FACULTAD DE INGENIERÍA

CUERPO RÍGIDO
ENERGÍA Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ing. Carlos Barrera-2025

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS

OBJETIVOS

Estudiar el método del Trabajo y la Energía

- **Aplicar y analizar el movimiento de cuerpos rígidos y sistemas de cuerpos rígidos**

16:58

Ing. Carlos Barrera

Principio del Trabajo y la Energía para un cuerpo rígido

Para aplicar el principio del trabajo y la energía en un cuerpo rígido, se divide al cuerpo en un gran número n de partículas

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$$

T_1, T_2 **Valores inicial y final energía cinética total de las partículas que forman el cuerpo rígido.**

U_{1-2} **Trabajo de todas las fuerzas que actúan.**

La energía cinética total:

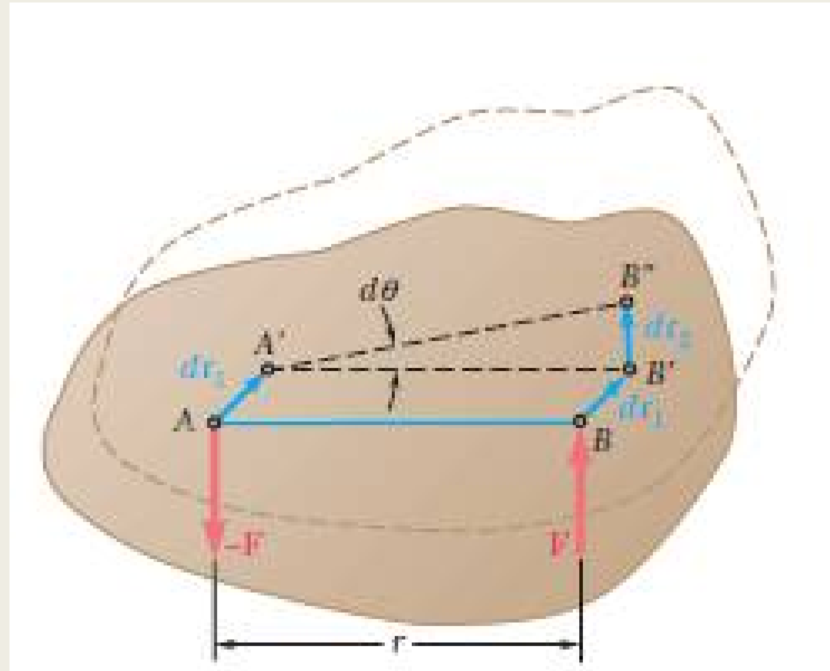
$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i^2$$

U_{1-2} **representa el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre las partículas del cuerpo, internas o externas. Como el trabajo total de las fuerzas internas es cero, en la fórmula se considera el trabajo de las fuerzas externas.**

Trabajo de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido

$$U_{1\to 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$U_{1\to 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha)\, ds$$



α es el ángulo que forma con la dirección de movimiento de su punto de aplicación A y s es la variable de integración que mide la distancia recorrida por A a lo largo de su trayectoria.

Para calcular el trabajo de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido, es conveniente calcular el trabajo de un par de fuerzas sin considerar por separado el trabajo de cada una de las fuerzas.

