UNIDAD 1

Índice

2. Números Complejos

Los números complejos surgen naturalmente en el curso de la resolución de ecuaciones polinomiales. Por ejemplo, las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, que son dadas por la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

son números complejos si el discriminante (la expresión dentro del radical) es negativa.
Hace falta entonces redefinir el modo de operar con estos números y revisar las propiedades más importantes que verifican los complejos con estas operaciones.

2.1. Definiciones básicas

Como la ecuación $x^2 = -1$ no tiene soluciones reales, los matemáticos del siglo XVIII inventaron el **número imaginario** i, que verifica

$$i^2 = -1,$$

asumiendo que tiene la propiedad $i = \sqrt{-1}$, y de este modo se pudo dar solución a estas ecuaciones. Además, muchos problemas que modelan fenómenos físicos que se repiten periódicamente, se resuelven más sencillamente trabajando con números complejos.

Definición 2.1: Números complejos

- Una expresión de la forma:

$$z = a + bi \quad \text{ó} \quad z = a + ib$$

  donde a y b son números reales, se denomina un número complejo. i es la unidad imaginaria que verifica: $i^2 = -1$.

- Se llama a a parte real de ese número complejo y suele escribirse como $\text{Re}(z)$; por otro lado, b es su parte imaginaria y suele escribirse como $\text{Im}(z)$.

- El conjunto de todos los números complejos se denota por $\mathbb{C} = \{a + bi \,|a, b \in \mathbb{R}\}$.

Observaciones:

- La primera forma de anotar al número complejo, $z = a+bi$, se llama **expresión binomial o rectangular** del número complejo.

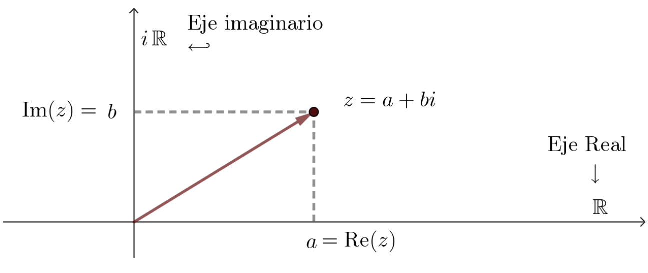
- También se usa para designarlo la notación como **par ordenado**: $z = (a, b)$.

- Si z es un número complejo tal que $\text{Re}(z) = 0$, es decir, cuya parte real es cero, se dice que es **imaginario puro**.

  Análogamente, un número complejo z cuya parte imaginaria es cero, $\text{Im}(z) = 0$, es un **real puro**, por lo que los números reales pueden ser considerados un subconjunto de los números complejos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

- Se llama **unidad imaginaria** al número complejo, imaginario puro, $z = 0 + 1i = i$ que tiene un comportamiento particular descrito en una propiedad de la siguiente sección.

- A la hora de representar gráficamente, se hace una correspondencia entre los números complejos y $\mathbb{R}^2$. Es decir que geométricamente un número complejo puede verse como un punto o como un vector en el plano xy, al que se le llama *plano complejo*. En este contexto, el eje x se denomina *eje real* y el eje y *eje imaginario*.



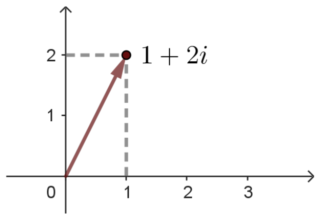
Claramente, los números complejos que sean reales puros (con $b = 0$), geométricamente corresponden a puntos en el eje real. Del mismo modo, los números complejos imaginarios puros, tienen su representación geométrica como puntos en el eje imaginario.[1]

Ejemplo 2.1

[1]Habrá notado que a los elementos de $\mathbb{R}^2$ se les llama a veces pares ordenados de reales, otras vectores o puntos y también números complejos. Esto es porque en $\mathbb{R}^2$ conviven varias estructuras, cada una con su terminología propia. Según cuál sea el área de la Matemática en la que se esté estudiando $\mathbb{R}^2$, será la estructura, terminología usada y cómo se opera entre sus elemntos.

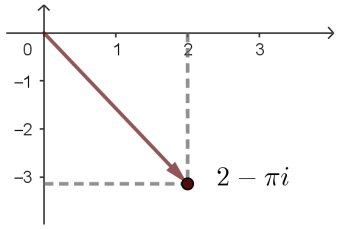
1. Dado el número complejo $z_1 = 1 + 2i$, se tiene que:

$$\mathrm{Re}(1+2i) = 1$$
$$\mathrm{Im}(1+2i) = 2$$



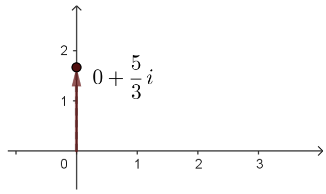
2. El número complejo $z_2 = 2 - \pi i$ tiene:

$$\mathrm{Re}(2-\pi i) = 2$$
$$\mathrm{Im}(2-\pi i) = -\pi$$



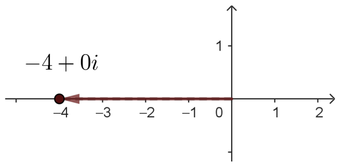
3. El número complejo $z_1 = 0 + \frac{5}{3}i$ es un imaginario puro:

$$\mathrm{Re}\left(0+\frac{5}{3}i\right) = 0$$
$$\mathrm{Im}\left(0+\frac{5}{3}i\right) = \frac{5}{3}$$



