FACULTAD DE INGENIERÍA

GIROSCOPO PRÁCTICA

MECÁNICA APLICADA

MECÁNICA Y MECANISMOS

Ing. Carlos Barrera

BASE TEÓRICA

Estas formulaciones pueden utilizarse junto con el principio de trabajo y energía para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y desplazamiento.

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

Ecuaciones de movimiento

Existen tres ecuaciones escalares de movimiento de translación de un cuerpo rígido que se desplaza en tres dimensiones.

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma F_z = m(a_G)_z$$

Las tres ecuaciones escalares de movimiento de rotación dependen del movimiento de la referencia x, y, z. Con mucha frecuencia, estos ejes están orientados de modo que son ejes de inercia principales. Si los ejes están fijos en el cuerpo y se mueven junto con éste, de modo que $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, entonces las ecuaciones se conocen como ecuaciones de movimiento de Euler.

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$

$$\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$$

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - I_x\Omega_y\omega_x + I_y\Omega_x\omega_y$$

$$\mathbf{\Omega} \neq \Omega$$

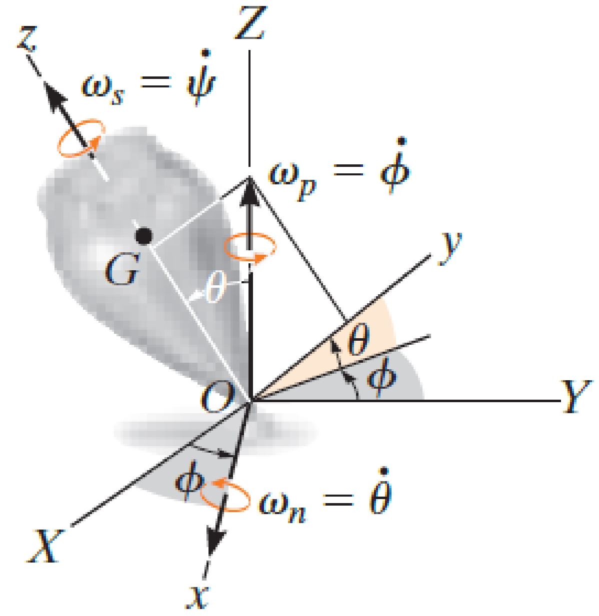
Un diagrama de cuerpo libre siempre deberá acompañar la aplicación de las ecuaciones de movimiento.

Movimiento giroscópico

El movimiento angular de un giroscopio se describe mejor por medio de los tres ángulos de Euler ϕ, θ y ψ. Las componentes de la velocidad angular se llaman precesión $\dot{\phi}$, nutación $\dot{\theta}$, y rotación $\dot{\psi}$.

Si $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ son constantes, entonces el movimiento se conoce como precesión constante.

La rotación de un rotor de giro es la responsable de evitar que el rotor caiga y, en cambio, hace que experimente precesión con respecto a un eje vertical. Este fenómeno se llama efecto giroscópico.



$$\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + I_z\dot{\phi} \operatorname{sen}\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})$$

$$\Sigma M_y = 0, \Sigma M_z = 0$$

Movimiento sin par de torsión

Un cuerpo sometido a sólo una fuerza de gravitación no tendrá momentos actuando en él con respecto a su centro de masa y, por consiguiente, el movimiento se describe como movimiento sin par de torsión. La cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto a su centro de masa permanecerá constante. Esto hace que el cuerpo tenga tanto rotación como precesión. El movimiento depende de la magnitud del momento de inercia de un cuerpo simétrico con respecto al eje de rotación I_z, *versus* aquél con respecto a un eje perpendicular I.

