FACULTAD DE INGENIERÍA

CUERPO RÍGIDO TRIDIMENSIONAL

MECÁNICA APLICADA

MECÁNICA Y MECANISMOS

Ing. Carlos Barrera

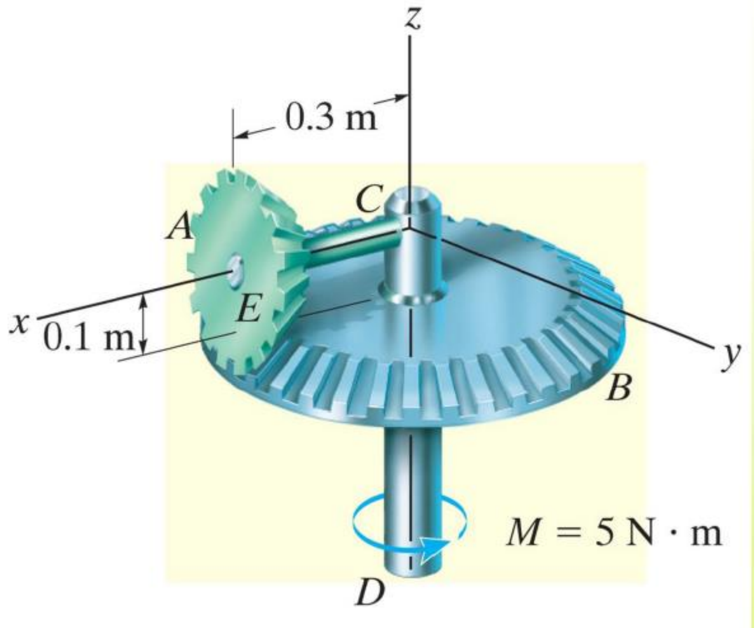
UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ejercicio N° 1

Un torque de 5 N.m es aplicado a un árbol CD mostrado en la figura, el cual permite que el engrane A de 10 kg gire libremente alrededor de CE. Suponiendo que el engrane A parte del reposo. Calcular la velocidad angular del árbol CD después que ésta ha efectuado dos revoluciones. Desprecie la masa del árbol CD y del eje CE y suponga que el engrane A puede ser aproximado por un disco delgado. El engrane B está fijo (Rusell Hibeller)



Datos:
T CD = 5 Nm
m_A = 10 Kg gira libre en CE

Incógnita: engrane A parte eposo
w_{CD}= ? cuando ha dado 2 vueltas
Suponer que el engrane A disco delgado
Engrane B esta fijo

Ing. Carlos Barrera

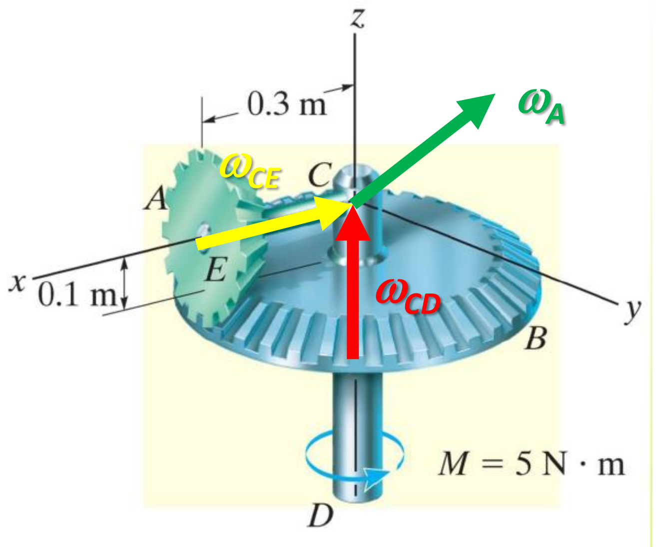
SOLUCIÓN:

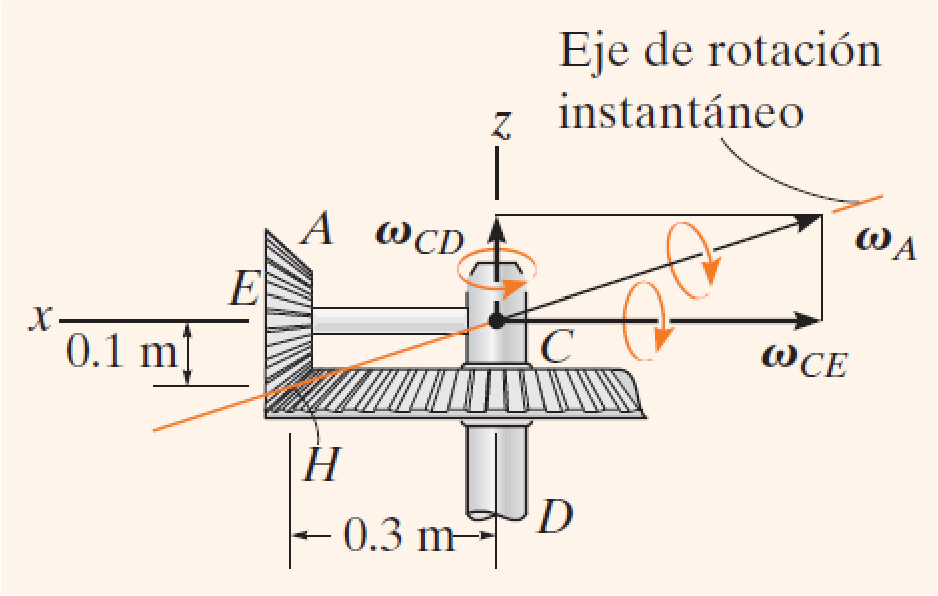
Para la solución puede utilizarse el principio de trabajo y energía. ¿Por qué?

"Una vez formulada la energía cinética de un cuerpo, puede aplicarse el *principio de trabajo y energía* para resolver problemas cinéticos que implican *fuerza*, *velocidad* y *desplazamiento*" $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

Trabajo. Si la flecha *CD*, el eje *CE* y el engrane *A* se consideran un sistema de cuerpos conectados, sólo el par de torsión aplicado **M** realiza trabajo. Con dos revoluciones de *CD*, este trabajo es

$$\Sigma U_{1-2} = (5\ \mathrm{N \cdot m2})\ (4\ \pi\ \mathrm{rad}) = 62.83\ \mathrm{J}.$$





Energía cinética. Como inicialmente el engrane está en reposo, su energía cinética inicial es cero. En la figura se muestra un diagrama cinemático del engrane.

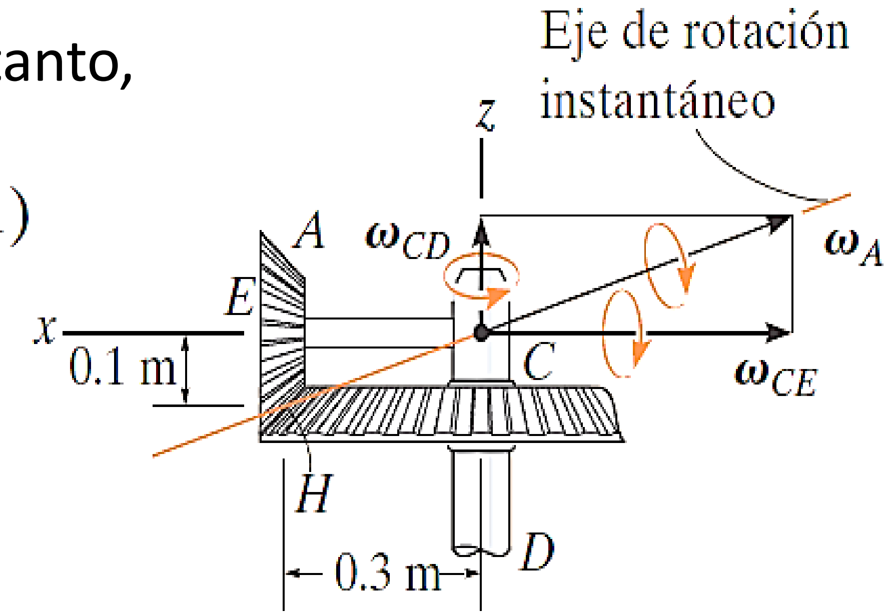
Si la velocidad angular de *CD* se considera como ω_{CD}, entonces la velocidad angular del engrane *A* es $\omega_A = \omega_{CD} + \omega_{CE}$.

El engrane puede considerarse como una parte de un cuerpo extendido sin masa, el cual gira con respecto al *punto fijo C*.