4. El número complejo $z_1 = -4 + 0i$, a diferencia del anterior, es real puro:

$$\mathrm{Re}(-4+0i) = -4$$
$$\mathrm{Im}(-4+0i) = 0$$



Definición 2.2

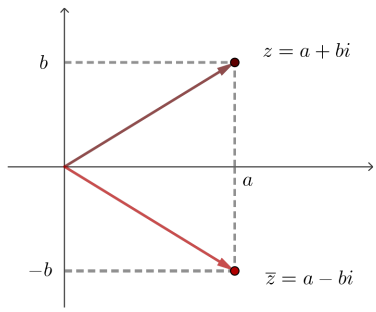
Se considera que dos números complejos son iguales si y sólo si tienen igual parte real e igual parte imaginaria; es decir,

$$a + bi = c + di \quad \text{si y solo si} \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d$$

Definición 2.3

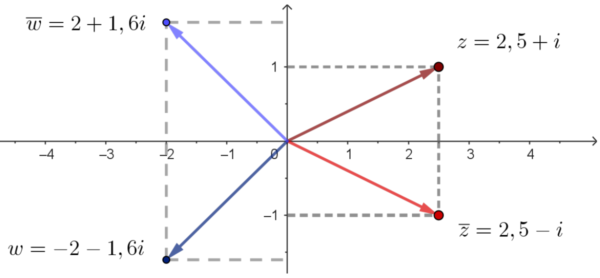
Dado el número complejo $z = a + bi$, se define su conjugado como el número complejo dado por $\overline{z} = a - bi$.

En la gráfica de la izquierda se prepresenta z y su conjugado $\overline{z}$. Son dos números complejos que coinciden en su parte real, pero cuyas componentes imaginarias tienen signos contrarios.



Ejemplo 2.2

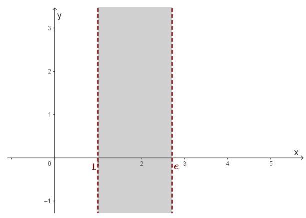
Se muestra a continuación, la gráfica de dos números complejos con sus respectivos conjugados.



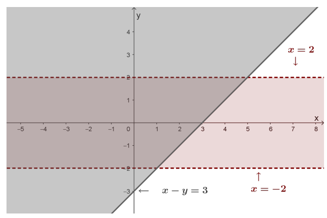
En diversas situaciones se requiere graficar muchos (infinitos) números complejos, ya que se tiene referencia de alguna condición que puede ser cumplida por muchos de ellos. Ilustramos algunos casos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3 Represente gráficamente,en cada item, los números complejos que verifiquen simultáneamente las condiciones requeridas.

1. Los complejos $z = x + iy$ tales que $1 < x < e$:
   De estos números sólo se sabe que su parte real ($\mathrm{Re}(z) = x$) debe tomar valores que se encuentren entre 1 y el número e.
   Mientras que la parte imaginaria de esos números complejos ($\mathrm{Im}(z) = y$) puede ser cualquier número real, ya que no se imponen restricciones sobre ella.

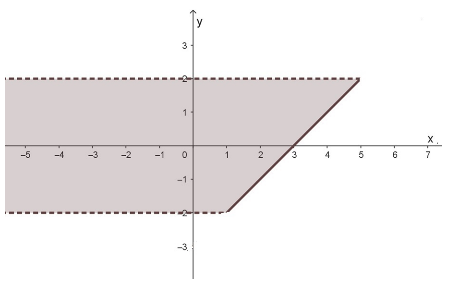


2. Los complejos $z = x + iy$ tales que



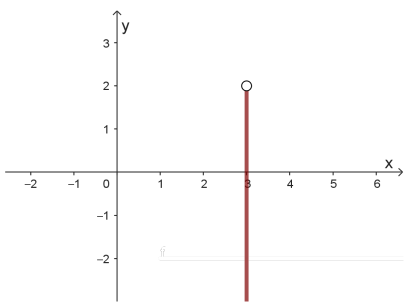
$$\begin{cases} |y| < 2 \\ x - y \leq 3 \end{cases}$$

   En el primer gráfico se muestran sombreadas las dos regiones y en la segunda la región que cumple con las dos condiciones simultáneamente.



