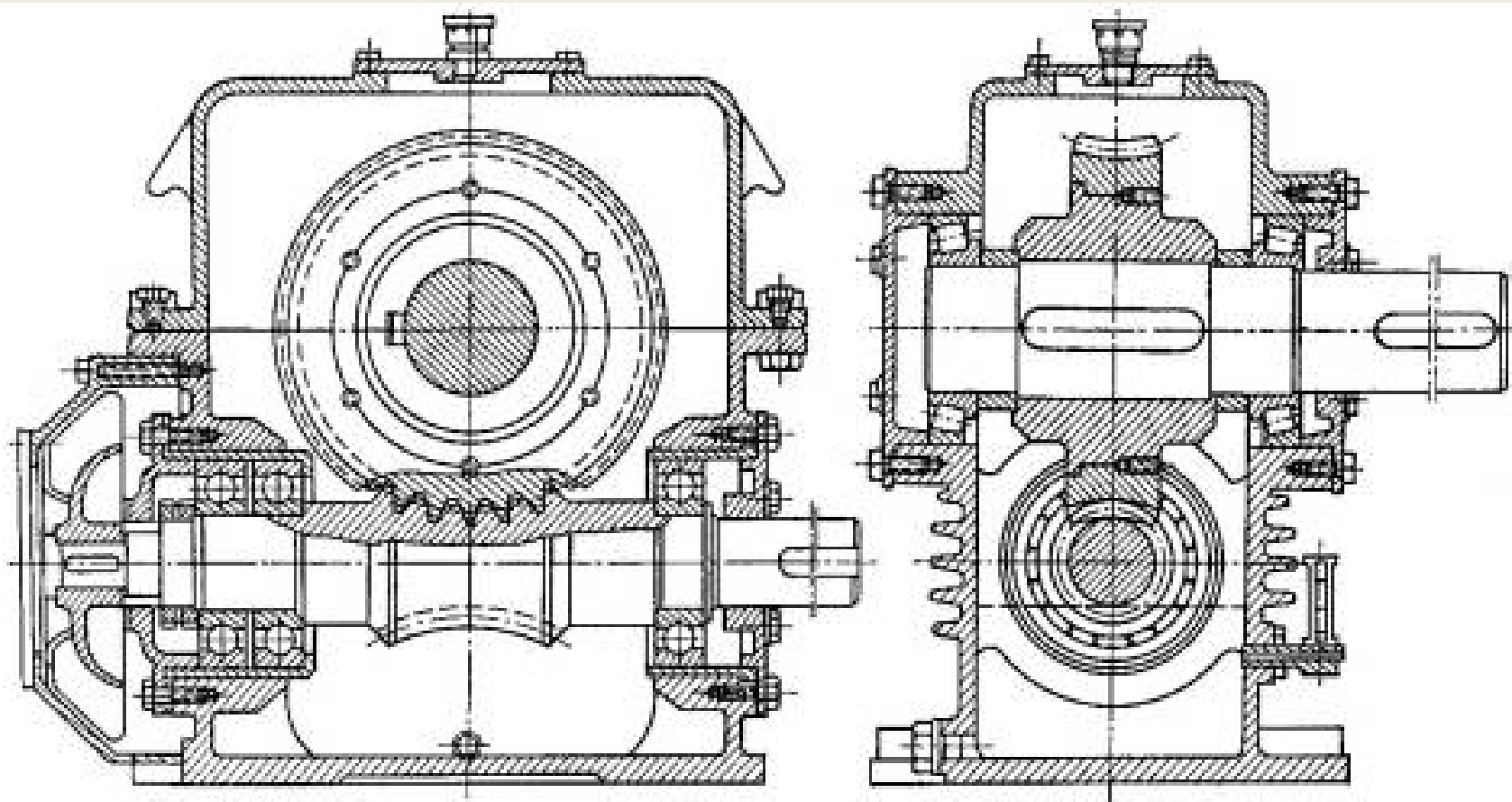
Para las ruedas de dientes rectos, se pueden emplear rodamientos de cualquier tipo.

