UNIDAD 1

1. Nociones básicas de Lógica

La lógica simbólica es una herramienta usada en todas las áreas de la Matemática que permite expresar razonamientos de manera precisa y estructurada mediante símbolos y reglas bien definidas. Proporciona un lenguaje formal para analizar la validez de argumentos y establecer la base de conceptos matemáticos. Al eliminar la ambigüedad del lenguaje natural, la lógica simbólica facilita la construcción de demostraciones rigurosas y el análisis de estructuras abstractas.

El origen de la lógica como disciplina formal comienza con la filosofía clásica de la Antigua Grecia, con Aristóteles (384-322 a.C.). Él desarrolló un sistema para analizar argumentos basados en premisas y conclusiones. Aunque este enfoque estaba limitado a algunas formas específicas de razonamiento verbal.

El salto hacia la lógica simbólica moderna ocurrió en el siglo XIX, principalmente gracias a George Boole (1815-1864), quien introdujo un enfoque algebraico para representar proposiciones lógicas y así marcó el inicio de la lógica matemática que se convirtió en la base de muchas áreas en Matemática y de la computación moderna.

Posteriormente, Gottlob Frege (1848-1925) profundizó el uso de la lógica simbólica para formalizar el razonamiento matemático, introduciendo un lenguaje lógico más sofisticado que incluía los cuantificadores universales y existenciales. A principios del siglo XX, los trabajos de Bertrand Russell, Alfred North Whitehead y David Hilbert impulsaron la formalización completa de las matemáticas, consolidando a la lógica simbólica como un campo central de estudio.

Por otro lado, el desarrollo de la teoría de la computación en el siglo XX, gracias a pioneros como Alan Turing y Alonzo Church, demostró cómo la lógica simbólica puede servir como base para modelar y analizar sistemas computacionales.

Actualmente, la lógica simbólica además de constituir el lenguaje universal de la Matemática, es esencial en la informática, la inteligencia artificial, la lingüística y la filosofía. Comprender sus fundamentos permite desarrollar habilidades analíticas aplicables a estas disciplinas.

Los temas principales que abordaremos en este texto son:

- Proposiciones y conectores lógicos. Análisis de valor de verdad de proposiciones.
- Implicación lógica y equivalencia lógica.
- Uso de cuantificadores

1.1. Proposiciones y conectivos lógicos

En el desarrollo de cualquier teoría, se hacen afirmaciones en forma de oraciones. A esas afirmaciones se las llama proposiciones. Pero no cualquier afirmación resulta ser una proposición.

Definición 1.1

Una proposición es un enunciado afirmativo que puede ser calificado como verdadero o falso, pero no ambos a la vez.

Notación: para nombrar las proposiciones se usa, en general, letras minúsculas del alfabeto latino como: p, q, r. Además, su valor de verdad suele indicarse como $v(p) = V$ ó $v(p) = F$.

Ejemplo 1.1 Los siguientes enunciados son proposiciones:

p: El dominio de la función seno es $\mathbb{R}$.
q: $2 + 3 = 7$
r: Álgebra es un curso obligatorio para el primer semestre de las carreras de Ingeniería.

Por otro lado, **no** son proposiciones, oraciones como:

- ¿Cuánto tiempo queda?
- ¿Falló la compilación?
- ¡Cuidado con el perro!

Claramente, a estas oraciones no se les puede asignar un valor de verdad (ni verdadero, ni falso), a lo sumo son preguntas que pueden responderse, pero no son proposiciones.

Las proposiciones p, q y r del ejemplo anterior, son **proposiones simples** (o **primitivas**) ya que no pueden ser descompuestas en otras proposiciones más sencillas.

1.2. Conectivos lógicos

Es posible formar nuevas proposiciones, a partir de otras, mediante el uso de conectivos. En el estudio de la lógica simbólica se analiza el valor de verdad de estas nuevas proposiciones llamadas **compuestas**, independientemente del contenido de las mismas. Los principales conectivos con los que se forman nuevas proposiciones son:

- **CONJUNCIÓN:** La conjunción de dos proposiciones p y q se denota como $p \wedge q$ y se lee "p **y** q ". El valor de verdad de la proposición compuesta obtenida de esta manera es verdadera sólo cuando ambas proposiciones son verdaderas.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

  En el ejemplo, la proposición $p \wedge q$ sería: El dominio de la función seno es $\mathbb{R}$ y $2 + 3 = 7$; su valor de verdad sería falso ya que $v(p) = V$ pero $v(q) = F$.