3. Los complejos $z = x + iy$ tales que

$$\begin{cases} x = 3 \\ \mathrm{Im}(z) < 2 \end{cases}$$



2.1.1. Ejercicios

1. Calcular y representar gráficamente los siguientes números complejos y sus conjugados:

   a) $z_1 = 3i$ c) $z_3 = 5e$ e) $z_5 = -1 - i$ g) $z_7 = 2 - i$

   b) $z_2 = -2i$ d) $z_4 = 1 + i$ f) $z_6 = 0$ h) $z_8 = -1 + 3i$

2. Represente gráficamente el conjunto de todos los números complejos que verifican las siguientes condiciones.

   a) $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ -1 \leq \operatorname{Im}(z) < 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x| < \pi \\ \operatorname{Im}(z) > 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 3 \vee y = 5 \\ \operatorname{Re}(z) > -2 \end{cases}$

2.2. Operaciones con números complejos y sus propiedades

Definición 2.4: Operciones con números complejos

Sean $z = (a + bi)$ y $w = (c + di)$ dos números complejos cualesquiera, se define en $\mathbb{C}$:

- La **suma** de ellos es el número complejo obtenido de la siguiente manera:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

- La **multiplicación** de ellos es el número complejo obtenido de la siguiente manera:

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

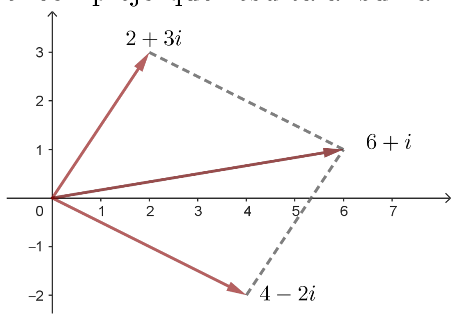
En lo que sigue, el producto de números complejos se escribirá como $z\,w$, sin agregar el punto entre ellos, del mismo modo que se hace entre números reales.

Se debe tener en cuenta que si $z = a$ (es decir que z es real puro) y $w = c + di$, el producto entre ambos se obtiene como $z\,w = ac + adi$.

Ejemplo 2.4

- Dados los complejos: $z_1 = (2 + 3i)$ y $z_2 = (4 - 2i)$, el complejo que resulta al sumarlos es:

$$\begin{aligned} z =& z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 - 2i) = \\ =& 2 + 4 + (3 - 2)i = \\ =& 6 + 1i = 6 + i, \end{aligned}$$



mientras que al multiplicarlos se obtiene el número complejo

$$\begin{aligned} z =& z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (4 - 2i) = \\ =& (2 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) + (2 \cdot (-2) + 3 \cdot 4)i = \\ =& 14 + 8i. \end{aligned}$$

- Para $z_1 = -5 + \pi i$ y $z_2 = 4$, se tiene que:
$$z_1 + z_2 = (-5 + \pi i) + 4 = -1 + \pi i \qquad \text{y} \qquad z_1\, z_2 = (-5 + \pi i)\, 4 = -20 + 4\pi i$$
- Para $z_1 = \left(\frac{2}{9} + 4i\right)$ y $z_2 = 3i$, se tiene que:
$$z_1 + z_2 = \left(\frac{2}{9} + 4i\right) + 3i = \frac{2}{9} + 7i \qquad \text{y} \qquad z_1\, z_2 = \left(\frac{2}{9} + 4i\right) \cdot 3i = -12 + \frac{2}{3}i$$

Se enuncia a continuación, las propiedades que verifican la suma y multiplicación compleja. Las mismas, le serán familiares ya que los números reales también las cumplen; es decir, que a pesar de haberse ampliado el conjunto numérico (de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$) siguen siendo válidas las propiedades de sus operaciones fundamentales.

Propiedad 2.1: Propiedades de la adición y multiplicación en $\mathbb{C}$

1. **Conmutatividad**: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ y $z_1 z_2 = z_2 z_1$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
2. **Asociatividad**: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ y $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.
3. **Identidad**: $z + 0 = z$ y $z1 = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
4. **Inverso aditivo**: Para cada $z \in \mathbb{C}$, existe un único $w \in \mathbb{C}$ tal que $z + w = 0$.
   Usualmente este w se designa con $-z$.
5. **Inverso multiplicativo**: Para cada $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$, existe un único $w \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot w = 1$.
   Usualmente este w se designa con z^{-1}.
6. **Propiedad distributiva**: $z_3(z_1 + z_2) = z_3 z_1 + z_3 z_2$ para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Demostración: Cada uno de los enunciados en la propiedad anterior se prueba utilizando las propiedades que tienen la adición y multiplicación usuales en los números reales y las definiciones de suma y multiplicación en $\mathbb{C}$.

- Se demuestra la propiedad conmutativa de la multiplicación de complejos:
  Para demostrar que $z_1 z_2 = z_2 z_1$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se considera:
$$z_1 = a + bi \quad \text{y} \quad z_2 = c + di,$$
  donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Entonces, la definición de la multiplicación de números complejos muestra que:
$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
  y, por otro lado:
$$\begin{aligned} z_2 z_1 &= (c + di)(a + bi) \\ &= (ca - db) + (da + cb)i \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$
  Esta última igualdad se puede asegurar gracias a que se verifica la propiedad conmutativa del producto en $\mathbb{R}$. Luego, a partir de las igualdades anteriores se concluye que $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

- Si se quiere probar que para cada $z = a + bi \in \mathbb{C}$ existe un inverso multiplicativo $w = x + yi \in \mathbb{C}$, se considera la ecuación que deberían verificar: $z \cdot w = 1$ (si ya se ha probado la conmutatividad del producto, no es necesario probar la simetría del inverso). Si esta ecuación, con incógnita w, tiene solución quiere decir que es posible hallar un inverso multiplicativo para cada z complejo que se elija.

$$\begin{aligned} z \cdot w =& 1 \\ (a + bi)(x + yi) =& 1 + 0i \\ (ax - by) + (ay + bx)i =& 1 + 0i \end{aligned}$$

  Para que se verifique la igualdad entre los complejos de ambos miembros deben coincidir tanto sus partes reales, como las imaginarias. Para esto se plantea el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

  Resolviendo dicho sistema (las cuentas de ello se dejan a cargo del lector), se encuentra que:
$$w = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i,$$
  este número existe siempre, dado que $z \neq 0$.

