UNIDAD 1

Índice

2. COMBINATORIA

La enumeración, o conteo, puede parecer un procedimiento obvio en muchos casos. Pero a medida que los "elementos" a contar tienen naturaleza más compleja, se requiere de herramientas acordes. Unas pocas de ellas, serán desarrolladas en esta parte de la primera unidad y luego utilizadas y profundizadas en Probabilidad y Estadística.

2.1. Regla de suma y producto

En muchas aplicaciones aparece la necesidad de contar y en cada caso es posible hacerlo de diferentes modos. Se buscará el más eficiente para situaciones sencillas. De todos modos, no se debe atar a una fórmula determinada, el análisis de cada problema le permitirá elegir la mejor herramienta para cada caso.

La idea que puede orientar el análisis de problemas complejos es la de descomponerlos en partes que se puedan resolver con los principios básicos que se presentan a continuación. Será necesario desarrollar capacidad de descomponer dichos problemas y encontrar soluciones parciales para luego llegar a la respuesta final.

Se propone el siguiente ejemplo para ejemplificar el primer resultado.

Ejemplo 2.1 Un estudiante de primer semestre de la facultad de Ingeniería, quiere estudiar Álgebra Lineal. Tiene la posibilidad de pedir libros en cualquiera de las bibliotecas que hay en las facultades, además de la Biblioteca Central. Haciendo consultas pertinentes averigua que hay 5 libros de diferentes autores en la biblioteca de su facultad, 3 de otros autores diferentes en la facultad de Ciencias Exactas y Naturales y 2 diferentes en la biblioteca Central. De modo que concluye, acertadamente, que puede elegir entre $5 + 3 + 2 = 10$ libros diferentes para comenzar a estudiar la materia que lo apasiona.

El modo de resolver esta situación es lo que se enuncia en la primera regla de conteo:

Regla de la suma
Suponga que algún evento A puede ocurrir en m formas y que un segundo evento B puede ocurrir en n formas, pero ambos eventos no pueden ser simultáneos. Entonces A o B puede ocurrir en $m + n$ formas.

La misma regla puede escribirse en términos de conjuntos:

Regla de la suma Si A, B son conjuntos finitos tales que $A \cap B = \emptyset$ (es decir que no tienen elementos comunes), entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Donde $|A|$ es la cardinalidad (número de elementos) del conjunto A.

Ejemplo 2.2 En la sección de ciencias de la computación de la biblioteca hay 7 libros sobre C++, 6 libros sobre Java, y 6 libros sobre Python. En consecuencia, por el principio de la suma, un estudiante tiene $7 + 6 + 5 = 18$ libros a elegir para comenzar a aprender algún lenguaje de programación.

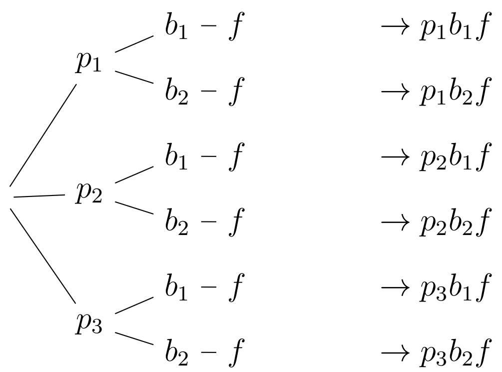
Ejemplo 2.3 Mariana quiere hacer una salida con sus amigos y no dispone de demasiado dinero, por lo que puede hacer sólo una de las siguientes actividades:

- ir al cine: 5 películas disponibles;
- ir a un patio cervecero: hay 6 posibles para todo el grupo;
- ir al parque General San Martín a tomar mate.

Como sólo puede elegir una, por el principio de la suma, tiene $5 + 6 + 1 = 12$ actividades posibles.