El eje instantáneo de rotación de este cuerpo está a lo largo de la línea CH, porque los puntos *C* y *H* en el cuerpo (engrane) tienen una velocidad cero y, por consiguiente, deben quedar en este eje. Esto requiere que las componentes ω_{CD} y ω_{CE} se relacionen por medio de la ecuación

$\omega_{CD}/0.1\text{ m} = \omega_{CE}/0.3\text{ m}$ o bien $\omega_{CE} = 3\,\omega_{CD}$. Por lo tanto,

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_A = -\omega_{CE}\mathbf{i} + \omega_{CD}\mathbf{k} = -3\omega_{CD}\mathbf{i} + \omega_{CD}\mathbf{k}} \qquad (1)$$



Los ejes *x*, *y*, *z* en la figura representan *ejes de inercia principales* en *C* para el engrane. Como el punto *C* es un punto de rotación fijo, puede aplicarse la ecuación para determinar la energía cinética, es decir,

$$T = \tfrac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \tfrac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \tfrac{1}{2} I_z \omega_z^2 \qquad (2)$$

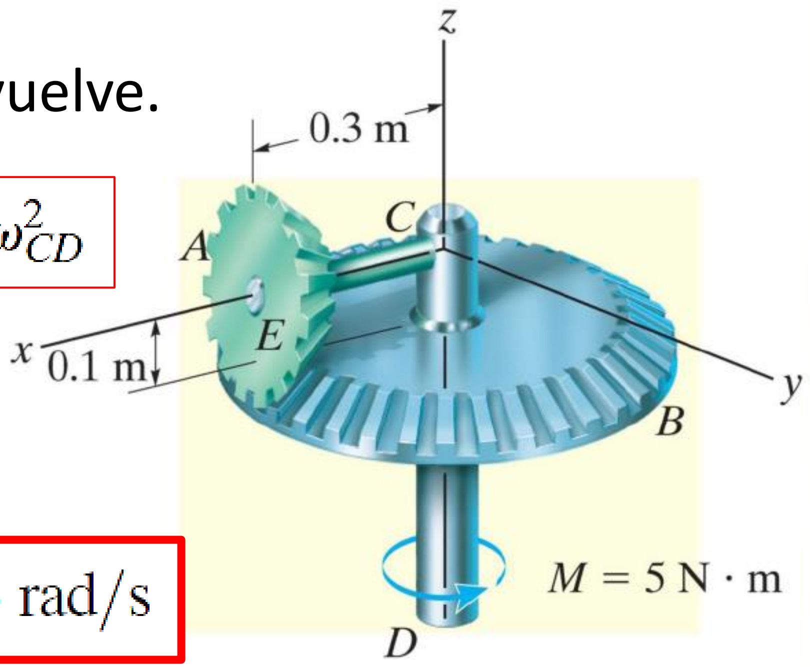
Al utilizar el teorema de los ejes paralelos, los momentos de inercia del engrane con respecto al punto C son como sigue:

$$I_x = \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(0.1\text{ m})^2 = 0.05\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}(10\text{ kg})(0.1\text{ m})^2 + 10\text{ kg}(0.3\text{ m})^2 = 0.925\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Como $\omega_X = -3\,\omega_{CD}$, $\omega_Y = 0$, $\omega_Z = \omega_{CD}$, la ecuación 2 se vuelve.

$$\boxed{T_A = \tfrac{1}{2}(0.05)(-3\omega_{CD})^2 + 0 + \tfrac{1}{2}(0.925)(\omega_{CD})^2 = 0.6875\omega_{CD}^2}$$



Principio de trabajo y energía. Aplicamos el principio de trabajo y energía, y obtenemos

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$0 + 62.83 = 0.6875\omega_{CD}^2$$