Los árboles con ruedas de dientes helicoidales se montan sobre rodamientos de bolas rígidos o cónicos de una fila.

En los reductores por tornillo sin fin se emplean fundamentalmente rodamientos angulares.



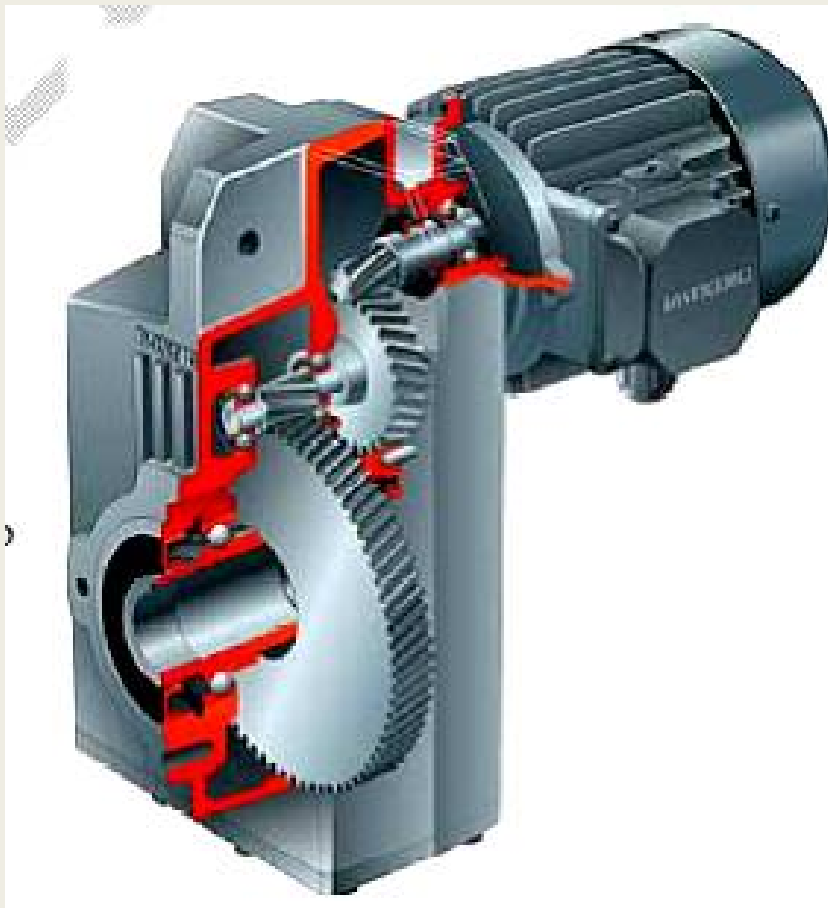




**Figura 6-9: Reductor de tornillo sin fin-corona. Ejes montados sobre rodamientos en disposición fijo-libre (Ref.1)**

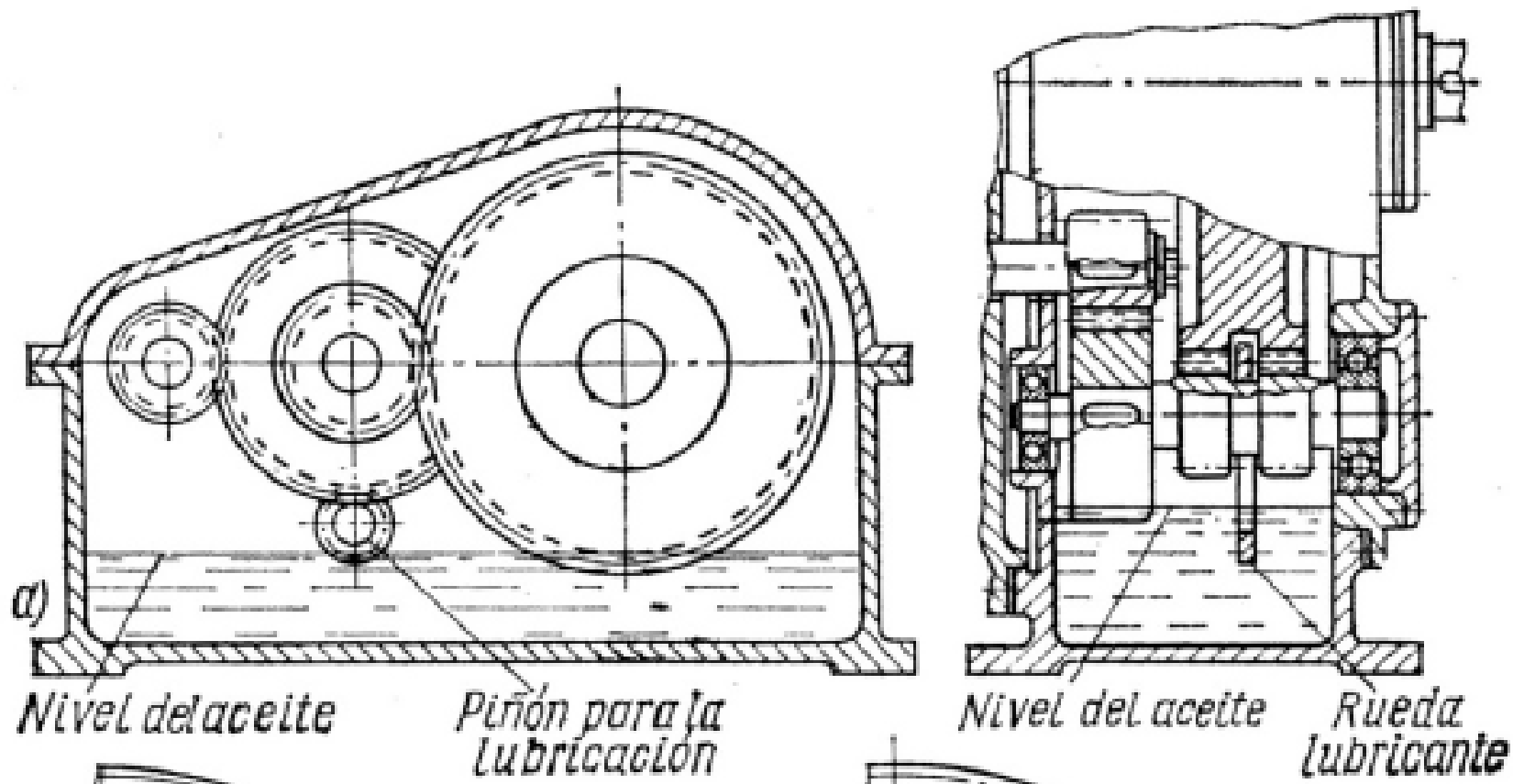
# Motoreductores

**Estos reductores se montan en un bastidor con el motor eléctrico acoplado y se emplean para potencias pequeñas.**



16:45