$$ds_2 = r\, d\theta$$

$$dU = F\, ds_2 = Fr\, d\theta.$$

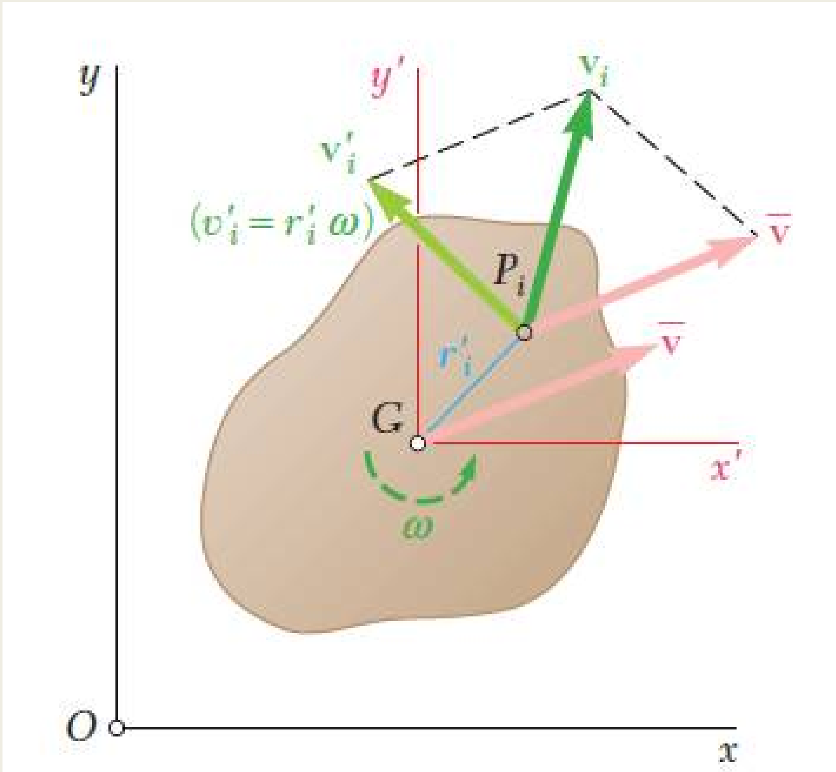
$$dU = M\, d\theta$$

$$U_{1\to 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\, d\theta$$

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS

Energía Cinética de un cuerpo rígido



$$T = \tfrac{1}{2} m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i\, v_i'^2$$

$v_i' \quad r_i'\omega$

$$T = \tfrac{1}{2} m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i'^2\, \Delta m_i\right)\omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$$

En el caso particular de un cuerpo en traslación $\omega = 0$ **la expresión que se obtiene es** $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$

En el caso de una rotación centroidal $(\bar{v} = 0)$ **la expresión se reduce a** $\frac{1}{2}I\bar{\omega}^2$

La energía cinética de un cuerpo rígido puede descomponerse en dos partes: la energía cinética asociada con el movimiento del centro de masa G del cuerpo y la energía cinética asociada con la rotación del cuerpo alrededor de G.

16:58

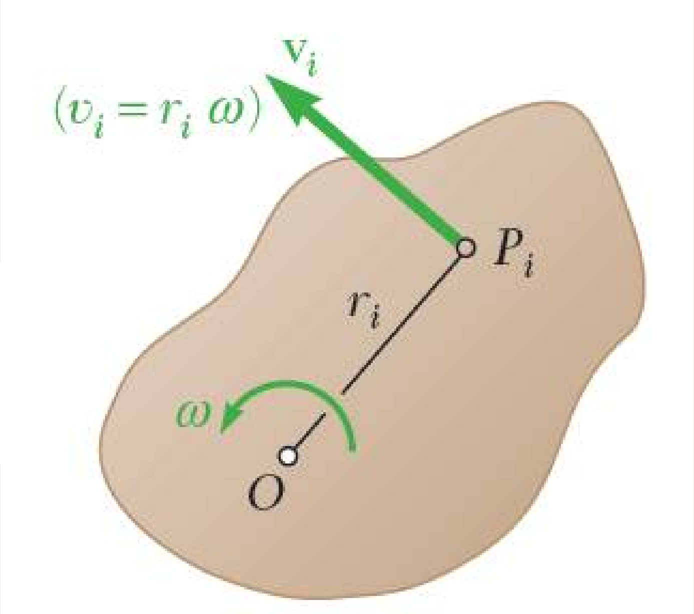
Ing. Carlos Barrera

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS

Rotación no centroidal

La energía cinética de un cuerpo rígido que gira con una velocidad angular alrededor de un eje fijo que pasa por O



$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2\,\Delta m_i\right)\omega^2$$

$$T = \tfrac{1}{2} I_O \omega^2$$

Cuando se tiene varios cuerpos rígidos el principio del trabajo y la energía puede aplicarse a cada cuerpo. Puede escribirse:

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2$$

T representa la suma de las energías cinéticas de los cuerpos rígidos que forman el sistema.