- **DISYUNCIÓN:** La disyunción de dos proposiciones p y q se denota como $p \vee q$ y se lee "p **o** q ". El valor de verdad de la nueva proposición que se obtiene de esta manera es falsa en el único caso en que las dos proposiciones sean falsas.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

En el ejemplo, la proposición $p \vee q$ sería: El dominio de la función seno es $\mathbb{R}$ o $2+3=7$; su valor de verdad sería verdadero ya que $v(p)=V$, aunque $v(q)=F$.
Observación: Este conectivo no se corresponde exactamente a la "**o** "que usamnos coloquialmente, sino que es como el "**y/o** "; por esto es que este conectivo suele llamarse **disyunción inclusiva**, ya que incluye el caso en que ambas proposiciones son verdaderas.

- **IMPLICACIÓN:** La implicación o condicional de dos proposiciones p y q se denota como $p \to q$. En esta nueva proposición p recibe el nombre de **antecedente** (o **hipótesis**) y q el de **consecuente** (o **conclusión**). Usualmente se lee como: **"Si** p **entonces** q **"**. El valor de verdad de una implicación es falsa sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Otras formas que aparecen para expresar esta proposición coloquialmente son:

- p implica q
- Si p, q
- q si p
- p sólo si q

Con las proposiciones del ejemplo $p \to q$ sería: Si el dominio de la función seno es $\mathbb{R}$, entonces $2+3=7$; su valor de verdad sería falso ya que $v(p)=V$ mientras que $v(q)=F$.

Cada implicación tiene otras implicaciones asociadas, en el sentido de que se pueden escribir a partir de ella. Dichas implicaciones, cuya relevancia se analizará luego, son:

IMPLICACIÓN	**IMPLICACIONES ASOCIADAS**	
$p \to q$	$q \to p$	recíproca
	$\neg p \to \neg q$	contraria
	$\neg q \to \neg p$	contrarrecíproca

- **DOBLE IMPLICACIÓN:** La doble implicación, o bicondicional, entre proposiciones p y q se denota como $p \leftrightarrow q$. Coloquialmente se lee: "p **si y sólo si** q ". El valor de verdad de la proposición compuesta resultante es verdadera cuando los valores de verdad de las proposiciones involucradas son iguales, es decir, ambas verdaderas o ambas falsas.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Si se consideran las proposiciones del ejemplo, $p \leftrightarrow q$ quedaría: El dominio de la función seno es $\mathbb{R}$ si y sólo si $2+3=7$; su valor de verdad sería falso ya que los valores de verdad de las dos proposiciones son diferentes, $v(p)=V$ y $v(q)=F$.

- **NEGACIÓN:** La negación de una proposición p se denota como $\neg p$, $\overline{p}$ o $\sim p$. Coloquialmente se lee de muchas maneras, como por ejemplo: **"no es cierto que** p**"**, pero en realidad depende mucho de lo que enuncie la proposición. El valor de verdad de la nueva proposición obtenida al negar p es exactamente su contrario, es decir:

p	$\neg p$
V	F
F	V

En el ejemplo, $\neg p$ podría expresarse como: El dominio de la función seno no es $\mathbb{R}$; su valor de verdad sería falso ya que $v(p)=V$; mientras que si se niega la proposición q, en ese caso $\neg q$ puede leerse como "$2+3$ es distinto de 7 ", o simbolizarse como $2+3\neq 7$, siendo $v(\neg q)=V$.

El análisis de valores de verdad de las proposiciones compuestas se hace a través de tablas como las introducidas arriba. En dichas tablas se consideran todas las proposiciones involucradas y sus valores de verdad, abarcando todos los casos posibles. Como se desprende de los ejemplos anteriores, si sólo tenemos una proposición la tabla tiene dos renglones, si son dos tiene 4 y, en general, si la proposición compuesta tiene n proposicions, la tabla requerirá 2^n renglones para abarcar todos las posibilidades.