$$\theta = \text{constante}$$

$$\dot{\phi} = \frac{H_G}{I}$$

$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I\, I_z} H_G \cos\theta$$

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

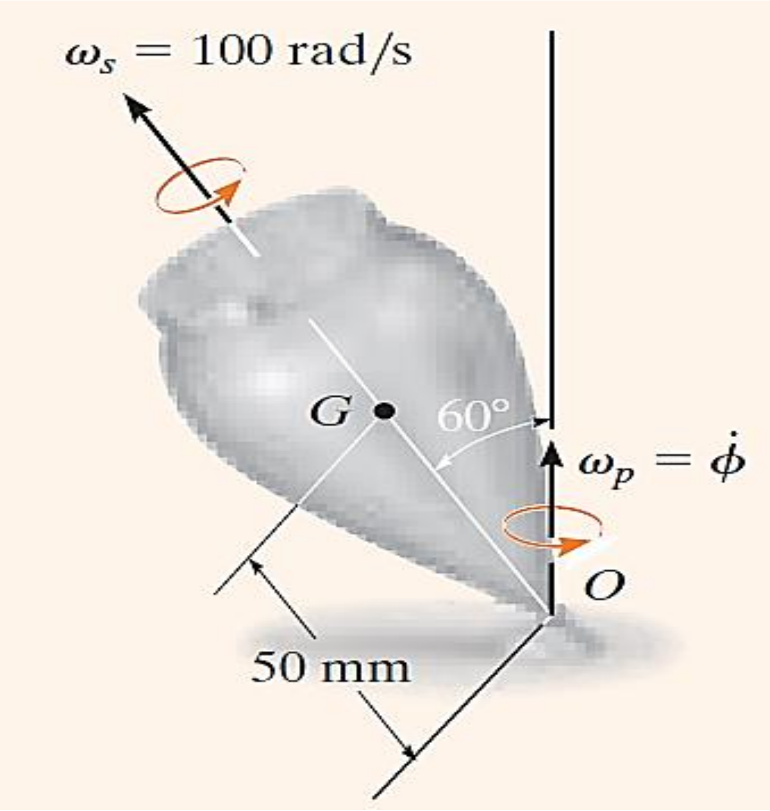
FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ejercicio N° 1

El trompo mostrado en la figura tiene masa de 0,5 kg y precesa con respecto al eje vertical a un ángulo constante Θ = 60° . Si el trompo gira con velocidad angular ω_S = 100 rad/seg, calcular la velocidad de prececión ω_P .

Suponga que los momentos de inercia axial y transversal del trompo son 0,45 (10^{-3})kg m^2 y 1,2 (10^{-3}) kg m^2 respectivamente medidos con respecto al punto fijo O.



Datos:
m_T = 0,5 Kg –Presea Θ = 60°
w_S =100 ra/s
Mom. Inercia axial= 0,45 (10^{-3})kg m^2 y 1,2 (10^{-3}) kg m^2

Incógnita:
w_P= ?

Ing. Carlos Barrera

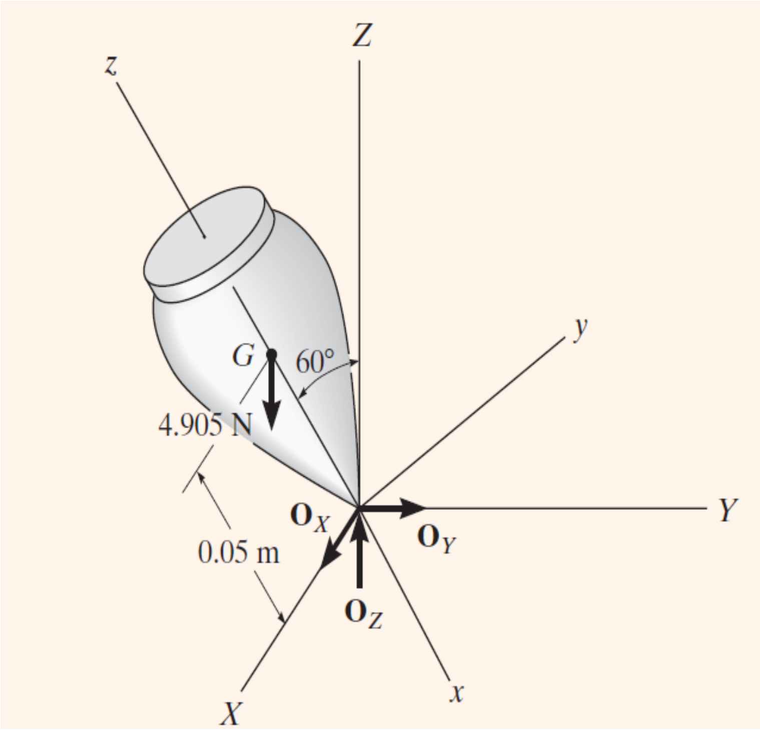
SOLUCIÓN:

Se utilizará la siguiente ecuación para la solución

$$\boxed{\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_z\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})}$$

$$\Sigma M_y = 0$$

$$\Sigma M_z = 0$$



ya que el movimiento de precesión es constante.

Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, los ejes de coordenadas se establecen de la forma usual, es decir, con el eje **z** positivo en la dirección de la rotación, el eje **Z** positivo en la dirección de la precesión, y el eje **x** positivo en la dirección del momento ΣMx.

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

- ***Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre***, consideramos

El eje *z* positivo en la dirección de la rotación.

El eje *Z* positivo en la dirección de la precesión.

El eje *x* positivo en la dirección del momento ΣMx

$$\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + I_z\dot{\phi} \operatorname{sen}\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})$$

Reemplazamos

$$4.905\ \text{N}(0.05\ \text{m}) \operatorname{sen} 60° = -[1.20(10^{-3})\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\ \dot{\phi}^2] \operatorname{sen} 60° \cos 60° + [0.45(10^{-3})\ \text{kg}\cdot\text{m}^2]\dot{\phi} \operatorname{sen} 60°(\dot{\phi}\cos 60° + 100\ \text{rad/s})$$

O bien

$$\boxed{\dot{\phi}^2 - 120.0\dot{\phi} + 654.0 = 0} \qquad (1)$$

$$\dot{\phi} = 114\ \text{rad/s} \quad \text{(alta precesión)}$$

y

$$\dot{\phi} = 5.72\ \text{rad/s} \quad \text{(baja precesión)}$$

NOTA: En realidad, por lo general se observaría baja precesión del trompo, ya que la alta precesión requeriría una mayor energía cinética.

Ing. Carlos Barrera

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

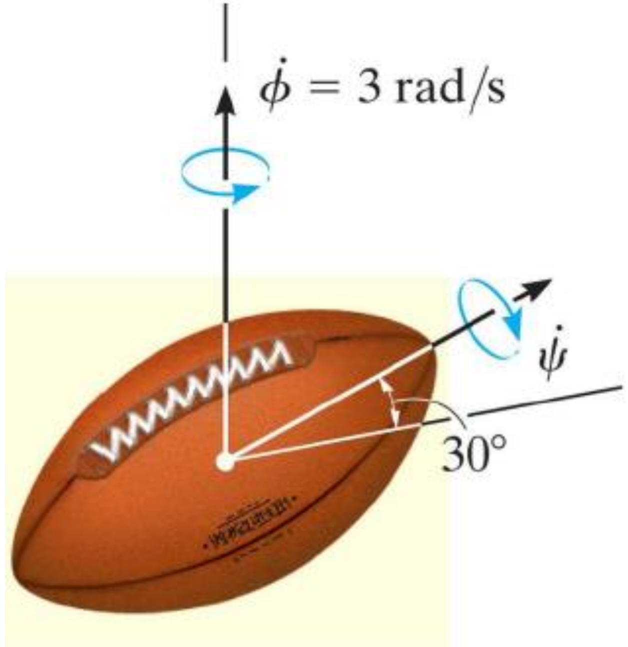
Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ejercicio N° 2

El movimiento de una pelota de rugby se inicia con una rotación que está dirigida a 30° de la horizontal.

Experimenta, además precesión respecto del eje vertical a una velocidad de ϕ = 3 rad/s.

Si la relación de los momentos de inercia axial y transversal del balón es de 1/3, medida con respecto al centro de masa. calcule la magnitud de la rotación de la pelota y de su velocidad angular. No se debe tener en cuenta el efecto de resistencia del aire.