- Se deja al lector la tarea de realizar el resto de las demostraciones. ■

Ejemplo 2.5 Dado el número complejo: $z = 3 - 4i$ tiene por inverso a:

$$z^{-1} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25} i$$

dado que:

$$\begin{aligned} z\, z^{-1} =& (3 - 4i) \left(\frac{3}{25} + \frac{4}{25} i \right) \\ =& 3\,\frac{3}{25} - (-4)\frac{4}{25} + \left(3\frac{4}{25} + (-4)\frac{3}{25} \right) i \\ =& \frac{9}{25} + \frac{16}{25} + \left(\frac{12}{25} - \frac{12}{25} \right) i \\ =& \frac{25}{25} + 0i = \ 1 + 0i = \ 1. \end{aligned}$$

Definición 2.5: Potencias enteras de números complejos

Sean $z \in \mathbb{C}$ y $m \in \mathbb{Z}$. Se define z^m como el producto de z consigo mismo m veces:

$$z^m = \underbrace{z \cdots z}_{m \text{ veces}}.$$

La potenciación de números complejos verifica propiedades análogas a las conocidas en $\mathbb{R}$. Por ejemplo:

Propiedad 2.2

$$(z^m)^n = z^{mn} \quad \text{y} \quad (zw)^m = z^m w^m$$

para todo $z, w \in \mathbb{C}$ y todos los enteros positivos m, n.

La siguiente propiedad caracteriza el comportamiento de las potencias de la unidad imaginaria:

Propiedad 2.3: Potencias de la unidad imaginaria i

Para todo $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ tenemos que

$$i^n = i^{4k+r} = \begin{cases} 1, & \text{cuando } r = 0 \\ i, & \text{cuando } r = 1 \\ -1, & \text{cuando } r = 2 \\ -i, & \text{cuando } r = 3 \end{cases}$$

donde $n = 4k + r$ con $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ y $r = 0, 1, 2, 3$ (restos de la división por 4).

Ejemplo 2.6

- Calcular i^{2086}:

  Como $2086 = 4 \cdot 521 + 2$, entonces:

  $$i^{2086} = i^2 = -1.$$

- Para calcular i^{-97}, dado que $-97 = 4 \cdot (-25) + 3$, de donde:

  $$i^{-97} = i^3 = -i.$$

Propiedad 2.4

Para cualquier par de números complejos z y w, y cualquier número real k, se verifican las siguientes igualdades:

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
- $\overline{kw} = k\,\overline{w}, \ k \in \mathbb{R}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
- $\overline{\overline{z}} = z$

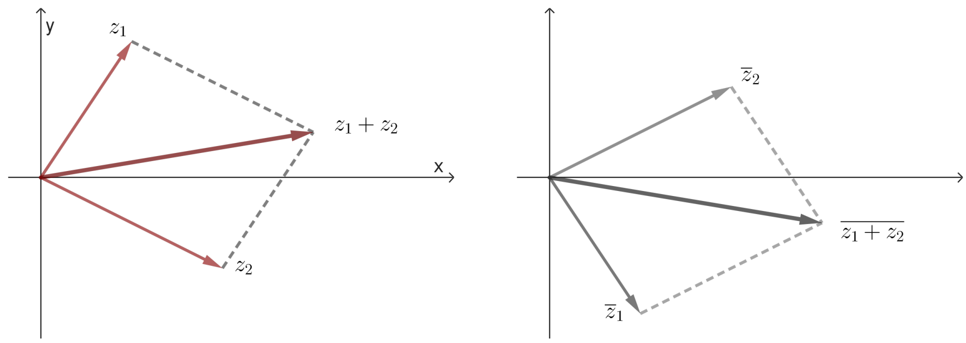
Ejemplo 2.7 Si se tienen los números complejos $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 4 - 2i$, se verifica que:

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 - 2i) = 6 + i \qquad \text{con lo que} \qquad \overline{z_1 + z_2} = 6 - i.$$

Por otro lado:

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (2 - 3i) + (4 + 2i) = 6 - i.$$

Como era de esperarse por el enunciado de la propiedad, ambos resultados coinciden. A continuación se muestra gráficamente el ejemplo calculado analíticamente:



Si $z = a + ib$ se verifica que $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$, de modo que por definición de magnitud de un complejo se tiene

$$z\overline{z} = |z|^2$$

Si se usa esta propiedad, se puede escribir la división de los complejos z y w, con $w \neq 0$, como

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\overline{w}}{w\,\overline{w}} = \frac{z\,\overline{w}}{|w|^2}$$