$U_{1\rightarrow 2}$ **representa el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre los distintos cuerpos.**

16:58

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

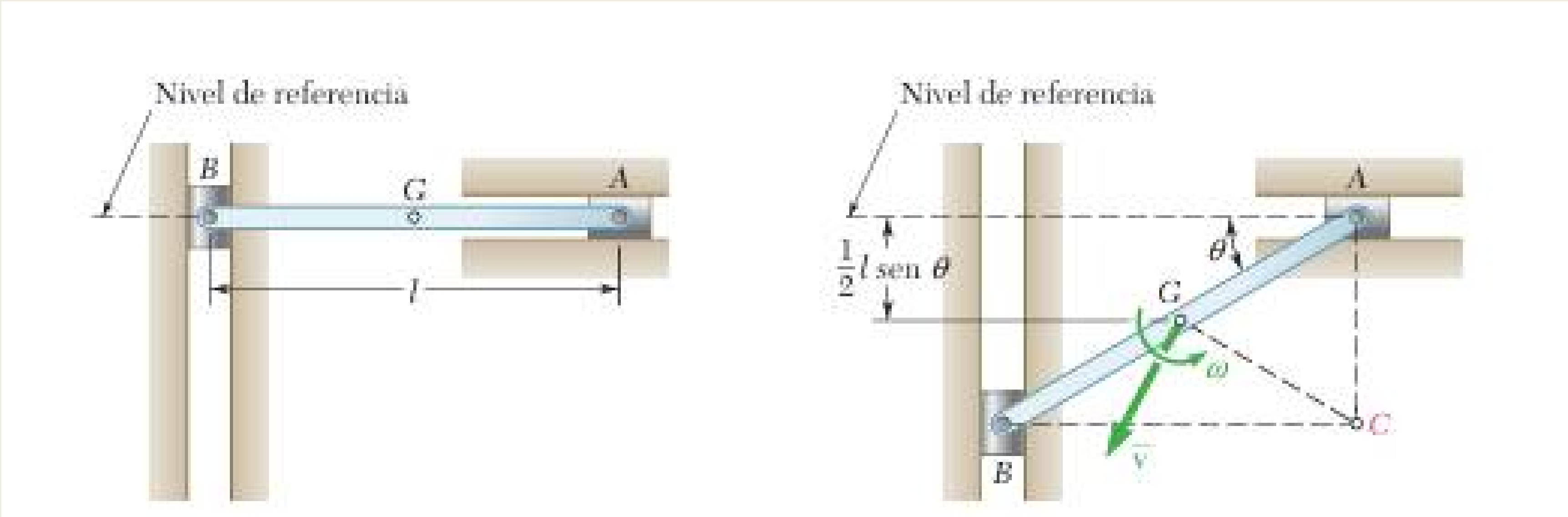
Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS

Conservación de la energía

Cuando un cuerpo rígido , o un sistema de cuerpos rígidos, se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, la suma de la energía cinética y de la energía potencial del sistema permanece constante.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

El método del trabajo y la energía debe complementarse con la aplicación del principio de D´Alembert cuando se van a determinar reacciones.



UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA-MECÁNICA Y MECANISMOS

La velocidad inicial es nula T1=0

La energía potencial es inexistente V1=0

La barra ha girado un ángulo Θ, el centro de gravedad de la barra se encuentra a la distancia

$$\frac{1}{2} l \, sen\Theta$$

La energía potencial:

$$V_2 = -\frac{1}{2} w l \, sen\Theta = -\frac{1}{2} mglsen\,\Theta$$

CG= ½ l por lo tanto : $\overline{v_2} = \frac{1}{2} l\omega$

La energía cinética final es

$$T_2 = \frac{1}{2} m\, v_2^2 + \frac{1}{2} I\omega_2^2 = \frac{1}{2} m\,(\frac{1}{2} l\omega)^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{12} ml^2)\omega^2.$$

16:58

$$= \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega^2$$

Aplicando el principio de conservación de la energía

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega^2 - \frac{1}{2} mgl\, sen\, \theta$$

$$\omega = \left(\frac{3\, g}{l}\, sen\, \theta\right)^{1/2}$$

Potencia

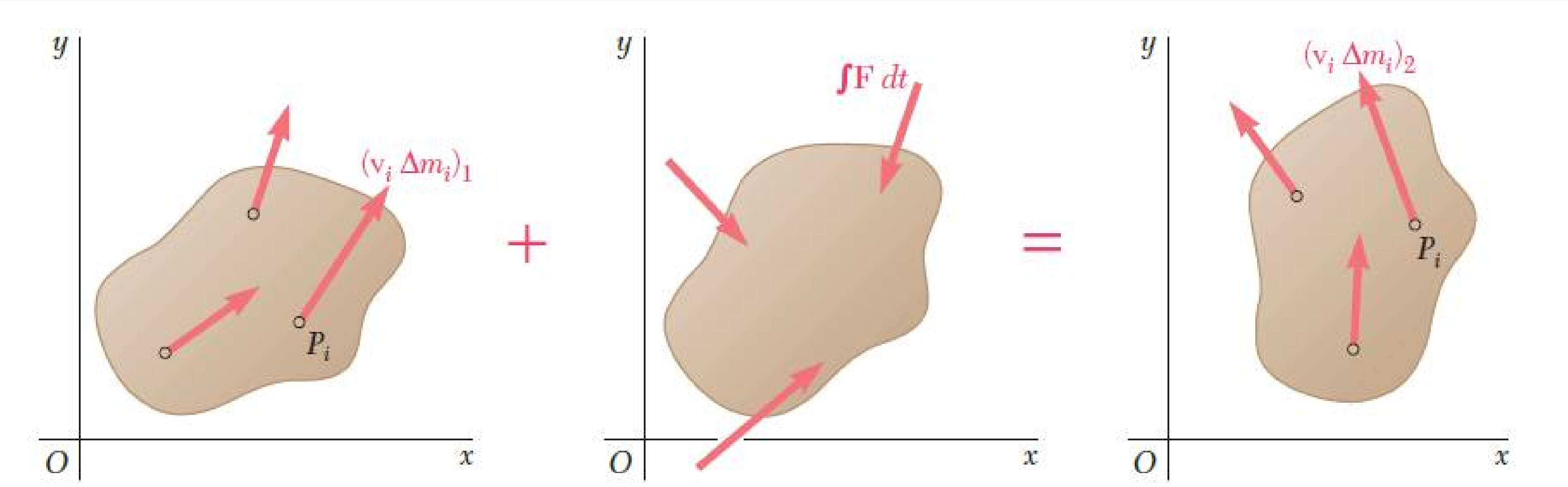
La potencia es la rapidez con la cual se realiza el trabajo. Se puede expresar:

P= F. v

Para el caso de un cuerpo rígido que gira con velocidad angular w y se somete a la acción de un momento M paralelo al eje de rotación se tiene:

P= M. w

Principio del Impulso y la Cantidad de Movimiento



Sist. Cant. Mov.$_1$ + Sist. Imp. Ext.$_{1\rightarrow 2}$ = Sist. Cant. Mov.$_2$

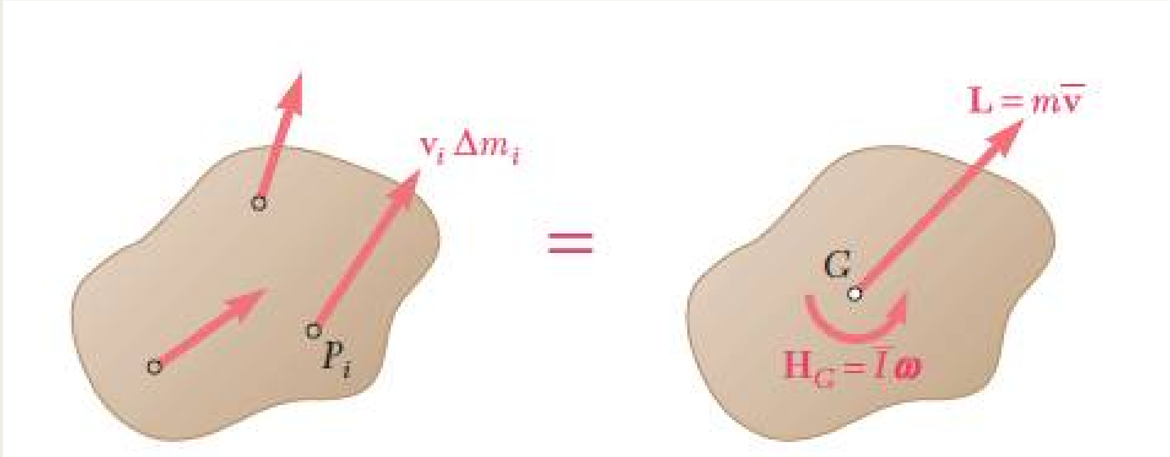
$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i\, \Delta m_i$$

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_i\, \Delta m_i$$

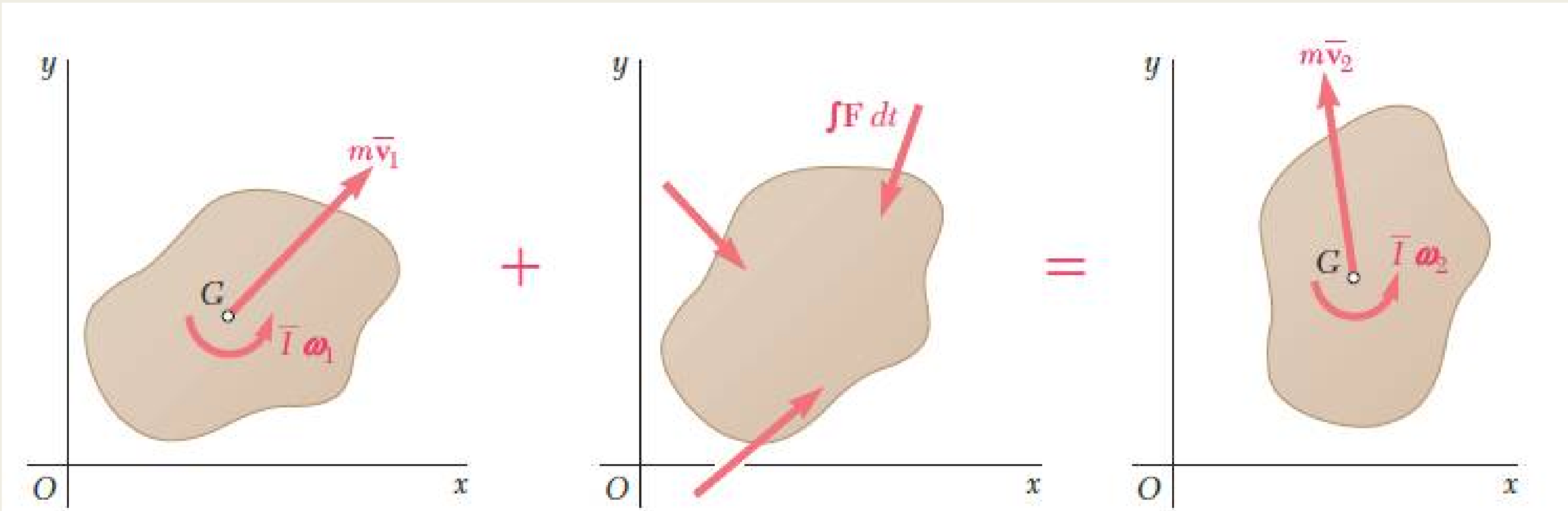
$$\mathbf{L} = m\bar{\mathbf{v}} \qquad \mathbf{H}_G = \bar{I}\omega$$