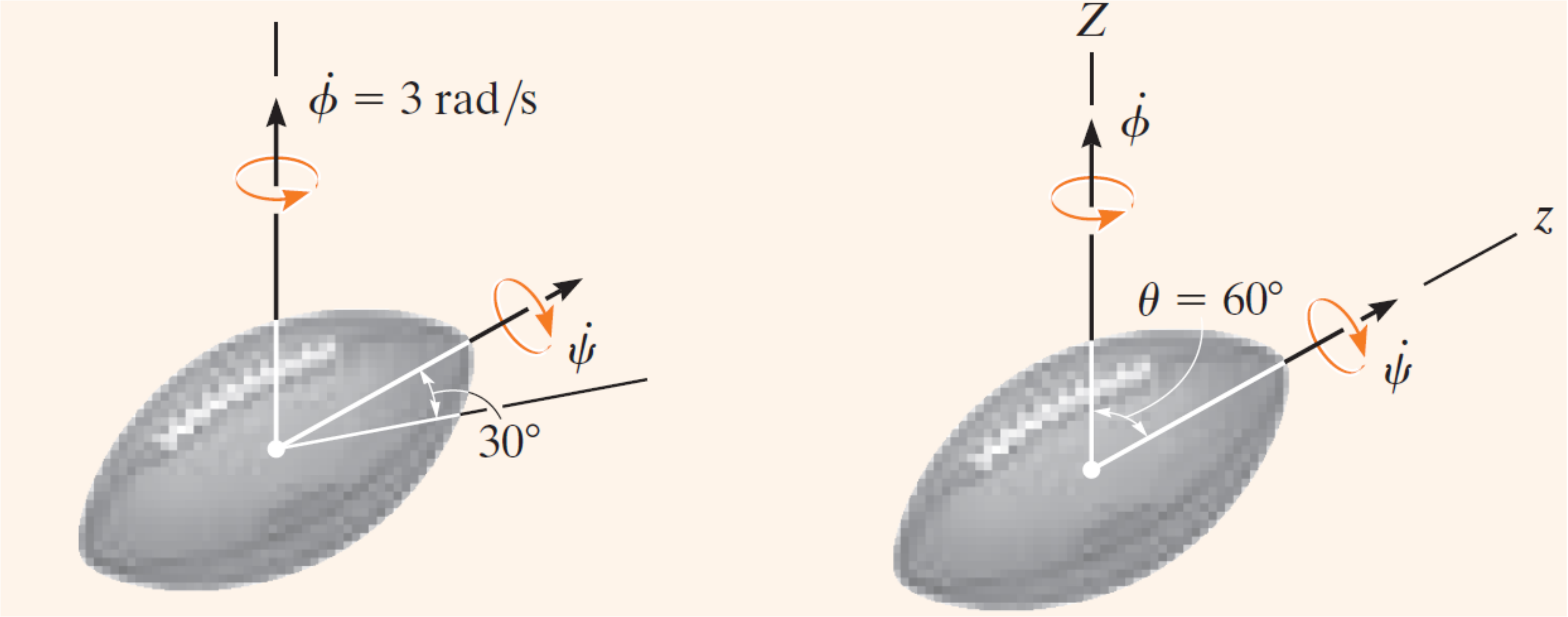


Datos:
ψ = 30° con la horizontal
ϕ = 3 rad/s precesión con la vertical
Relación momento axial y transv. =1/3
Incógnita:
Magnitud rotación pelota.
La velocidad angular pelota.
No tener en cuenta el efecto del aire

Ing. Carlos Barrera

SOLUCIÓN

Como el peso del balón es la única fuerza que actúa, el movimiento es sin par de torsión. En el sentido convencional, si el eje *z* se establece a lo largo del eje de rotación y el eje *Z* a lo largo del eje de precesión, como se indica en las siguientes figuras