Hay otras circunstancias en las que las tareas, actividades o elecciones, son secuenciales y entonces se puede considerar una de cada grupo como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4 Para un almuerzo se puede elegir entre 3 platos diferentes de plato principal, 2 tipos de bebida y sólo 1 fruta fresca disponible. Cada comensal debe elegir uno de cada categoría.
Si llamamos p_1, p_2, p_3 a los posibles platos principales y b_1, b_2 a las dos bebidas disponibles y f a la fruta, entonces es claro que todas las elecciones incluirán f, por lo que en términos de conteo no modifica tener en cuenta la fruta o no. Las diferentes elecciones son:



Es decir que se tiene $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 2 = 6$ elecciones diferentes.

La forma de analizar casos similares está descrita en la siguiente regla de conteo.

Regla del producto Si una tarea puede dividirse en dos etapas y hay m resultados posibles para la primera etapa y para cada uno de estos hay k resultados posibles para la segunda etapa, entonces la tarea puede ser realizada de $m \cdot k$ modos diferentes.

Esta regla también puede escribirse en términos conjuntistas como:

Regla del producto Si A, B son conjuntos finitos, entonces

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Observación: a diferencia de la regla anterior, en este caso no importa si las colecciones entre las que se debe elegir en cada etapa tienen elementos en común o no. Aquí se puede elegir, por ejemplo, dos dígitos y podrían eventualmente ser el mismo.

Un ejemplo clásico del uso de esta regla, es el siguiente.

Ejemplo 2.5 El diseño de dominios para los vehículos requiere una elección sensata en términos de proyección en el tiempo. La cantidad de dominios diferentes es muy importante, sobre todo si se elige para un bloque de países como es el caso del Mercosur. El diseño establecido para los dominios consta de 2 letras, seguidas de 3 números y finaliza con otras dos letras.

Se debe considerar que no se ponen restricciones:

- hay 26 letras en el alfabeto (sin considerar a la 'ñ') y 10 dígitos del 0 al 9
- la elección de cada caracter es independiente de la que se haya hecho en los demás.

Se considera entonces que para completar el esquema hay

Letra	Letra	Número	Número	Número	Letra	Letra

$$26 \quad \cdot \quad 26 \quad \cdot \quad 10 \quad \cdot \quad 10 \quad \cdot \quad 10 \quad \cdot \quad 26 \quad \cdot \quad 26$$

con lo cual se tienen $26^2 \cdot 10^3 \cdot 26^2 = 456{,}976{,}000$.

Dado un conjunto finito, en ocasiones se desea determinar de manera precisa, cuántos elementos del conjunto satisfacen ciertas condiciones. Aunque algunas veces este conteo puede realizarse enumerando explícitamente todos los casos, tal manera de proceder resulta poco práctica en problemas complejos donde la cantidad de elementos del conjunto es muy grande. Por esa razón es importante tener métodos inteligentes de conteo que sean aplicables a una gran variedad de situaciones.

Para muchos de los problemas de conteo resulta muy útil la siguiente definición.

Definición 2.1

El factorial de un entero no negativo n (es decir, $n \geq 0$) que se denota por el símbolo $n!$, se define recursivamente de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \\ n! = n \cdot (n-1)! \end{cases}$$

Ejemplo 2.6 El factorial de 4 se calcula como:

$$4! = 4 \cdot 3!,$$

con lo cual, se necesita el valor de 3!, que a su vez requiere a 2! y éste último necesita de 1!, el que sí es un valor dado en la definición, $1! = 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} 4! =& 4 \cdot 3! = 4 \cdot (3 \cdot 2!) \\ =& 4 \cdot (3 \cdot (2 \cdot 1!)) = \\ =& 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \\ =& 24 \end{aligned}$$

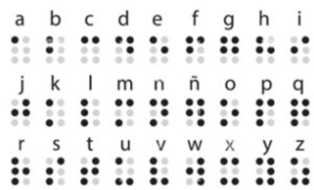
En las dos secciones que siguen se introducirá las formas más básicas de permutaciones y combinaciones y esta última definición será clave en sus cálculos.