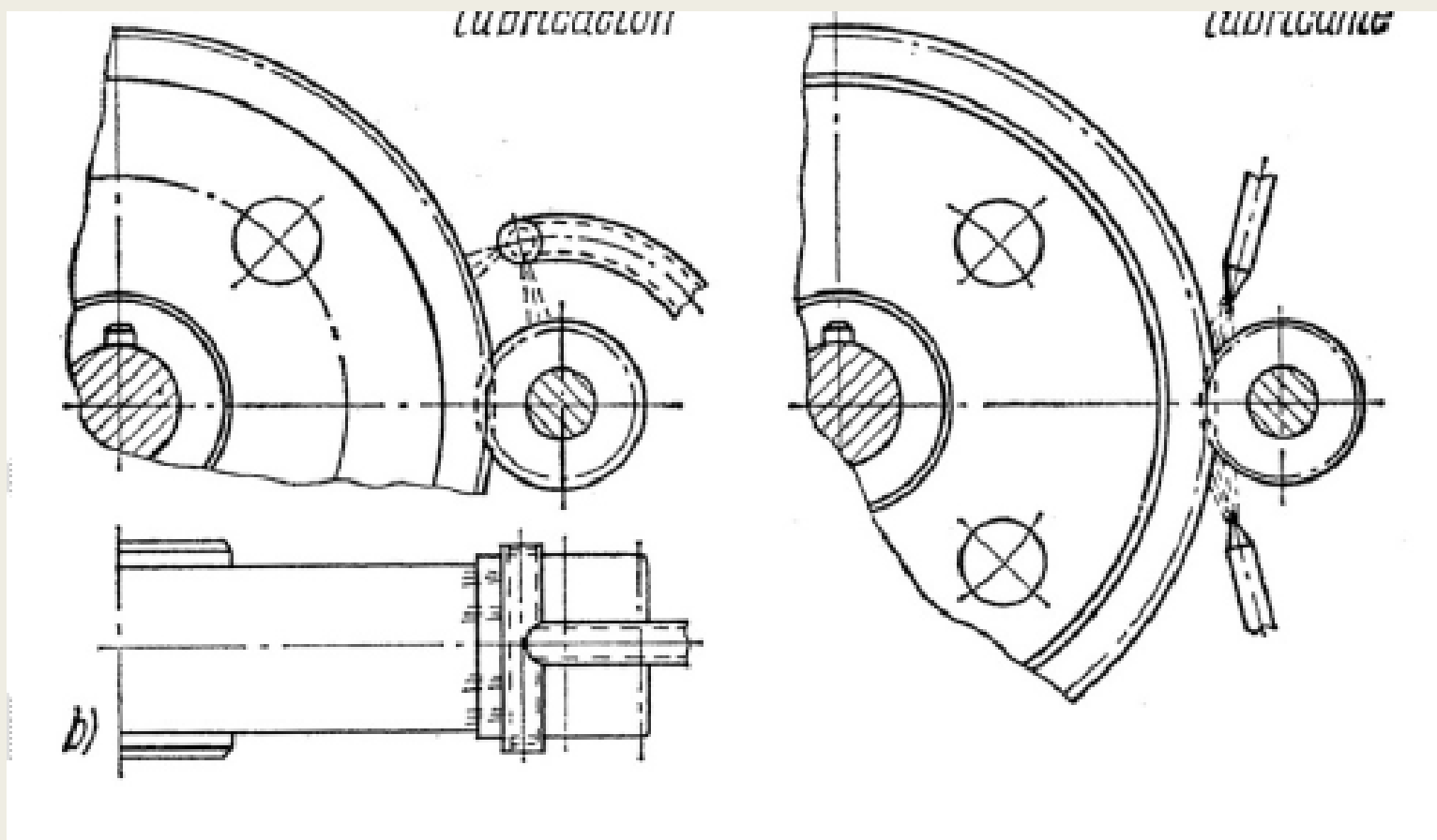
# LUBRICACIÓN



16:45



Los engranajes de los reductores se lubrican con aceite (lubricación por inmersión) o se sumergen las ruedas dentadas en un baño de aceite o bien se hace llegar el aceite a la zona de engrane (lubricación por chorro). La lubricación más eficiente de los reductores de potencia media es la lubricación por niebla de aceite.



**Cátedra:**  
**MECÁNICA**  
**APLICADA-**  
**MECÁNICA Y**  
**MECANISMOS**



**16:45**

**Cátedra:**  
**MECÁNICA**  
**APLICADA-**  
**MECÁNICA Y**  
**MECANISMOS**



**16:45**



**Cátedra:**  
**MECÁNICA**  
**APLICADA-**  
**MECÁNICA Y**  
**MECANISMOS**



**16:45**

**Cátedra:**  
**MECÁNICA**  
**APLICADA-**  
**MECÁNICA Y**  
**MECANISMOS**

# AGNEE



**AGNEE**  
**Transmissions**

**16:45**

# BIBLIOGRAFÍA

- |                                |            |
|--------------------------------|------------|
| •Diseño de máquinas            | R. Norton  |
| •Elementos de Máquinas         | G. Niemann |
| •Diseño en Ingeniería Mecánica | Shigley    |
| •Elementos de Mecanismos       | Doughtie   |