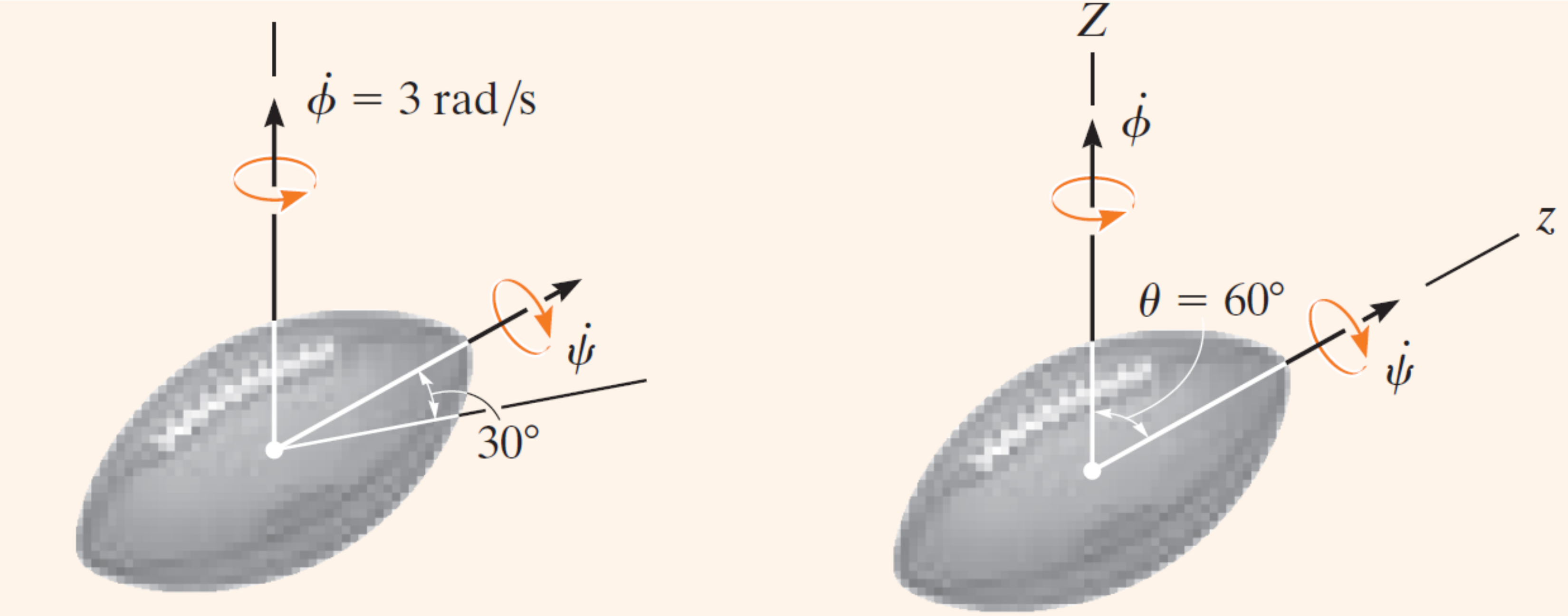
Entonces el ángulo θ= 60°. Al aplicar la siguiente ecuación, la rotación es

$$\boxed{\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I_z}\dot{\phi}\cos\theta}$$

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS



$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I_z}\dot{\phi}\cos\theta$$

La rotación nos queda:

$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I_z}\dot{\phi}\cos\theta = \frac{I - \frac{1}{3}I}{\frac{1}{3}I}(3)\cos 60° = 3\ \text{rad/s}$$

Si utilizamos las ecuaciones

$$\omega_x = 0 \quad \omega_y = \frac{H_G \operatorname{sen}\theta}{I} \quad \omega_z = \frac{H_G\cos\theta}{I_z}$$

$$\theta = \text{constante}$$

$$\dot{\phi} = \frac{H_G}{I}$$

$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I I_z}H_G\cos\theta$$

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

$$\omega_x = 0 \quad \omega_y = \frac{H_G \operatorname{sen}\theta}{I} \quad \omega_z = \frac{H_G \cos\theta}{I_z}$$

$$\theta = \text{constante}$$
$$\dot{\phi} = \frac{H_G}{I}$$
$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I\,I_z} H_G \cos\theta$$

Tenemos

$$\omega_x = 0$$

$$\omega_y = \frac{H_G \operatorname{sen}\theta}{I} = \frac{3I \operatorname{sen} 60^\circ}{I} = 2.60 \text{ rad/s}$$

$$\omega_z = \frac{H_G \cos\theta}{I_z} = \frac{3I \cos 60^\circ}{\frac{1}{3} I} = 4.50 \text{ rad/s}$$

Por lo tanto,

$$\omega = \sqrt{(\omega_x)^2 + (\omega_y)^2 + (\omega_z)^2} = \sqrt{(0)^2 + (2.60)^2 + (4.50)^2}$$