$$\boxed{\omega_{CD} = 9.56\text{ rad/s}}$$

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ejercicio N° 2

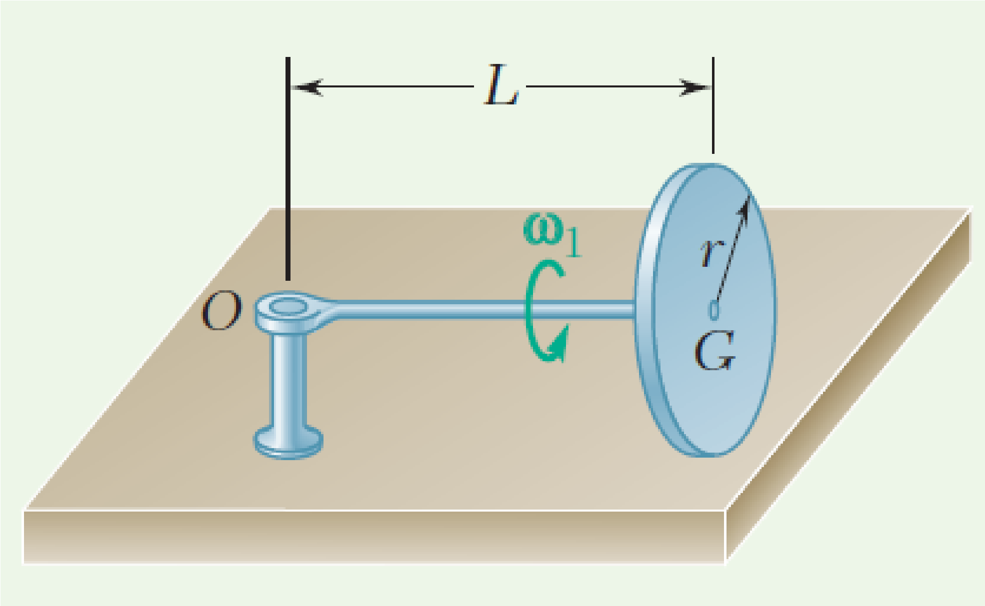
Un disco homogéneo de radio r y masa m se monta sobre un eje OG de longitud L y masa despreciable. El eje está articulado en el punto fijo O. Si el disco gira en el sentido indicado a la velocidad ω_1 alrededor del eje OG, calcular

a) Velocidad angular del disco,

b) Cantidad de movimiento angular alrededor de O,

c) Energía cinética,

d) El vector y el momento en G



UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

- ***ESTRATEGIA*****:** Al reconocer que el disco rueda sin deslizarse, se puede utilizar la cinemática para calcular la velocidad angular de la barra alrededor de *O*. Luego es posible determinar la energía cinética y las cantidades de movimiento del sistema.

- ***MODELAR Y ANALIZAR:***

a) Velocidad angular. Cuando el disco gira alrededor del eje *OG*, también gira con el eje alrededor de *y* a una velocidad de ω_2 en el sentido de las manecillas del reloj siguiente figura. La velocidad angular total del disco es entonces

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \text{ i} - \omega_2 \text{ j} \qquad (1)$$

El disco está rodando, por tanto, se establece la velocidad de *C* en cero para determinar ω_2 como

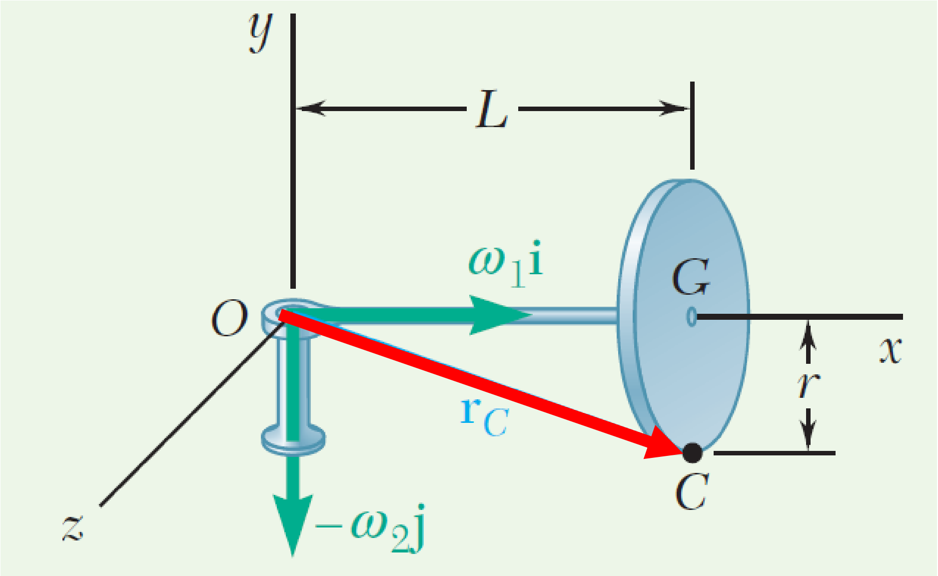
$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C = 0$$

$$(\omega_1 \mathbf{i} - \omega_2 \mathbf{j}) \times (L\mathbf{i} - r\mathbf{j}) = 0$$

$$(L\omega_2 - r\omega_1)\mathbf{k} = 0 \qquad \boxed{\omega_2 = r\omega_1/L}$$

Al sustituir en la ecuación (1) por ω_2 se obtiene:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{i} = (r\omega_1/L)\mathbf{j}}$$