Como una consecuencia, se puede calcular el inverso de un complejo $z \neq 0$ de la siguiente manera

$$\frac{1}{z} = \frac{1\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a}{|z|^2} - \frac{b}{|z|^2}i$$

Ejemplo 2.8 Sea $z = 5 - 4i$. Si se quiere calcular su inverso (es decir, el número complejo que se obtiene como $\frac{1}{z}$) es posible hacerlo con lo observado anteriormente, como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5-4i} &= \frac{1}{5-4i}\frac{5+4i}{5+4i} = \frac{5+4i}{25-16i^2} \\ &= \frac{5+4i}{41} = \frac{5}{41} + \frac{4}{41}i \end{aligned}$$

Por otro lado, para encontrar el complejo que sea resultado de la siguiente división:

$$\frac{4+7i}{3-2i} = \frac{(4+7i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{(4+7i)(3+2i)}{9-4i^2} = \frac{2}{13} + \frac{29}{13}i$$

2.2.1. Ejercicios

1. Calcular y representar gráficamente la suma de los siguientes números complejos, respecto de los dados en 2.1.1:

   a) $z_1 + z_7$
   b) $z_1 + z_3$
   c) $z_2 + z_4$
   d) $z_4 + z_5$
   e) $z_7 + z_8$
   f) $z_5 - z_7$

2. Calcular y representar gráficamente el producto de los siguientes números complejos, respecto de los dados en 2.1.1:

   a) $z_1 \cdot i$
   b) $z_1 \cdot z_7$
   c) $z_3 \cdot i$
   d) $z_4 \cdot i$
   e) $z_5 \cdot i$
   f) $z_5 \cdot z_8$

3. Demostrar que las operaciones de suma y producto de números complejos dotan a $\mathbb{C}$ de una estructura de cuerpo conmutativo.

4. Comprobar que:

   a) $(1-i)^4 = -4$
   b) $\frac{5+10i}{3-4i} + \frac{2-i}{i} = -2$
   c) $(1+i)^5 = -4-4i$.

5. Realizar las siguientes operaciones con números complejos:

   a) $\frac{68}{(1-i)(2-i)(3-i)}$
   b) $(2+i) - i(1-2i)$.
   c) $\frac{(2+i)}{(4-3i)} + \frac{(3+i)}{5i}$
   d) $(3-2i)(3+2i)$.

6. Analizar la veracidad de las siguientes proposiciones.

   a) $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z)$.
   b) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z)$.
   c) $\operatorname{Re}((3-i)(\frac{1}{5} + \frac{1i}{10}).(3+i)) = 2$.
   d) $\operatorname{Im}(|iz|) = 0$.
   e) $\operatorname{Im}(z^3) = 3x^2y - y^3$.
   f) $\operatorname{Im}(z^3) = y^3$.
   g) $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

7. Encontrar una expresión general para cada uno de los cálculos propuestos, con $z = a+ib$:

   a) $\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)$.
   b) $\operatorname{Re}(z^4)$.
   c) $(\operatorname{Re}(z))^4$.

2.3. Forma polar de un número complejo

Definición 2.6: Módulo y Argumento de un número complejo

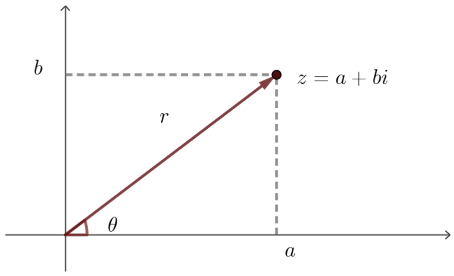
Sea $z = a + bi$ un complejo no nulo.
Se define como el módulo (o magnitud) de z al número real positivo r dado por

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Se define el argumento de z como el ángulo entre la parte positiva del eje real y la semirrecta con origen en $(0, 0)$ y que contiene al punto (a, b), y se denota como

$$\theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right), \qquad \text{con } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

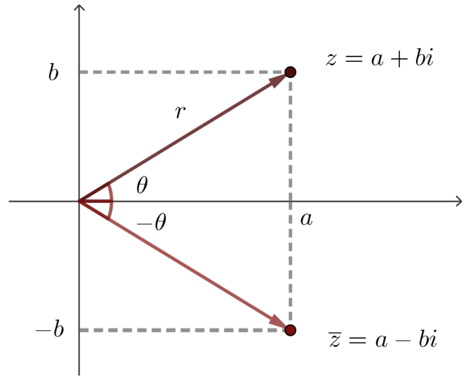
Observación: En la calculadora la función arctan (que para un número real x determinado devuelve el ángulo θ cuya tangente vale x) se escribe $\tan^{-1}$.



Se puede verificar que, geométricamente, el módulo de un complejo es la distancia del origen al punto que representa al número en el plano. En la figura de la izquierda se puede observar el módulo r y el argumento θ del complejo $z = a + bi$.