ω = 5.20 rad/s

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

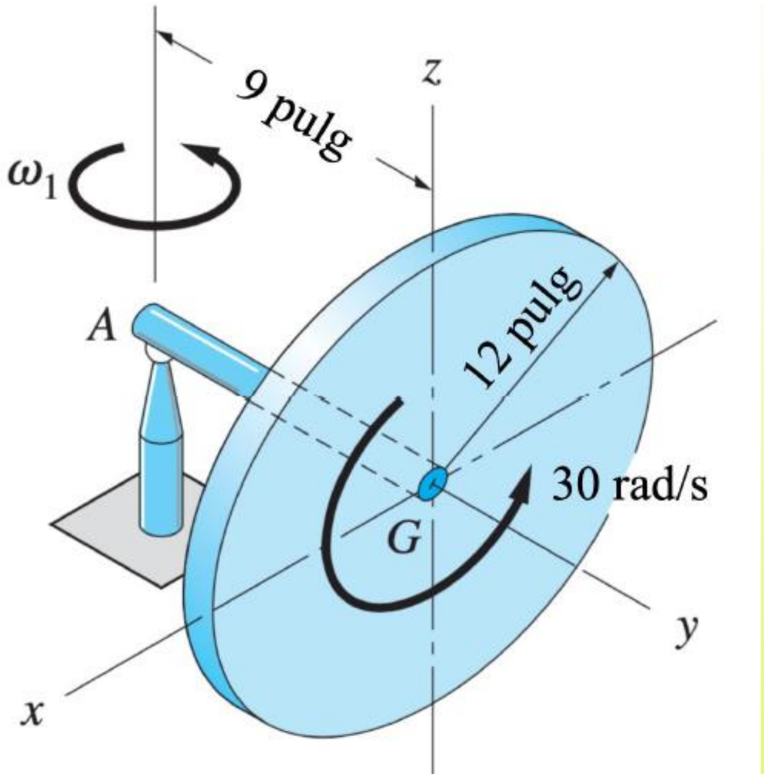
FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ejercicio N° 3

El disco de 25 lb gira respecto al eje AG con velocidad angular constante de 30 rad/s. El eje se apoya en una rótula esférica en A y rota respecto al eje vertical con velocidad angular constante ω1.

Calcular el valor de ω1 de modo que el eje permanezca horizontal durante el movimiento. Desprecie el peso del eje.



Datos:

m_{DISCO} = 25 lb $\omega_{DISCO(AG)}$= 30 rad/s

$\omega_{1\ EJE\ Z}$= ω_1

Incógnita:

ω_1 =? Eje permanezca horizontal

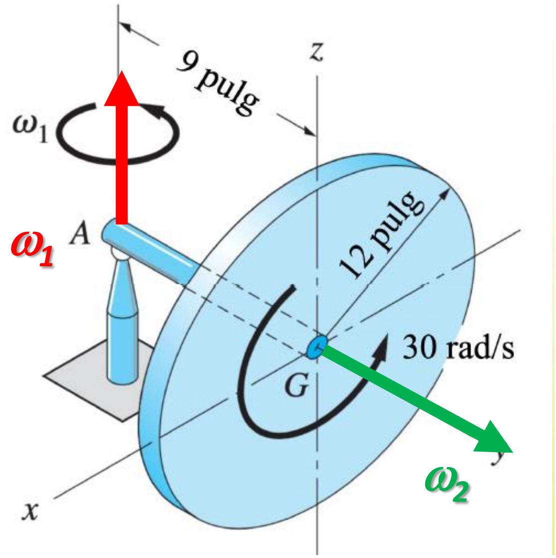
Ing. Carlos Barrera

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

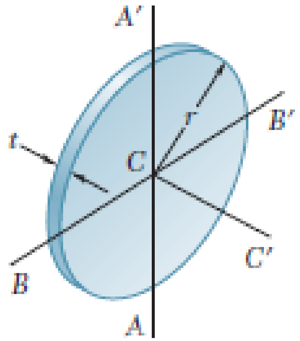
Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

- ***ESTRATEGIA:*** Se analizarán la velocidad angular que tenemos como dato y la que es incógnita, luego el momento de inercia del disco.
- ***MODELAR:*** vamos a relacionar las velocidades angulares



$\boldsymbol{\omega} = \omega_{AG}\,\mathbf{j} + \omega_1\,\mathbf{k}$ $\quad \boldsymbol{\Omega} = \omega_1\,\mathbf{k}$

$\boxed{\boldsymbol{\omega} = (30\ rad/s)\mathbf{j} + (\omega_1)\,\mathbf{k}}$



$I_{AA'} = I_{BB'} = \frac{1}{4}mr^2$

$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{2}mr^2$

En nuestro caso nos queda

$I_Y = ½ m.R^2 = ½ .(W/g).(R)^2 = ½ (25\ lb/ 32{,}2 pies/s^2).(12in/12in/pies)^2 = 0.3882 slug.ft^2$