2.1.1. Ejercicios

1. En el código Morse, cada letra, número y algunas palabras, se representa por medio de una sucesión finita de puntos o líneas, donde cada elemento elegido no depende del anterior, por lo que pueden repetirse. Encuentre el número de caracteres diferentes que pueden representarse por medio de sucesiones de 3 símbolos y por otro lado, de 5 símbolos. ¿Cuál es la longitud máxima de las cadenas (de puntos y/o líneas) usada en el código Morse en la práctica?

2. El braille es un sistema de lectura y escritura táctil pensado para personas ciegas. Fue ideado a mediados del siglo XIX por el francés Louis Braille, quien quedó ciego debido a un accidente durante su niñez mientras jugaba en el taller de su padre.

   En este sistema cada letra, símbolo o algunas palabras son representadas por algunos puntos en relieve de una disposición rectangular de 6 puntos para cada uno. Se diferencian según la ubicación de el o los puntos y si están en relieve o no, como lo muestra la figura siguiente.

   ¿Cuántos símbolos diferentes pueden hacerse con este sistema?

3. Un examen tiene 25 preguntas de opción múltiple. Cada pregunta tiene 4 respuestas posibles, de las cuales sólo una es correcta. ¿De cuántas maneras posibles se puede resolver el examen, suponiendo que no se dejan preguntas sin contestar?

4. En la Primera División de fútbol femenino de la LFM hay 11 equipos.

   a) Considerando que cada equipo puede jugar sólo un partido por fecha, ¿cuántos partidos se pueden disputar en cada fecha? ,

   b) Cada partido tiene tres resultados posibles: gana local, gana visitante o empate. ¿Cuántos resultados posibles puede haber en cada fecha del fixture?

5. ¿Cuántos divisores positivos tiene 4! ?

6. En un depósito se quieren acomodar cajas alineadas de distintos productos. Hay 4 cajas de distintos tipos de fideos (producto A), 3 de distintos tipos de arroz (producto B) y 2 de diferentes azúcares (producto C). ¿ De cuántas maneras se puede acomodar las cajas en la línea si

   a) no hay criterio alguno para ubicar las cajas en la línea?

   b) las cajas de productos A deben estar a la izquierda y las de C deben estar a la derecha?

   c) todas las cajas de la mism tipo de producto deben estar juntos?

7. Un profesor de matemáticas tiene 4 libros distintos de Cálculo, 3 libros distintos de Álgebra y 2 libros distintos de Geometría. ¿De cuántas maneras puede acomodar los libros en un estante si

   a) los libros de Cálculo deben estar a la izquierda y los libros de Geometría deben estar a la derecha?

   b) todos los libros de la misma disciplina deben estar juntos?

   ¿De cuántas maneras puede elegir un libro cualquiera entre esos para leer?

2.2. Permutaciones

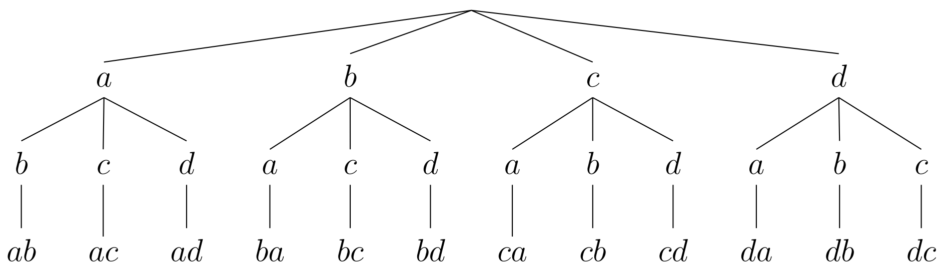
Definición 2.2

Sea A un conjunto finito no vacío.
Una k-permutación de A es un arreglo ordenado de k elementos distintos de A.
Se usa el símbolo $P_{n,k}$ ó nPk para denotar el número de k-permutaciones de un conjunto con n elementos.

[1]

Observación: Dado que en la definición anterior, el número n es la cantidad de elementos del conjunto A, este será un número natural (no tiene sentido en este contexto que A sea el conjunto vacío, por eso descartamos el 0). Además, $1 \leq k \leq n$, siendo k también un número natural no nulo.