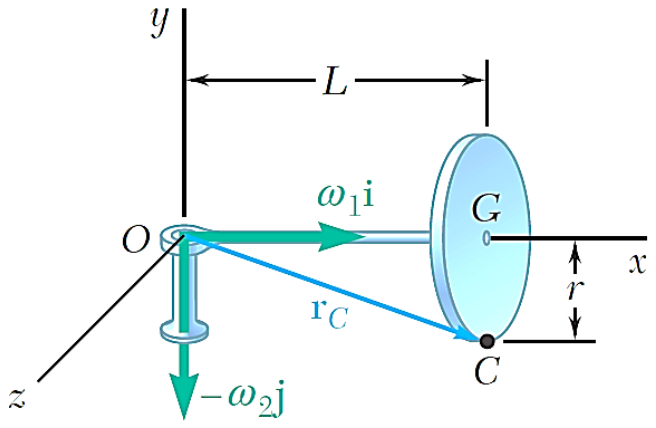


b) Cantidad de movimiento angular alrededor de O. Suponiendo que el eje es parte del disco, es posible considerar que este mismo tenga un punto fijo en *O*. Puesto que los ejes *x*, *y* y *z* son ejes principales de inercia para el disco, se tiene

$$H_x = I_x\omega_x = (\tfrac{1}{2}mr^2)\omega_1$$

$$H_y = I_y\omega_y = (mL^2 + \tfrac{1}{4}mr^2)(-r\omega_1/L)$$

$$H_z = I_z\omega_z = (mL^2 + \tfrac{1}{4}mr^2)0 = 0$$



$$\boxed{\mathbf{H}_O = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\mathbf{i} - m(L^2 + \tfrac{1}{4}r^2)(r\omega_1/L)\mathbf{j}}$$

c) Energía cinética. Al utilizar los valores que se obtuvieron para los momentos de inercia y las componentes de ω, se tiene

$$T = \tfrac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2) = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}mr^2\omega_1^2 + m(L^2 + \tfrac{1}{4}r^2)(-r\omega_1/L)^2]$$

$$\boxed{T = \tfrac{1}{8}mr^2\left(6 + \frac{r^2}{L^2}\right)\omega_1^2}$$

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

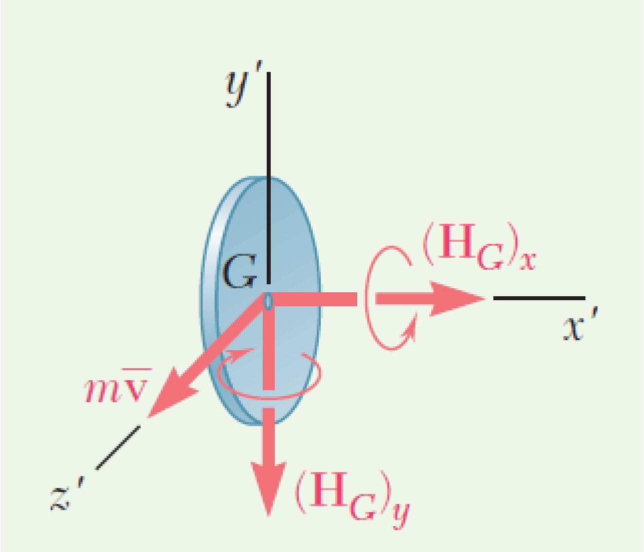
d) Cantidad de movimiento lineal y cantidad de movimiento angular alrededor de G. El vector de cantidad de movimiento lineal $m\mathbf{v}$ y el par de cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}G$ son:

$$\boxed{m\bar{\mathbf{v}} = mr\omega_1\mathbf{k}}$$

Y

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}_{x'}\omega_x\mathbf{i} + \bar{I}_{y'}\omega_y\mathbf{j} + \bar{I}_{z'}\omega_z\mathbf{k} = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\mathbf{i} + \tfrac{1}{4}mr^2(-r\omega_1/L)\mathbf{j}$$

$$\boxed{\mathbf{H}_G = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\left(\mathbf{i} - \frac{r}{2L}\mathbf{j}\right)}$$