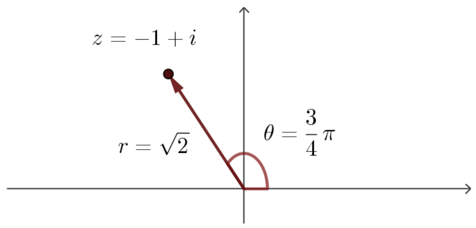
En la figura de la derecha se puede observar la relación que existe entre el módulo y el argumento de un complejo y su conjugado. Se cumple que

$$|z| = |\overline{z}| \quad \text{y} \quad \arg(z) = -\arg(\overline{z})$$



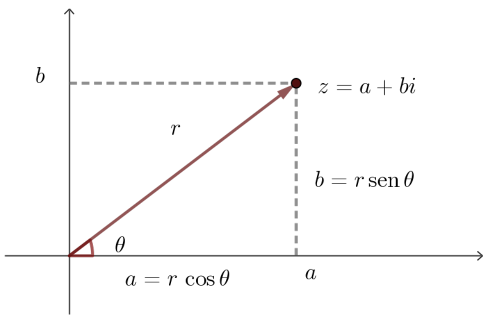
Ejemplo 2.9 El número $z = -1 + i$ tiene magnitud $r = \sqrt{2}$ y argumento $\theta = \frac{3}{4}\pi$ porque:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \text{y}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi.$$



Nota: al valor obtenido como argumento, se le sumó π. Esto se debe a que el valor $-\frac{\pi}{4}$ corresonde a un ángulo del cuarto cuadrante, mientras que número z al que queremos escribir en coordenadas polares, es del segundo cuadrante.

Se puede utilizar la magnitud $|z|$ y el argumento θ de un número complejo para expresarlo de modo más conveniente, sobre todo a la hora de realizar ciertas operaciones.



De la figura adjunta se puede deducir que si $z = a + bi$ entonces el valor de a equivale a $r\cos\theta$ y el de b a $r\operatorname{sen}\theta$. A partir de ello se puede dar la definición que sigue:

Propiedad 2.5

Dados dos números complejos z y w se verifican las siguientes propiedades:

- $|z\,w| = |z|\,|w|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$

Definición 2.7

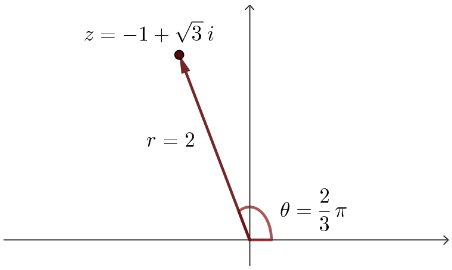
Dado el número complejo $z = a + bi$, no nulo, con módulo (o magnitud) r, real positivo, y argumento θ, se define su expresión en forma polar como:

$$z = r\,(\cos\theta + i \text{ sen}\,\theta)$$

Ejemplo 2.10 Dado el número complejo $z = -1 + \sqrt{3}i$ se puede escribir en su forma polar calculando:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \qquad \theta = \arctan\frac{\sqrt{3}}{-1} = -\frac{2}{3}\pi$$

Claramente, hay más de un ángulo, entre 0 y 2π cuya tangente vale $\frac{\sqrt{3}}{-1}$, deberá detrminarse cuál corresponde de acuerdo al cuadrante en el que se encuentre z.



Si por el contrario, se tiene la forma polar del número complejo $z = \sqrt{52}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\right) + i \text{ sen}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$, es posible hallar su forma rectangular calculando los valores indicados:

$$z = 5{,}67 + 4{,}46i$$

Se puede reescribir las expresión general del producto de dos complejos en forma polar y operar con esta expresión sin necesidad de pasar por su forma binomial. De hecho para algunas operaciones es más conveniente usar la expresión polar.

Dados dos números complejos $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$, el complejo resultante w se calcula como

$$\begin{aligned} w = z_1\, z_2 =& r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)\, r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) = \\ =& r_1\, r_2\Big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)\Big] = \\ =& r_1\, r_2\Big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\Big] \end{aligned}$$

Es decir que el producto de estos números complejos nos da otro complejo de magnitud $r_1 r_2$ (tal como se enuncia en la Propiedad 2.5) y argumento $\theta_1 + \theta_2$.

De manera similar se puede encontrar una expresión para el número complejo w cuando es el cociente entre z_1 y z_2:

$$
\begin{aligned}
w = \frac{z_1}{z_2} =& \frac{r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)} \cdot \frac{\cos\theta_2 - i \operatorname{sen}\theta_2}{\cos\theta_2 - i \operatorname{sen}\theta_2} \\
=& \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 - i \operatorname{sen}\theta_2)}{\cos^2\theta_2 - i^2 \operatorname{sen}^2\theta_2} \\
=& \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 - i \operatorname{sen}\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2} \\
=& \frac{r_1}{r_2} \Big[\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + i(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1) \Big] \\
=& \frac{r_1}{r_2} \Big[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) \Big]
\end{aligned}
$$

Por último se deja propuesto para la práctica probar que el inverso de $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ no nulo, es decir $\frac{1}{z}$ se encuentra de la siguiente manera:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = r^{-1}(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$$