Ejemplo 2.7 Sea $A = \{a, b, c, d\}$. Todas las 2-permutaciones de elementos de A se pueden obtener a partir del siguiente diagrama de árbol.



La representación gráfica ayuda al conteo ya que hace bastante fácil deducir que por cada una de las primeras letras posibles de elegir (4) se disponen de las restantes 3 del conjnuto A para la elección de la segunda; esto permite deducir que hay

[1]En otra bibliografía esta definición coincide con la de “ VARIACIÓN ”; además cuando $k = n$ es un tipo de avariación se llama “PERMUTACIÓN”.

$$4 \cdot 3 = 12 = P_{4,2}$$

2-permutaciones de elementos de A.
Se propone que construya un árbol para encontrar las 3-permutaciones de elementos de A y deduzca a partir de él cuántas son.

Ejemplo 2.8 Sea $A = \{1, 2, 3\}$, las 2-permutaciones de A son:

12, 13, 21, 23, 31 y 32.

Por lo que $P_{3,2} = 6$.

Ejemplo 2.9 De un grupo de 7 cuadros se debe elegir 5 para presentar una exposición en el ECA, colgados uno a continuación del otro. ¿Cuántas disposiciones diferentes son posibles para la muestra?

Se debe tener en cuenta que las obras entre las que se debe escoger son diferentes entre sí, por eso, una vez que se elija una para una determinada posición, no puede volver a elegirse para otra.

Así, para el primer lugar de la muestra hay 7 opciones posibles, para el segundo sólo quedan 6 obras entre las que se deberá elegir, 5 para el tercero, 4 para el cuarto y nada más que 3 para la elección de la última. En resumen, se puede armar

$$P_{7,5} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$$

exposiciones distintas en esa sala.

El último ejemplo expuesto es relativamente sencillo de calcular porque tanto el total del conjunto de obras como la cantidad a seleccionar son números pequeños, pero en otros contextos se requiere de una forma sistemática de calcular estos valores. Esa herramienta es la que provee el siguiente teorema.

Teorema 2.1

El número de k-permutaciones de un conjunto con n elementos, está dado por

$$P_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-(k-1)) \qquad \text{ó} \qquad P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ejemplo 2.10 Aplicar la tesis del teorema al ejemplo 9 daría el mismo resultado pero de modo que se pueda calcular con algún dispositivo, por ejemplo, con la calculadora:

$$P_{10,5} = \frac{10!}{(10-5)!} = 30{,}240$$

Frecuentemente aparecerá en los problemas a resolver el siguiente requisito:

Sea A un conjunto con n elementos.
Una permutación de A es un arreglo ordenado de todos los elementos de A. Equivalentemente, una permutación de elementos de A es una función biyectiva de A en sí mismo. Obsérvese que el número de permutaciones de A es igual a $P_{n,n} = n!$

Ejemplo 2.11 Si hay 12 invitados especiales a una obra de teatro que deberán ubicarse en las 12 butacas de la primera fila, habrán entonces $P_{12,12} = 12!$ formas distintas de ubicarlos en ellas.

Ejemplo 2.12 El número de permutaciones de las letras de la palabra DISCRETA es $P_{8,8} = 8!$
Si sólo se utilizan 4 de las letras, el número de permutaciones es $P_{8,4} = \frac{8!}{(8-4)!} = 1680$.

Observación: En el ejemplo 12 se han contado las cadenas que se puede formar con todas las letras de la palabra elegida o con sólo 4 de ellas, pero en todos los casos cada una de las letras (que son todas diferentes) se han considerado una vez, sin tener la posibilidad de repetirse [2]. Si se quisiera contar la cantidad de arreglos (o cadenas de letras) que se puede formar con esas letras permitiendo usarlas las veces que se quiera, el planteo del problema pasa a ser similar al del ejemplo 5 y se resuelve con el principio del producto:

$$\text{hay} \quad 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4.$$

2.2.1. Ejercicios

1. ¿ De cuántas maneras distintas se pueden elegir 3 estudiantes distintos de un curso de 65 para asumir la responsabilidad de ser, delegado en el Centro de estudiantes, delegado de Deportes y el tercero, delegado de viajes a Potre; si se tiene en cuenta que
   a) no hay condicionamientos?
   b) el séptimo de la lista debe ser el delegado de viajes a Potre?
   c) sólo del primero al décimo de la lista pueden ser electos como delegado de Deporte?
   d) el tercero, el quinto y los 3 últimos de la lista no pueden ser electos para función alguna?
   e) el primero no puede ser electo si el decimocuarto estudiante ya está entre los elegidos y recíprocamente?
2. ¿De cuántas maneras pueden ordenarse 6 libros diferentes en un estante si:
   a) es posible cualquier ordenación?
   b) 3 libros determinados deben estar juntos?
   c) dos libros determinados deben ocupar los extremos?
3. Debemos ubicar a 3 personas de un grupo de 7 (*Luis, Ana, Juan, Ely, Luz, Cris y Tavo*) en 3 asientos: pasillo, centro o ventanilla.
   a) ¿De cuántas maneras pueden elegirse las 3 personas?
   b) ¿En cuántas de ellas está Ely en la primera posición (pasillo)?
   c) ¿En cuántas de ellas está Ely en el pasillo y a Luis en la ventanilla?
   d) ¿Cuántas incluyen a Luz?
   e) ¿En cuántas estarán Ana o Cris?
4. El lenguaje de un ordenador se traduce a secuencia de dígitos formados por unos y ceros. Si un byte es una secuencia de 8 de estos dígitos:
   a) ¿Cuántos bytes diferentes se pueden formar?
   b) ¿Cuántas de esas cadenas comienzan con 1100?

[2]En la literatura estas cadenas, obetenidas al cambiar de lugar todas las letras de una determinada palabra, se llaman **anagramas**.

2.3. Combinaciones

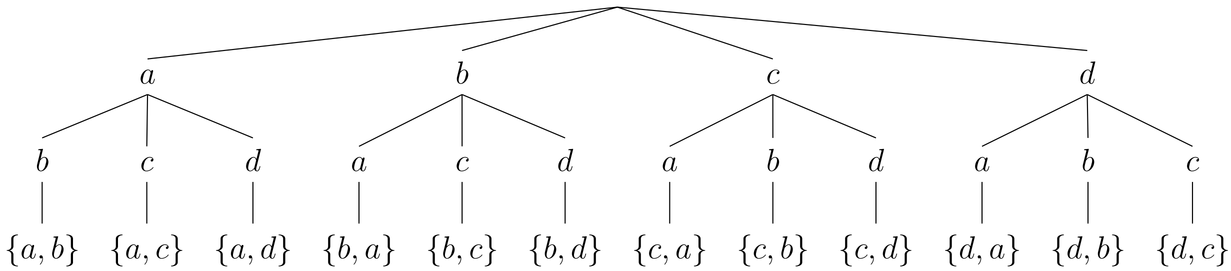
Definición 2.3

Sea A un conjunto finito.
Una k-combinación de A es un subconjunto de A con k elementos, o sea, una parte del conjunto A que tiene k elementos. Se usa el símbolo $C(n,k)$ ó nCk ó $\binom{n}{k}$ para denotar el número de k-combinaciones de un conjunto que tiene n elementos en total.

Observación: Definir las combinaciones como subconjuntos de cierto cardinal implica que no importa el orden en que esos elementos se consideren y que no pueden repetirse pues, por ejemplo, los siguientes conjuntos son iguales y tienen 4 elementos:

$$\{3,5,7,9\} = \{3,9,7,3,5,5\}.$$

Ejemplo 2.13 Sea $A = \{a,b,c,d\}$. Para calcular cuántos subconjuntos o partes de A hay con una determinada cantidad de elementos, se debe usar número combinatorio. Por ejemplo, para calcular cuántos subconjuntos hay de 2 elementos se debe considerar que el primer elemento se elige entre los 4 de A y el segundo entre los 3 que quedan, como se muestra en el siguiente árbol



Pero, como se puede ver, no todos los conjuntos son distintos. Como no importa el orden de los elementos (a diferencia de lo que sucede con las permutaciones), sino cuáles se eligen, sólo quedan la mitad, ya que $\{a,b\} = \{b,a\}$, etc. Es decir que de cada dos permutaciones, sólo queda una. Por lo tanto, hay $C(4,2) = \frac{P(4,2)}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

Se deja a cargo del lector deducir ¿cómo habrá que proceder para encontrar la cantidad de subconjuntos de 3 elementos de A?