REVISAR y PENSAR: Si la masa del eje no fuera despreciable y se modelara como una varilla delgada de masa M_{eje}, también contribuiría a la energía cinética

$$\boxed{T_{\text{eje}} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3}M_{\text{eje}}L_2)\omega_2^2}$$

y a la cantidad de movimiento angular del sistema.

$$\boxed{\mathbf{H}_{\text{eje}} = -(\tfrac{1}{3}M_{\text{eje}}L^2)\omega_2\mathbf{j}}$$

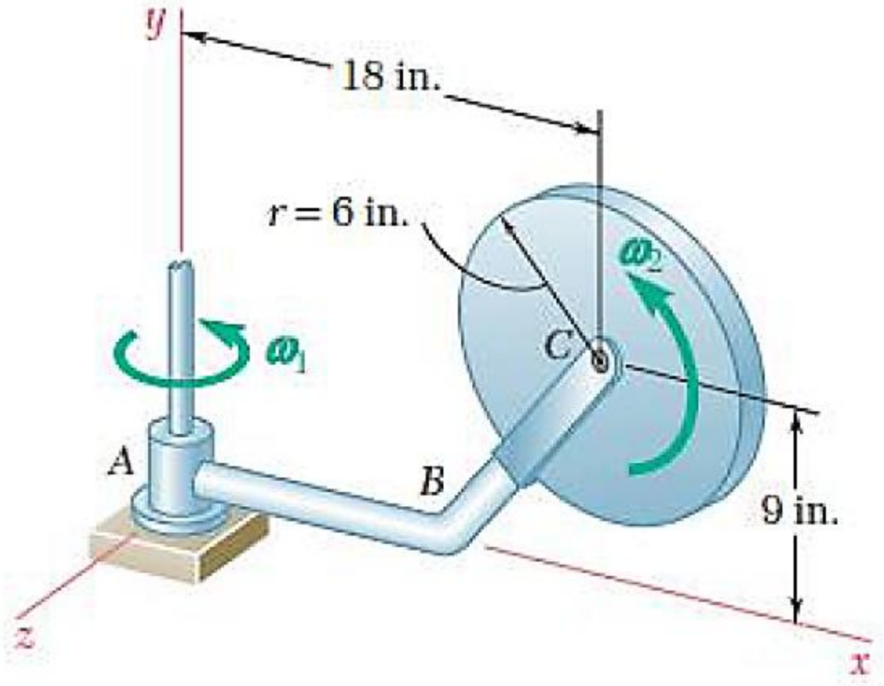
UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ejercicio N° 3

- Un disco de peso 10 lb gira a ω_2 = 15 rad/s constante con respecto al brazo ABC, el cual gira a su vez a la velocidad constante ω_1= 5 rad/s alrededor del eje y.
- Calcular la cantidad de movimiento angular del disco alrededor de su centro C.



Datos:

m_{DISCO} = 10 lb ω_{DISCO}= 15 rad/s = ω_2

ω_{ABC}= 5 rad/s = ω_1

Incógnita:

H_C=?

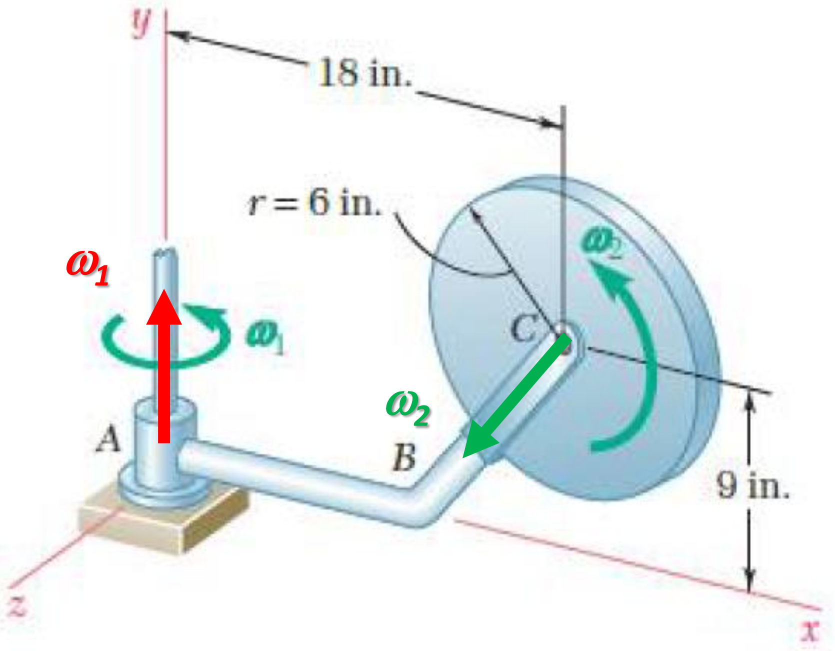
UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