$I_X = I_Z = ½\ I_Y = 0.1941\ slug.ft^2$

Ing. Carlos Barrera

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ejes x, y, z que tienen movimiento $\Omega \neq \omega$. Para simplificar los cálculos de la derivada con respecto al tiempo de V, con frecuencia es conveniente seleccionar los ejes *x*, *y*, *z* con una velocidad angular Ω diferente de la velocidad angular ω del cuerpo. Esto es particularmente adecuado para el análisis de giróscopos y giroscopios, los cuales son *simétricos* con respecto a sus ejes de giro. Cuando éste sea el caso, los momentos y productos de inercia permanecen constantes con respecto al eje de giro.

$$\begin{aligned}\Sigma M_x &= I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z \\ \Sigma M_y &= I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x \\ \Sigma M_z &= I_z\dot{\omega}_z - I_x\Omega_y\omega_x + I_y\Omega_x\omega_y\end{aligned}$$

Aquí Ωx, Ωy, Ωz representan las componentes *x*, *y*, *z* de Ω, medidas con respecto al marco de referencia inercial, y ωx, ωy, ωz deben determinarse con respecto a los ejes *x*, *y*, *z* que tienen la rotación V.

Para nuestro caso consideramos

$$\Sigma M_X = I_Z\,\Omega_Y\,\omega_Z - I_Y\,\Omega_Z\,\omega_Y$$

$$-0.75\ A_Z = 0 - (0.3882).\omega_1\ (30)$$

Utilizamos $\Sigma F_Z = m.a_Z \Rightarrow AZ - 25 = 0 \quad \Rightarrow \ A_Z = 25$ lb

Reemplazamos $\quad -0.75\ (25\text{lb}) = -(0.3882).\omega_1\ (30) \ \Rightarrow$

$$\boxed{\omega 1 = 1.610 \text{ rad/s}}$$

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

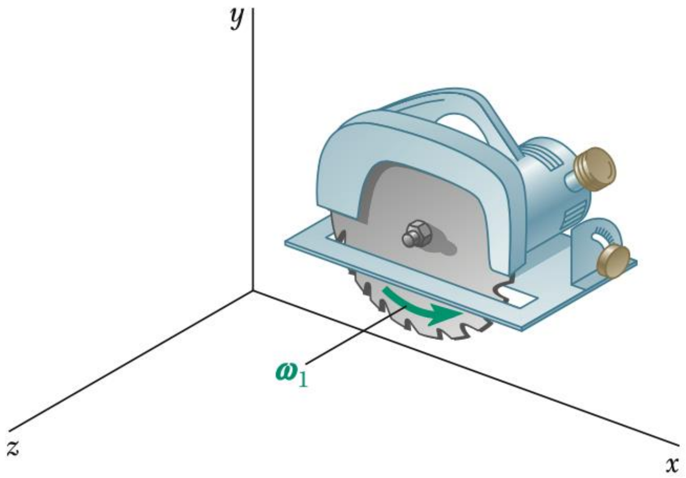
EJERCICIOS DE PLATAFORMA SEGUNDA PARTE

9B_5_TP_MR_CUERPORIGIDO_3DIM_GIROSCOPO_2025

Ing. Carlos Barrera

Problema N°1

La hoja de una sierra portátil y el rotor de su motor tienen un peso total de 2,5 lb y un radio de giro combinado de 1,5 in. La hoja gira como se indica, con una velocidad angular de n_1 = 1 500 rpm.



a) Determinar el vector del **par M** que debe ejercer un trabajador sobre la agarradera de la sierra para girarla con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega_2 = -(2.4\ rad/s)j}$.