Nuevamente, se necesita una fórmula que permita sistematizar conteos de este tipo.

Teorema 2.2

Sea A un conjunto de n elementos (es decir, $|A|$). La cantidad de subconjuntos distintos y de k elementos que se pueden considerar en A, está dada por

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ejemplo 2.14 En el ejemplo 13, la cantidad de subconjuntos de 2 elementos de A, que consta de un total de 4 elementos, se puede calcular directamente como:

$$C(4,2) = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 2} = 12.$$

Las distintas cantidades, según el cardinal del subconjunto, se muestran a continuación.

Cantidad de subconjuntos de A con 1 elemento	
$C(4,1) = \dfrac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$	$\{a\}\ \{b\}\ \{c\}\ \{d\}$

Cantidad de subconjuntos de A con 2 elementos	
$C(4,2) = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$	$\{a,b\}\ \{a,c\}\ \{a,d\}\ \{b,c\}\ \{b,d\}\ \{c,d\}$

Cantidad de subconjuntos de A con 3 elementos	
$C(4,3) = \dfrac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$	$\{a,b,c\}\ \{a,b,d\}\ \{a,c,d\}\ \{b,c,d\}$

Cantidad de subconjuntos de A con 4 elementos	
$C(4,4) = \dfrac{4!}{4! \cdot 0!} = 1$	$\{a,b,c,d\}$

Cantidad de subconjuntos de A con 0 elementos	
$C(4,0) = \dfrac{4!}{0! \cdot 4!} = 1$	$\{\ \} = \varnothing$

Ejemplo 2.15 Saber cuántas manos diferentes puede recibir cada jugador de truco, también es un problema de conteo que se plantea con combinaciones, pues en el reparto importa qué cartas recibe, no el orden en que le llegan y cada carta sólo puede ser para un jugador.
Hay entonces $C(40,3) = \dfrac{40!}{3! \cdot (40-3)!} = \dfrac{40!}{3! \cdot 37!} = \dfrac{40 \cdot 39 \cdot 38}{6} = 9{,}880$ manos posibles.

2.3.1. Ejercicios

1. Una persona tiene 6 amigos. ¿De cuántas formas diferentes puede invitar a 3 ó más de ellos?

2. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un polígono regular de n lados? Ayuda: analice y escriba su resultado en términos de factorial.

3. Calcule y responda:

   a) ¿Cuántas manos de truco tienen dos cartas del mismo número?

   b) ¿Cuántas manos de truco tienen todas sus cartas con figuras?

   c) ¿Cuántas manos de truco tienen sólo cartas del mismo palo?

2.3.2. Teorema del binomio

Cuando se estudia las potencias de un binomio, se observa en sus desarrollos que los coeficientes toman los siguientes valores en las primeras cuatro potencias enteras no negativas:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= 1a + 1b \\
(a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
(a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4
\end{aligned}
$$

El diagrama de la derecha se llama “Triángulo de Pascal” y permite encontrar los coeficientes del desarrollo de cada una de las potencias del binomio. Cada coeficiente se obtiene sumando los dos del nivel superior como se indica en la figura.

Pero si se quiere hacer la expansión de un binomio cuya potencia es un número grande, este método es poco eficiente. Una vez más, aparece un teorema que provee una forma de hallar dicha expansión en forma sistemática.