Para evitar el uso excesivo de paréntesis o corchetes en las proposiciones compuestas, se establece una jerarquía entre conectivos. De este modo para analizar la proposición primero se realiza la de menor jerarquía y se va ascendiendo hasta realizar el de mayor jerarquía, también llamado **conectivo principal**. Si esta jerarquía no corresponde al orden convenido, se utilizan paréntesis (del mismo modo que en operaciones combinadas con números se cambia la prevalencia de la adición respecto de la multiplicación). En orden creciente, la jerarquía de los conectivos es:

1. negación ($\neg$)
2. conjunción ($\wedge$)
3. disyunción ($\vee$)
4. implicación ($\rightarrow$)
5. doble implicación ($\leftrightarrow$)

Ejemplo 1.2 La proposición $q\wedge\neg u\rightarrow s$ requiere, para el análisis de sus valores de verdad, una

tabla de 8 renglones. Se descompone la proposición de modo que pueda ser analizada por partes según el orden de prioridad que tienen los conectivos. El conectivo principal de esta proposición es la implicación, cuyo antecedente es $q\wedge\neg u$ y cuyo valor de verdad debe ser determinado antes del de la implicación. Completando entonces la tabla, de izquierda a derecha, queda:

q	u	s	$\neg u$	$q \wedge \neg u$	$q \wedge \neg u \to s$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

q	u	s	$\neg u$	$q \wedge \neg u$	$q \wedge \neg u \to s$
V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	F	V

En cambio, si se quiere construir la tabla de verdad de $q \wedge (\neg u \to s)$, debe tenerse en cuenta que el conectivo principal es la conjunción, que se hace entre q y la implicación $\neg u \to s$. Se puede comprobar a través de una tabla, que los valores de verdad de estas proposiciones son diferentes, de lo que se desprende que las proposiciones enuncian cosas distintas.

1.3. Implicación lógica y equivalencia lógica

El análisis del valor de verdad de las proposiciones compuestas adquiere su mayor relevancia cuando el resultado final tiene ciertas particularidades. Esto se resume en la siguiente definición:

Definición 1.2

Sea P una proposición compuesta, se dice que:

- P es tautología si es verdadera para todas las asignaciones de valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.
- P es contradicción si es falsa para todas las asignaciones de valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.
- P es una contingencia si su valor de verdad cambia según cuáles sean los de las proposiciones simples que la forman.

En particular, son de interés las tautologías que tienen como conectivo principal la implicación o bicondicional. Si una implicación resulta ser una tautología, se la llama **implicación lógica** y se indica cambiando el símbolo $\to$ por $\Rightarrow$; asimismo, si una doble implicación es tautología, se la llama **equivalencia lógica** y se indica cambiando $\leftrightarrow$ por $\Leftrightarrow$ o $\equiv$.
El interés radica en que la estructura lógica de las propiedades y teoremas responde a proposiciones que tienen como conectivo principal implicación o doble implicación.

Ejemplo 1.3 Al realizar la tabla de verdad de la proposición $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \wedge q)$, se puede ver que es una tautología:

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \to q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \wedge q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Para sintetizar la información de la tabla se escribe:

$$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \qquad \text{o también} \qquad (p \to q) \equiv (\neg p \wedge q).$$

Observación: El hecho de que estas proposiciones sean equivalentes, permite sustituir una por otra en un argumento sin que cambie el sentido ni la validez del mismo.

Ejemplo 1.4 La proposición $[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$ también resulta una tautología:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Este resultado se resume reescribiendo la implicación del siguiente modo:

$$[(p \to q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p.$$

Observación: Una implicación lógica describe un argumento válido, que será de especial interés en desarrollar las habilidades necesarias para demostrar teoremas matemáticos. En general, un argumento comienza con conjunción de proposiciones llamadas **premisas o hipótesis** que constituye el anteedente de una implicación cuyo consecuente es una proposición llamada **conclusión** del argumento. Su expresión general es:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q, \tag{1}$$

siendo $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ sus hipótesis y q la conclusión a la que se pretende llegar a partir de ellas.

Demostrarlo consiste en mostrar que ésta es una **implicación lógica**. Es decir, mostrar que la implicación siempre es verdadera; por ende, se deberá descartar que en algún caso la conjunción de las hipótesis sea verdadera (para esto, cada una de ellas debe serlo) y la conclusión sea falsa.