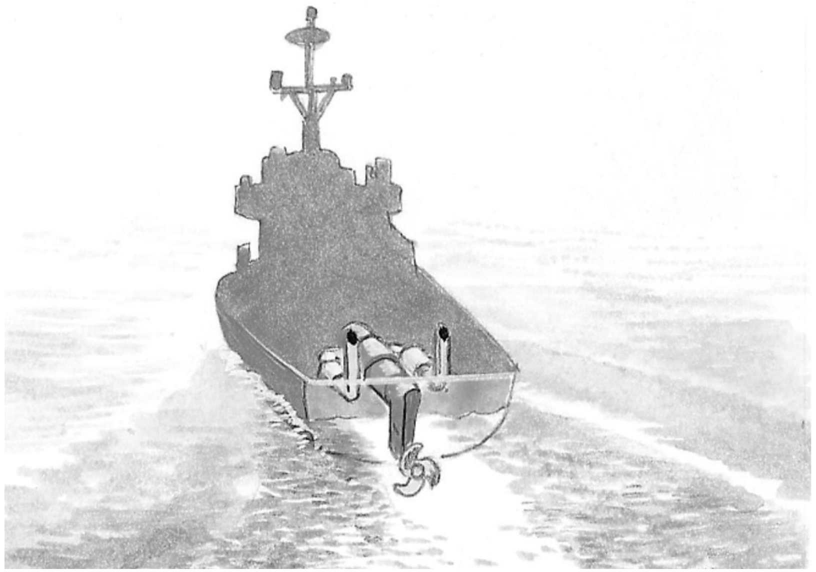
UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Problema N°2

Un barco tiene un motor de turbina. El eje de giro de la turbina axial asimétrica que se muestra en la figura es horizontal y está alineada con el eje longitudinal del barco. La turbina gira a **10000 rpm**. Su momento de inercia respecto a su eje de giro es de **1000 kg.m²**. El barco vira a una razón constante de **20 grados por minuto.**



a) Determinar la magnitud del **momento** que ejerce la turbina sobre el barco.

Ing. Carlos Barrera

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

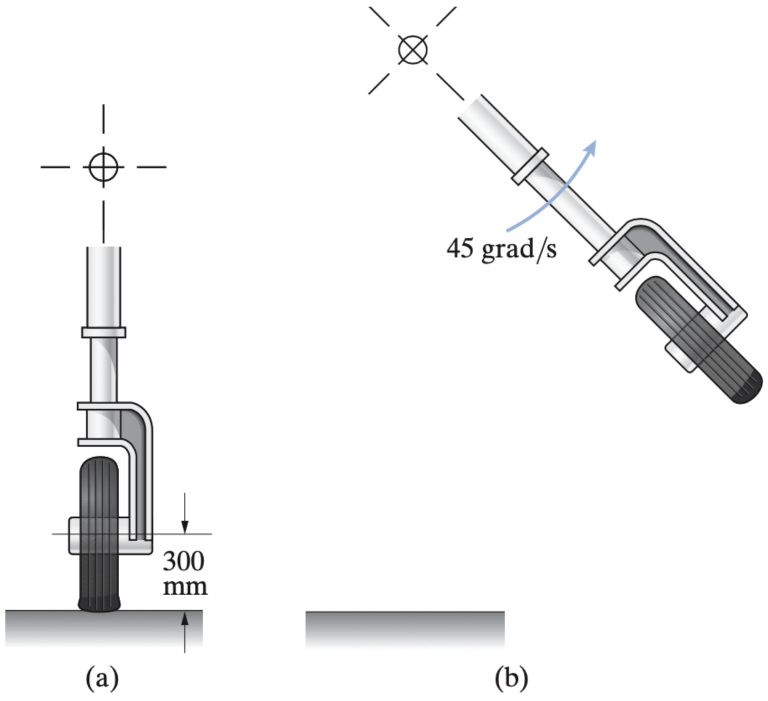
Problema N°3

El helicóptero de la figura se encuentra en reposo. El eje z del sistema coordenado fijo al cuerpo apunta hacia abajo y coincide con el eje del rotor del helicóptero. El momento de inercia del rotor respecto al eje z es de 8600 kg.m2. Su velocidad angular es 258k (rpm). El helicóptero comienza una maniobra de lanzamiento durante la cual su velocidad angular es 0,02j (rad/s).

a) Determinar la magnitud del **momento** giroscópico ejercido por el rotor sobre el helicóptero.

Problema N°4

En la figura a se muestra el tren de aterrizaje de un avión visto desde la parte posterior del aeroplano. El radio de la rueda es de 300 mm y su momento de inercia es de 2 kg.m2. El avión despega a 30 m/s. Después del despegue, el tren se recoge girando hacia el lado derecho del avión, como se muestra en la figura b.



a) Determinar la magnitud del par ejercido por la rueda sobre su soporte (ignore el movimiento angular del avión) tratando el movimiento como precesión estable.

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA

MECÁNICA Y MECANISMOS

GRACIAS POR SU ATENCIÓN

Ing. Carlos Barrera