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS



Al sustituir el sistema de cantidades de movimiento por el vector de movimiento lineal y el par de cantidad de movimiento angular, se obtienen:



16:58

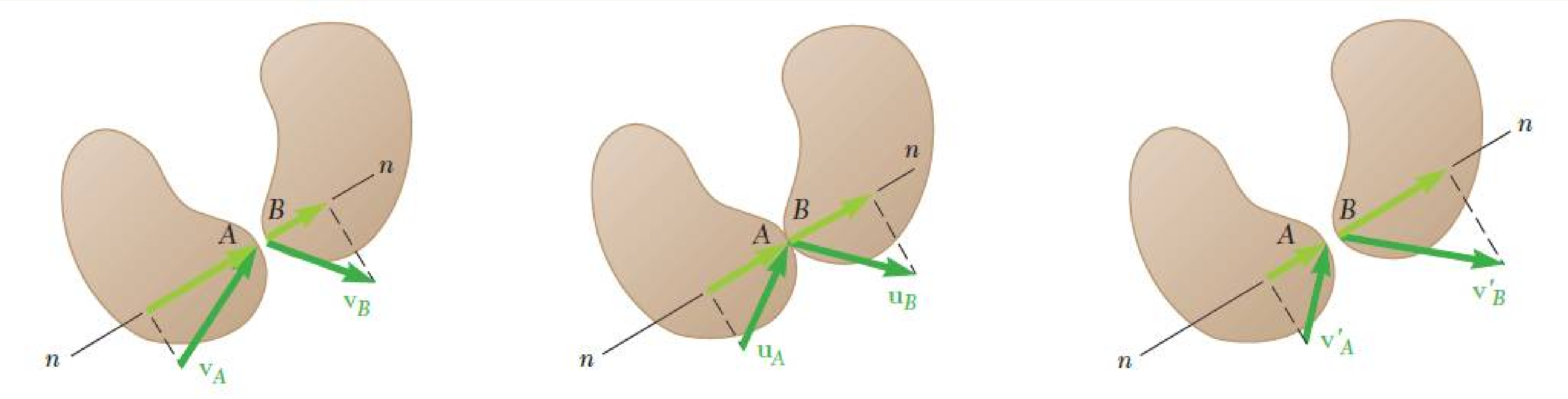
Ing. Carlos Barrera

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS

Impacto Excéntrico



V_A y V_B	**Velocidades antes del impacto de los dos puntos de contacto A y B**
u_A y u_B	**Velocidades al final del período de deformación**
V'_A y V'_B	**Velocidades al final del período de restitución**

El coeficiente de restitución:

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt}$$

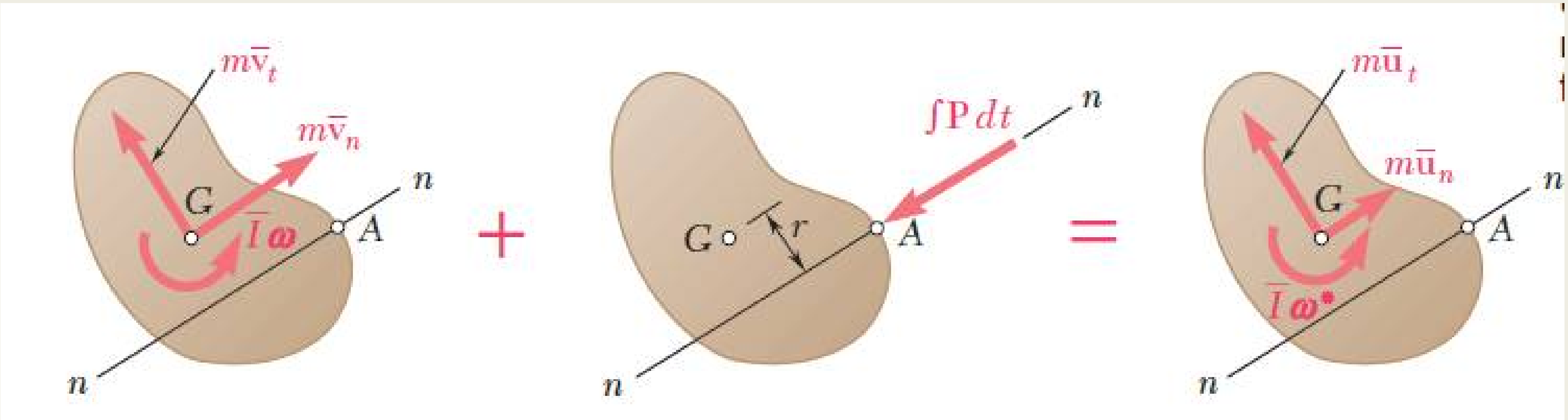
Se demostrará que la relación entre las velocidades relativas de las partículas antes y después del impacto también se cumple entre las componentes a lo largo de la línea de impacto.

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n]$$

16:58

Ing. Carlos Barrera

Los diagramas de cantidad de movimiento e impulso correspondientes al período de deformación



$\bar{\mathrm{v}}$ y $\bar{\mathrm{u}}$ **Velocidad del centro de masa al principio y al final del período de deformación**

ω y ω^{o} **Velocidad angular en los mismos instantes.**

Durante el período de deformación:

$$m\bar{v}_n - \int P\,dt = m\bar{u}_n$$

$$\bar{I}\omega - r\int P\,dt = \bar{I}\omega^*$$

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA-MECÁNICA Y MECANISMOS

16:58

Ing. Carlos Barrera

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS

Durante el período de restitución:

$$m\bar{u}_n - \int R\,dt = m\bar{v}'_n$$
$$\bar{I}\omega^* - r\int R\,dt = \bar{I}\omega'$$

$\bar{\mathbf{v}}'$ y ω' **Velocidad del centro de masa y velocidad angular del cuerpo después del impacto**

Resolviendo y reemplazando:

$$e = \frac{\bar{u}_n - \bar{v}'_n}{\bar{v}_n - \bar{u}_n} \qquad e = \frac{\omega^* - \omega'}{\omega - \omega^*}$$

Si se multiplica por r el numerador y el denominador de la segunda expresión y se suma al numerador y denominador de la primera expresión, se tiene:

$$e = \frac{\bar{u}_n + r\omega^* - (\bar{v}'_n + r\omega')}{\bar{v}_n + r\omega - (\bar{u}_n + r\omega^*)}$$

$\bar{v}_n + r\omega$ representa la componente $(v_A)_n$

$$e = \frac{(u_A)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (u_A)_n}$$

El análisis del movimiento del segundo cuerpo lleva a una expresión similar para el coeficiente de restitución en términos de las componentes a lo largo de nn de las velocidades del punto B.

16:58

Ing. Carlos Barrera

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA- MECÁNICA Y MECANISMOS

BIBLIOGRAFIA

- Mecánica Vectorial para Ingenieros 8º Edición Beer Johnston
- Ingeniería Mecánica Dinámica Hibbeler

C

16:58

Diapositiva 15

CB1 Carlos Barrera; 8/9/2021