Ejemplo 2.11 Dado los complejos $z_1 = 5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$, es posible encontrar otros números complejos como el que se obtiene al multiplicarlos:

$$
\begin{aligned}
w = z_1\, z_2 =& 5 \cdot 2 \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} \right) \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \right) \\
=& 10 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) \right) \\
=& 10 \left(\cos\frac{13\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{13\pi}{12} \right)
\end{aligned}
$$

Otro ejemplo es el complejo que resulta del cociente de z_1 y z_2:

$$
\begin{aligned}
w = \frac{z_1}{z_2} =& \frac{5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)} \\
=& \frac{5}{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) \right) \\
=& \frac{5}{2} \left(\cos\frac{5\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{12} \right)
\end{aligned}
$$

Finalmente encontramos el complejo w que es inverso de z_1:

$$w = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{5} \left(\cos\frac{3\pi}{4} - i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} \right)$$

2.3.1. Ejercicios

1. Calcular el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

a) $\sqrt{3} - 3i$
b) $-2 - 2i$
c) $1 - \sqrt{3}i$
d) $-4i$

2. Expresar en forma polar los siguientes números complejos:

a) i
b) $-i$
c) $4 + 4i$
d) -4

3. Grafique los conjuntos descriptos en cada uno de los items.

a) El conjunto de números complejos cuyo módulo sea 3, o sea, todos aquellos con $\rho = 3$
b) El conjunto de número complejos que cumplan que $2 < \rho \leq 5$
c) El conjunto de números complejos con $\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 32\pi$. En este caso, escriba además condiciones que describan al mismo conjunto pero que sean en términos de la forma binomial de los complejos.

2.4. Forma exponencial de un número complejo

En esta sección se presenta una forma alternativa de escribir un número complejo, que es se apoya en su expresión polar. Se verá también que la forma exponencial de un número complejo facilita aún más las operaciones de producto, cociente y potencia.
Esta forma de un complejo se obtiene a partir del siguiente teorema, cuya demostración excede al alcance de este curso.

Teorema 2.6: Identidad de Euler

Si θ es un número real, entonces $e^{i\theta} = cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$.

De modo que, con las aclaraciones hechas hasta ahora respecto de la relación entre parte real e imaginaria de un número complejo con su magnitud y argumento, éste puede venir dado con distintas notaciones que se sintetizan a continuación:

Binomial	Polar	Exponencial
$z = a + bi$	$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$	$z = re^{i\theta}$

Dado $z = a + bi$ con magnitud r y argumento θ, su conjugado, $z = a - bi$, tiene la misma magnitud y argumento $-\theta$, por lo que el conjugado de z en su forma polar es

$$\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)),$$

pero si se tiene en cuenta que la función coseno es par $(\cos(-\theta) = cos(\theta))$ y la seno es impar $(\text{sen}(-\theta) = -\,\text{sen}(\theta))$,

$$\overline{z} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta = e^{-i\theta}.$$

La última expresión se obtiene gracias a la identidad de Euler.
En conclusión, si $z = a + bi$, las distintas expresiones para su conjugado $\overline{z}$ son :

Binomial	Polar	Exponencial
$z = a - bi$	$z = r(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)$	$z = re^{-i\theta}$

Ejemplo 2.12 Expresar los siguientes complejos en forma polar y exponencial:

- Para $z = 1 + \sqrt{3}i$, su módulo $r = 2 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$ y su argumento $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$. Como z está en el primer cuadrante, entonces
$$z = \quad 1 + \sqrt{3}i \quad = \quad 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad = \quad 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

- Dado $z = -1 + \sqrt{3}i$, tiene módulo $r = 2$. Cuando se busca el argumento, $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = -\frac{\pi}{3}$, que no corresponde ya que z está en el segundo cuadrante. Entonces se considera el ángulo que tiene la misma tangente y que se obtiene como $\theta = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$. De esta manera
$$z = \quad -1 + \sqrt{3}i \quad = \quad 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \quad = \quad 2e^{i\frac{2}{3}\pi}.$$

- Si $z = -1 - \sqrt{3}i$, tiene magnitud $r = 2$ y $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \frac{1\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$, ya que este número complejo está en el tercer cuadrante. Así
$$z = \quad -1 - \sqrt{3}i \quad = \quad 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \quad = \quad 2e^{i\frac{4}{3}\pi}.$$

- Si se considera el complejo $z = 1 - \sqrt{3}i$, que tiene $r = 2$ y $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}$, y dado que está en el cuarto cuadrante el argumento será $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5}{3}\pi$, entonces
$$z = \quad 1 - \sqrt{3}i \quad = \quad 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad = \quad 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)},$$
o bien
$$z = \quad 1 - \sqrt{3}i \quad = \quad 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) \quad = \quad 2e^{i\frac{5}{3}\pi}.$$

- Si $z = 1 - 2i$, tiene magnitud $r = \sqrt{5}$ y $\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{1}\right) + 2\pi \approx 5,176$ (ya que este número complejo está en el cuarto cuadrante), entonces
$$z = \quad 1 - 2i \quad = \quad \sqrt{5}\,(\cos(5,176) + i\,\mathrm{sen}(5,176)) \quad = \quad \sqrt{5}\,e^{i5,176}.$$

  Se ejemplifican, en los siguientes ítems, números complejos que sean real o imaginario puro:

- Dado $z = 1$, como $r = 1$ y $\theta = 0$, entonces $z = 1 = \cos(0) = 1e^{i0}$.