Hay diversos métodos para demostrar que un teorema es un razonamiento válido. El más simple consiste en examinar y relacionar las hipótesis para mostrar que, si cada $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ es verdadera, como consecuencia de ello la proposición q también es verdadera. Por otro lado, si alguna de las $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ es falsa, entonces, sin importar qué valor de verdad tenga q, la implicación (1) es verdadera. Claramente estos casos nunca modifican el hecho de que la implicación sea (o no sea) tautología, por ello carecen de importancia.

Hay otros métodos de demostración que consisten en probar formas equivalentes a la implicación (1).

Otra aplicación importante de las equivalencias lógicas es que permiten encontrar expresiones simplificadas de una proposición compuesta y equivalente a la dada. Este procedimiento produce mejoras en el diseño de circuitos eléctricos o electrónicos, haciéndolos más sencillos (en el sentido de que reduce costos y optimiza el espacio que se requiere para implementarlos).

Se le adjuntan tablas de las más usuales.

EQUIVALENCIAS LÓGICAS	
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$	leyes conmutativas
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	leyes asociativas
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	leyes distributivas
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{1}$	tautología[1]
$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{0}$	contradicción[2]
$p \vee \mathbf{0} \equiv p$ $p \wedge \mathbf{1} \equiv p$	leyes de identidad
$p \to q \equiv \neg p \vee q$	implicación
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$	contrarrecíproca
$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$	bicondicional
$p \to q \equiv p \wedge \neg q \to \mathbf{0}$	reducción al absurdo
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	leyes de De Morgan
$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$	negación de implicación
$\neg(\neg p) \equiv p$	doble negación

IMPLICACIONES LÓGICAS	
$p \Rightarrow p \vee q$	adición
$p \wedge q \Rightarrow p$	simplificación
$p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$	modus ponens
$(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$	modus tollens
$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$	silogismo hipotético
$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$	silogismo disyuntivo
$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$	transitiva del bicondicional

Ejemplo 1.5 Dadas la proposición compuesta $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$. ¿Es posible simplificarla?

Es decir, ¿se puede encontrar un enunciado más simple lógicamente equivalente al dado? Aquí se tiene que:

$$
\begin{array}{lll}
 & (p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) & \\
\iff & (p \vee q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg q) & \text{ley de De Morgan} \\
\iff & (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) & \text{doble negación} \\
\iff & p \vee (q \wedge \neg q) & \text{distributiva de } \vee \text{ sobre } \wedge \\
\iff & p \vee \mathbf{0} & \text{contradicción} \\
\iff & p & \text{ley de identidad}
\end{array}
$$

Por lo tanto, vemos que: $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \iff p$; así que podemos expresar la proposición compuesta original mediante el enunciado más simple y lógicamente equivalente p.

[1] La proposición designada con **1** es una proposición siempre verdadera, también suele designarse con t.
[2] La proposición designada con **0** es una proposición siempre falsa, también suele designarse con f.

1.4. Uso de cuantificadores

Enunciados como "x es un número primo", no es una proposición ya que no se puede determinar su valor de verdad. El sujeto de este enunciado es variable. Sin embargo, cuando se asigna un valor a la variable que interviene se convierte en proposición:

- 3 es un número primo
- 64 es un número primo.

Esto es, si x se fija en el valor 3 se obtiene una proposición verdadera, mientras que fijarlo en 64, produce una proposición falsa. Por esto, el enunciado inicial, no es proposición ya que tendrá distinto valor de verdad según qué se asigne a la variable x. Este tipo de enunciados son llamados funciones proposicionales y se definen como:

Definición 1.3: Función proposicional

Un enunciado es una función proposicional si

1) contiene una o más variables, y
2) no es una proposición, pero
3) se convierte en una proposición cuando las variables que contiene se reemplazan por alguna opción permitida.