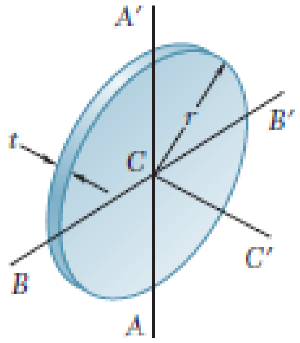
- ***ESTRATEGIA:*** Se analizarán las velocidades angulares, luego el momento de inercia del disco y por ultimo el momento de inercia angular que es la incógnita.
- ***MODELAR:*** vamos a relacionar las velocidades angulares

.



$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\,\mathbf{j} + \omega_2\,\mathbf{k}$

$\boxed{\boldsymbol{\omega} = (5\ rad/s)\mathbf{j} + (15\ \text{rad/s})\,\mathbf{k}}$



$$I_{AA'} = I_{BB'} = \tfrac{1}{4}mr^2$$
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{2}mr^2$$

En nuestro caso nos queda

$I_x{}' = I_y{}' = ¼\ m.r^2 = ¼\ .(10\ \text{lb}/\ 32{,}2\text{pies/s}^2)\ .\ (6\text{in}/12\text{in/pies})^2 = 0.019410\ \text{ft . lb . S}^2$

$I_Z{}' = ½\ \ m.r^2 = ½\ (10\ \text{lb}/\ 32{,}2\text{pies/s}^2)\ .\ (6\text{in}/12\text{in/pies})^2 = 0.038820\ \text{ft . lb . s}^2$

Ing. Carlos Barrera

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Cantidad de movimiento angular alrededor de C. El par de cantidad de movimiento angular **H***G es*:

$$\mathbf{H_C} = I_{x}' \, \omega_{X'} \, \mathbf{i} + I_{Y}' \, \omega_{Y'} \, \mathbf{j} + I_{Z}' \, \omega_{Z'} \, \mathbf{k}$$

Reemplazamos para nuestro caso, nos queda:

$$\mathbf{H_C} = 0 + (0.019410 \text{ ft.lb.s}^2) \, . \, 5 \text{ rad/s } \, \mathbf{j} + (0.038820 \text{ ft.lb.s}^2) \, . \, 15 \text{ rad/s } \mathbf{k}$$

$$\mathbf{H_C} = (0.0970 \text{ ft.lb.s}) \; \mathbf{j} + (0.0582 \text{ ft.lb.s}) \; \mathbf{k}$$