- Si $z = -3i$, tiene $r = 3$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$, entonces $z = -3i = 3i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

  Claramente algunas de las formas de expresar un complejo de este tipo, no tienen mucho sentido. Sólo se usarán si es necesario de acuerdo al contexto.

Ahora bien, dado un complejo en su forma exponencial, puede escribirse en su forma binómica (o rectangular), como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.13 El número complejo: $z = 3e^{i4}$, se puede reescribir como:
$$z = 3(\cos 4 + i\,\mathrm{sen}\,4) \approx -1,96 - 2,27i$$

2.4.1. Potencias enteras de un número complejo

Se introduce ahora otro resultado importante para encontrar las potencias naturales de un número complejo:

Propiedad 2.7: Fórmula de De Moivre

Si n es un entero y $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, entonces

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$$

En el caso particular de los complejos con módulo $r = 1$, la expresión dada por la propiedad anterior es la identidad de Euler introducida en el Teorema 2.6.

Si bien esta propiedad se prueba para n entero no negativo, también es válida para enteros negativos. Se considera $z^{-n} = \left(z^{-1}\right)^n = \left(\frac{1}{z}\right)^n$, cuando $n \in \mathbb{N}$

Con esta fórmula se dispone de dos expresiones sencillas para las potencias de un número complejo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = re^{i\theta}$, como se observa en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 2.14

- $z^2 = (re^{i\theta})^2 = r^2e^{i2\theta} = \left(r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\right)^2 = r^2(\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta))$
- $z^6 = (re^{i\theta})^6 = r^6e^{i6\theta} = r^6(\cos 6\theta + i \operatorname{sen} 6\theta)$
- $z^{-4} = (re^{i\theta})^{-4} = r^{-4}e^{-i4\theta} = r^{-4}(\cos(-4\theta) + i \operatorname{sen}(-4\theta)) = r^{-4}(\cos 4\theta - i \operatorname{sen} 4\theta)$

Es obvia la practicidad de calcular z^6 con la expresión exponencial del número complejo, en lugar de hacerlo con la forma binomial que requeriría desarrollar la potencia sexta del binomio $z^6 = (a + bi)^6$ y luego otros cálculos adicionales para llegar al complejo resultante.

2.4.2. Ejercicios

1. Calcular:

   a) $(1 + i)^{16}$

   b) $(3 - 4i)^{-5}$

2.5. Ejercicios de síntesis y repaso

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   a) $(i - z) + (2z - 3i) = -2 + 7i$

   b) $z^2 + 2z + 2 = 0$

   c) $(4 - 3i) \cdot \overline{(-z)} = i$

2. calcule el resultado de los siguientes incisos y epresente en el plano complejo cada número obtenido al resolver, su opuesto y su conjugado.

   a) $\operatorname{Re}\left(\frac{-1+3i}{(-i+4)i}\right) + \operatorname{Im}\left(4 - 2i \cdot \overline{i^{35}}\right) =$

   b)
$$\begin{bmatrix} 3+2i & 0 \\ -i & 2 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -i & 2 \\ 0 & i \end{bmatrix} =$$

c) $\operatorname{Im}\left(\det\begin{bmatrix}-2i & 4i \\ 5 & 6i+1\end{bmatrix}\right) =$

3. Complete las siguientes proposiciones para que resulten verdaderas:

   a) El módulo de la potencia cuadrada de $(1+i)$ es ......

   b) Siendo $z_1 = i$, $z_2 = 1-\sqrt{3}i$, $z_3 = \sqrt{3}+i$, el argumento de $\frac{z_1^2 \cdot z_3}{z_2}$ es ......

   c) La forma binómica del complejo $z = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ dado en coordenadas polares es ......

   d) Sea z un número complejo del tercer cuadrante tal que su módulo es igual a 2 y $\operatorname{Re}(z) = -1$. Exprese z en forma polar ...... y en forma exponencial ......

   e) El módulo del complejo $z = -3 \cdot e^{5i}$ es ..., su argumento es ... y su potencia cúbica es ......

4. Encuentre:

   a) La potencia quinta del número complejo $z = 1-i$. Exprese el resultado en forma binómica y exponencial.

   b) El cuadrado del complejo $z = -8+8\sqrt{3}i$.

   c) El cubo de $z = -e^{\frac{\pi}{2}i}$ y represente ambos gráficamente.

5. Determine gráficamente el conjunto solución de los siguientes sistemas, siendo $z = x+yi$:

   a) $\begin{cases} x \le 2y \\ \operatorname{Im}(z) < 3 \\ 1 < \operatorname{Re}(z) \le 4 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} \left(\frac{(z+\overline{z})^2}{36}\right) + \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2 < 1 \\ 0 < \operatorname{Im}(z) < 2 \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} |x| < 1 \\ |z| \ge 1 \\ x^2 \le y \end{cases}$

   d) El conjunto de números complejos con $\frac{1}{4}\pi \le \arg(z) < \frac{1}{2}\pi$ y $\rho < 2$, junto con sus respectivos conjugados.