Observación: las funciones proposicionales de las que habla la definición corresponden a enunciados simples (a los que no es posible descomponer en otros más sencillos), pero también pueden ser compuestos (que son enunciados simples vinculados con conectivos y/o negaciones). Se usará la notación de funciones usual para las funciones proposicionales; el ejemplo dado anteriormente que corresponde a una función proposicional de sólo una variable, se simbolizará como:

$$p(x) : x \text{ es un número primo.}$$

Como funciones que son, deben tener un dominio de aplicación, aquí llamado **universo de discurso**. Es decir, un conjunto que contiene las opciones permitidas para las variables. El tercer elemento de la definición, en nuestro ejemplo, tiene como universo de discurso al conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$), para cuyos valores la expresión tiene sentido. De ninguna manera podría ser su universo de discurso el conjunto de los números racionales o el de los tipos de fruta que crecen en zonas tropicales, ya que se obtendría proposiciones sin sentido alguno.

Si se retoma con el análisis de veracidad de las proposiciones que se forman cuando se fija el valor de x, se puede ver que $p(2), p(3)$ o $p(11)$, entre otras, son proposiciones verdaderas; mientras que $p(14), p(51)$ resultan falsas. Por lo tanto, se puede construir una proposición verdaderas si se agrega una cuantificación sobre la variable:

- Para algún x, $p(x)$.
- Existe algún x tal que $p(x)$.
- Existe al menos un x tal que $p(x)$.

Una forma de cuantificar la variable es el **cuantificador existencial**. La proposición que se forma se simboliza con:

$$\exists x : p(x). \qquad \text{o} \qquad \exists x \in X : p(x).^{a}$$

[a] Si del contexto no se desprende cuál es el universo de discurso, puede usar esta notación más rigurosa.

Por otro lado, si se considera la proposición $q(x)$: $2x$ es un número par, resulta ser que es verdadera para cualquier valor natural (o inclusive entero) que se asigne a x. Esto muestra la necesidad de introducir otro tipo de cuantificador que permita expresar esta situación con más precisión.

El modo de indicar que un enunciado comprende a todos los sujetos posibles del universo de discurso es el **cuantificador universal** y la proposición así formada se simboliza con:

$$\forall x : q(x) \qquad \text{o} \qquad \forall x \in X : q(x).$$ [a],

[a] Si del contexto no se desprende cuál es el universo de discurso, puede usar esta notación más rigurosa.

Algunas formas de leer una proposición cuantificada de este modo son:

- Para todo x, $q(x)$.
- Cualquier x cumple $q(x)$.
- Todo x verifica $q(x)$.

El valor de verdad de estas proposiciones cuantificadas ya no depende de un único sujeto, sino del cuantificador usado y de la función proposicional que éste alcance. Se sintetiza el análisis en la siguiente tabla.

Proposición	**¿Cuándo es verdadera?**	**¿Cuándo es falsa?**
$\exists x : p(x)$	Para algún a (al menos uno) en el universo, $p(a)$ es verdadera.	Para todo a en el universo, $p(a)$ es falsa.
$\forall x : q(x)$	Para cada a del universo, $q(a)$ es verdadera.	Existe al menos un a en el universo tal que $q(a)$ es falsa.

Una implicación lógica importante es la que se enuncia en la siguiente propiedad.

Propiedad 1.1

Dada una función proposicional $p(x)$ con universo U, se verifica que:

$$[\,\forall x : p(x)\,] \Rightarrow [\,\exists x : p(x)\,]$$

Esta propiedad es muy útil, ya que nos permite aplicar un resultado probado para un determinado universo de discurso, a uno más acotado.

Finalmente se desarrolla el siguiente ejemplo para mostrar algunas formas de relacionar cuantificadores con los conectivos lógicos y cómo analizar la validez de las proposiciones así formadas.

Ejemplo 1.6 Dadas las funciones proposicionales, cuyo universo es el conjunto de los reales ($\mathbb{R}$):

$$p(x) : x \geq 0 \qquad r(x) : x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$q(x) : x^2 \geq 0 \qquad s(x) : x^2 - 3 > 0.$$

Entonces, las siguientes proposiciones son verdaderas:

1. $\exists x\,[p(x) \wedge r(x)]$

   Es cierto porque el número 4, por ejemplo, es real y hace verdadera tanto $p(4)$ como $r(4)$.

2. $\forall x\,[p(x) \to q(x)]$

   Para estudiar el valor de verdad de esta proposición, nos conviene separar en casos:

   - Si x toma un valor real negativo a, entonces $p(a)$ es falso, por lo que $p(a) \to q(a)$ es verdadero independientemente del valor de verdad de $q(a)$.
   - Si x toma un valor real no negativo b (esto es, positivo ó 0), tanto $p(b)$ como $q(b)$ son verdaderos, al igual que $p(b) \to q(b)$.