Cantidad de movimiento angular del disco alrededor de su centro C

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

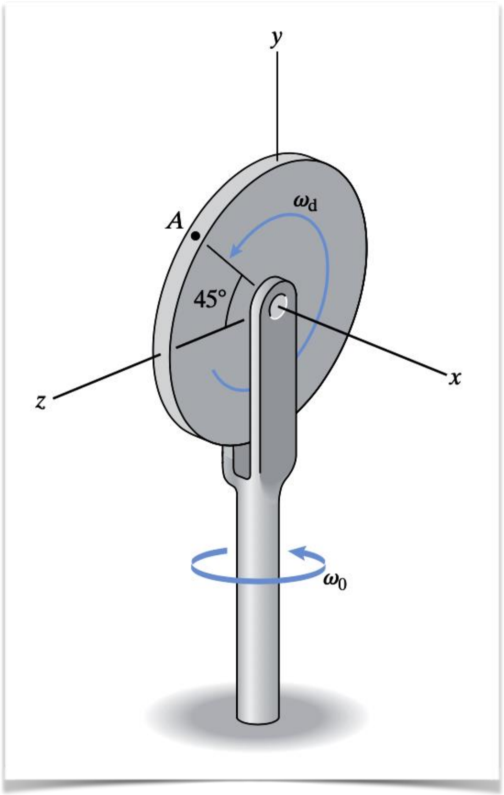
EJERCICIOS DE PLATAFORMA
PRIMERA PARTE

9B_4_TP_MR_CUERPORIGIDO_3DIM_CINEMÁTICA_2025

Ing. Carlos Barrera

Problema N°1

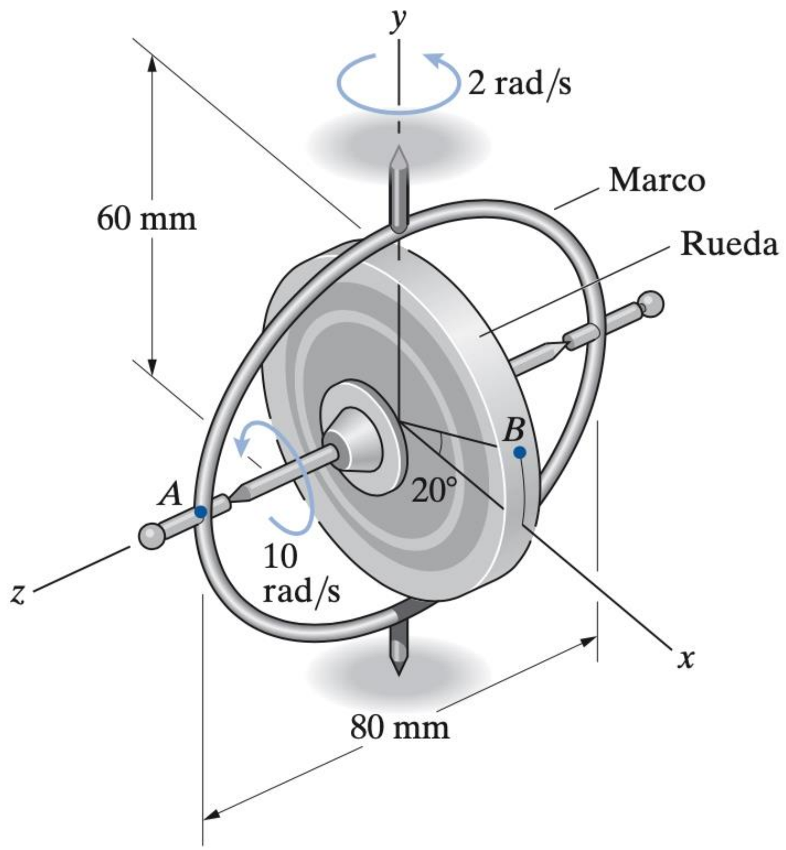
El árbol vertical mostrado en la figura gira alrededor de su eje con velocidad angular ω0 = 4 rad/s, respecto a un marco de referencia fijo a la Tierra. El sistema coordenado secundario xyz está fijo con respecto al árbol y su origen está en reposo. Respecto al sistema coordenado secundario, el disco de radio = 0,2 m gira con velocidad angular ωd = 6rad/s.



a) Calcular la **velocidad angular del disco** respecto al marco de referencia fijo a la Tierra.
b) Determinar el vector velocidad del punto A respecto al marco de referencia secundario xyz .
c) Determinar el vector velocidad del punto A respecto al marco de referencia fijo a la Tierra.
d) Determinar el vector aceleración angular del disco respecto al marco de referencia fijo a la Tierra.
e) En el instante mostrado, determinar el vector aceleración del punto A respecto al marco de referencia fijo a la Tierra

Problema N°2

Respecto a un marco de referencia primario, el bastidor del giroscopio circular mostrado gira alrededor del eje vertical a 2 rad/s. La rueda de 60 mm de diámetro gira a 10 rad/s respecto al bastidor.



a) Determinar el **vector velocidad** del **punto A** respecto al marco de referencia primario.
b) Determinar el **vector velocidad** del **punto B** respecto al marco de referencia primario.
c) En el instante mostrado, determinar el vector aceleración del punto A respecto al marco de referencia primario
d) En el instante mostrado, determinar el vector aceleración del punto B respecto al marco de referencia primario

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA

MECÁNICA Y MECANISMOS

GRACIAS POR SU ATENCIÓN

Ing. Carlos Barrera