   Por lo tanto, $p(x) \to q(x)$ es verdadero para todas las sustituciones de x tomadas del universo de todos los números reales, y la proposición cuantificada $\forall x\,[p(x) \to q(x)]$ es verdadera.

   La proposición (2) se puede expresar coloquialmente con cualquiera de las siguientes formas:

   a) Para todo número real x, si $x \geq 0$, entonces $x^2 \geq 0$.
   b) Todo número real no negativo tiene un cuadrado no negativo.
   c) El cuadrado de cualquier número real no negativo es un número real no negativo.
   d) Todos los números reales no negativos tienen cuadrados no negativos.

Mientras que las afirmaciones que se enlistan a continuación, son falsas.

3. $\forall x\,[q(x) \to s(x)]$

   Si se quiere mostrar que la afirmación es falsa, sólo es necesario exhibir un **contraejemplo**, es decir, un valor de x para el cual $q(x) \to s(x)$ sea falso, ya que eso echa por tierra la posibilidad de que la implicación sea verdadera para *todo* x. Reemplazando x por 1, se vé que $q(1)$ es verdadero y $s(1)$ es falso, por lo tanto $q(1) \to s(1)$ es falso, y en consecuencia la afirmación (cuantificada) $\forall x\,[q(x) \to s(x)]$ es falsa. De hecho, $x = 1$ no produce el único contraejemplo: cada número real a entre $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$ hará que $q(a)$ sea verdadero y $s(a)$ falso, pero para mostrar la falsedad de una proposición cuantificada universalmente, basta con encontrar sólo un caso que no lo cumpla.

   La afirmación (3) puede traducirse en cualquiera de las siguientes:

   a) Para cada número real x, si $x^2 \geq 0$, entonces $x^2 - 3 > 0$.
   b) Para todo número real x cuyo cuadrado sea no negativo entonces $x^2 - 3$ es positivo.

4. $\forall x\ [r(x) \vee s(x)]$

   Aquí hay muchos valores para x, como 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$ y 0, que producen contraejemplos. Sin embargo, al cambiar los cuantificadores, encontramos que la afirmación $\exists x\,[r(x) \vee s(x)]$ es verdadera (por lo menos lo es para $x = -5$).

5. $\forall x\,[r(x) \to p(x)]$

   El número real -1 es una solución de la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$, por lo que $r(-1)$ es verdadero mientras que $p(-1)$ es falso. Por lo tanto, la elección de -1 proporciona el contraejemplo que necesitamos para mostrar que esta afirmación (cuantificada) es falsa. A diferencia de la proposición anterior, ésta posee un único contraejemplo, ya que el otro valor real que haría verdadero el antecedente es $x = 4$, pero para él $r(4) \to p(4)$ es verdadera.

1.4.1. Negación de proposiciones cuantificadas

Los teoremas enuncian propiedades que tienen los objetos matemáticos (números, funciones, matrices, vectores, rectas, etc) y son enunciados ligados a proposiciones cuantificadas que contienen un condicional o bicondicional como conectivo principal. Tener claro el modo de negar conectivos y cuantificadores es una herramienta importante para interpretar los teoremas.

Las negaciones de cada proposición cuantificada vienen dadas por las siguientes equivalencias:

$$\neg(\exists x : P(x)) \quad \equiv \quad \forall x : \neg P(x) \tag{2}$$
$$\neg(\forall x : P(x)) \quad \equiv \quad \exists x : \neg P(x) \tag{3}$$

El siguiente ejemplo muestra el uso de las equivalencias dadas para negar distintas proposiciones cuantificadas y compuestas.

Ejemplo 1.7

1. Para dar una forma equivalente a la negación de $\forall x\,[p(x) \to q(x)]$ se usan diferentes equivalencias.

$$\begin{aligned} & \neg\,(\,\forall x\,[p(x) \to q(x)]\,) & \\ \equiv\ & \exists x : \neg\,[p(x) \to q(x)] & & (3) \\ \equiv\ & \exists x : [p(x) \wedge \neg q(x)] & & \text{negación de implicación} \end{aligned}$$

2. Se busca la negación de $\forall x\,[p(x) \leftrightarrow q(x)]$.

$$\begin{aligned} & \neg\,(\,\forall x\,[p(x) \leftrightarrow q(x)]\,) & \\ \equiv\ & \exists x : \neg\,[p(x) \leftrightarrow q(x)] & & (3) \\ \equiv\ & \forall x : \neg\,(\,[p(x) \to q(x)] \wedge [q(x) \to p(x)]\,) & & \text{bicondicional} \\ \equiv\ & \forall x : \neg\,[p(x) \to q(x)] \vee \neg\,[q(x) \to p(x)] & & \text{ley de De Morgan} \\ \equiv\ & \forall x : [p(x) \wedge \neg q(x)] \vee [q(x) \wedge \neg p(x)] & & \text{negación de implicación} \end{aligned}$$

3. Se niega, a continuación, la proposición $\exists x\,[\neg p(x) \vee q(x)]$.

$$\begin{aligned} & \neg\,(\,\exists x\,[\neg p(x) \vee q(x)]\,) & \\ \equiv\ & \forall x : \neg\,[\neg p(x) \vee q(x)] & & (2) \\ \equiv\ & \forall x : \neg\neg p(x) \wedge \neg q(x) & & \text{ley de De Morgan} \\ \equiv\ & \forall x : p(x) \wedge \neg q(x) & & \text{doble negación} \end{aligned}$$

1.4.2. Cuantificadores anidados

Muchos teoremas o propiedades involucran más de una variable y como consecuencia de ello, más de un cuantificador que tendrán una relación determinada por el orden en que aparecen en la proposición. Se dice entonces que estas proposiciones tienen cuantificadores anidados. No se pretende hacer un estudio exhaustivo de ellos, pero sí analizar algunos ejemplos.

Ejemplo 1.8 Se establece $p(m,n) : m \leq n$, con m, $n \in \mathbb{N}$

- $\forall m \forall n : p(m,n)$

  Se puede leer como: Todo natural m es menor o igual que cualquier otro natural n.

  Es una proposición falsa. Basta con considerar $m = 5$ que aunque sea menor o igual que muchos (de hecho infinitos) números naturales, hay algunos que no cumplen esa condición como $n = 3$, con lo cual no se verifica que lo cumplan *todos* los n posibles.

- $\forall m \exists n : p(m,n)$

  Coloquialmente se lee como: Para cada natural m es posible encontrar al menos un natural n que sea menor o a lo sumo igual que él.

  Es verdadera, ya que cualquiera sea el número natural m que se elija, será posible enontrar por lo menos otro natural n que sea mayor o igual que el primer elegido; como mínimo él mismo ($m = n$) y también existe siempre el siguiente de m que lo verifica ($n = m + 1$).

- $\exists m \exists n : p(m,n)$

  Una forma de leerla sería: Existe al menos un natural menor o igual que algún otro natural.

  Es una proposición verdadera y como los dos cuantificadores que posee para sus variables son del tipo existencial, su veracidad se justifica encontrando un valor para m y otro para n que así lo demuestren (podrían ser, por ejemplo $m = 15$ y $n = 20$). El lector advertirá rápidamente que proposiciones de este tipo carecen de relevancia.

- $\exists m \forall n : p(m,n)$

  Se puede leer como: hay al menos un número natural (m) que es menor o igual que cualquier otro natural (n).

  Resulta ser una proposición verdadera y para demostrarlo hay que encontrar un candidato m y verificar que cumple la condición con todo n posible. Aquí el 1 que es un número natural que cumple $1 \leq n$, para todos los valores naturales posibles que tome n.

Observaciones:

- Las proposiciones que se obtienen al cambiar el orden de los cuantificadores, no son equivalentes entre sí (en nuestro ejemplo anterior serían la primera y la cuarta). Lo son si ambos cuantificadores son del mismo tipo, los dos existenciales o los dos universales.

- Para el estudio de propiedades matemáticas no suelen usarse los símbolos lógicos, sino más bien sus expresiones coloquiales. Si se usaran símbolos se hace con una notación simplificada, por ejemplo:

  $$\forall m \, \exists n : m \leq n,$$

  como expresión equivalente a la segunda proposición del ejemplo anterior y entendiendo que el universo es conocido.