Teorema 2.3: Teorema del binomio

Si x e y son variables y n es un número entero positivo, entonces

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0y^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.
\end{aligned}
$$

Observación: La conclusión del teorema 2.3 puede enunciarse de forma equivalente, usando propiedades del número combinatorio, como sigue:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.16 Se considera a modo de ejemplo el caso especial de la expansión de la potencia cuarta del binomio genérico.

$$
(x+y)^4 = \underbrace{(x+y)}_{\text{1er factor}} \cdot \underbrace{(x+y)}_{\text{2do factor}} \cdot \underbrace{(x+y)}_{\text{3er factor}} \cdot \underbrace{(x+y)}_{\text{4to factor}}
$$

Para encontra su expansión debería aplicarse repetidas veces la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Pero, de acuerdo al teorema anterior, se puede hallar la misma expansión de modo más sencillo.

$$
\begin{aligned}
(x+y)^4 &= \binom{4}{0}x^4y^0 + \binom{4}{1}x^{4-1}y^1 + \binom{4}{2}x^{2-2}y^2 + \binom{4}{3}x^1y^{4-1} + \binom{4}{4}x^0y^4 \\
&= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 \\
&= x^4 + 3\,x^3y + 6\,x^2y^2 + 3\,xy^3 + y^4
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.17

- Del teorema 2.3 se deduce que el coeficiente de x^5y^2 en la expansión de $(x+y)^7$ es

$$\binom{7}{2} = \binom{7}{5} = 21.$$

- Para obtener el coeficiente de a^5b^2 en la expansión de $(2a-3b)^7$, se sustituye $2a$ por x y $-3b$ por y en la conclusión del teorema. El coeficiente de x^5y^2 en $(x+y)^7$ es $\binom{7}{2}$, y

$$\binom{7}{2}x^5y^2 = \binom{7}{2}(2a)^5(-3b)^2 = \binom{7}{5}(2)^5(-3)^2a^5b^2 = 6048a^5b^2.$$

2.3.3. Ejercicios

1. A raiz del teorema 2.3, $\binom{n}{k}$ se conoce como el *coeficiente binomial* y la conclusión del teorema suele antarse del siguiente modo:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{n-k}y^k.$$

¿Es equivalente a la expresión que se eligió en el enunciado dado?

2. Encuentre, de ser posible:

   a) Los términos centrales y el término de grado 12 en el binomio $\left(2+\frac{x}{4}\right)^{15}$.

   b) El término que contiene x^3y^4 en $(2x-y)^{12}$.

   c) El valor del término que contiene a x^6y^{18} en $(x+y^2)^{15}$.

2.4. Ejercicios de síntesis y repaso

1. Con los números 2, 5, 7, y 9:

   a) ¿Cuántos números de tres cifras puedes formar?

   b) ¿Cuántos números de tres cifras distintas puedes formar?

   c) ¿Cuántos de los números del apartado anterior son pares?

   d) ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas puedes formar?

   e) ¿Cuántos números mayores que 5000 y menores que 9000 se pueden armar?

   f) ¿Cuántos números de cuatro cifras mayores que 5000 se pueden formar?

2. Encuentre el/los valores de n que sea/n solución de las siguientes ecuaciones, siempre que sea posible. De no serlo, explique por qué.

   a) $C_{n,6} = 7 \cdot C_{n,4}$

   b) $3 \cdot P_{n,4} = P_{n-1,5}$

   c) $7 \cdot P_{n,4} = 84 \cdot C_{n,2}$

   d) ¿Existe un conjunto que tenga 10 subconjuntos de dos elementos?

   e) $C_{4,n+1} = C_{5,n+2}$

   f) $\frac{P_{2n+1}}{P_{2n-1}} = 96 - P_3 \cdot C_{n,1}$ se considera $P_k = P_{k,k}$

3. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar tres chicas y dos chicos en una fila de butacas de un cine teniendo en cuenta que no pueden estar dos chicos juntos ni dos chicas juntas?

4. Para elegir un presidente se puede seguir dos caminos.

   - Elección indirecta: elegir un comité de k personas del total n de la población y que el presidente sea elegido entre los de ese comité.
   - Elección directa: elegir primero al presidente entre la población y luego elegir el resto del comité (que ahora deberá ser de $k-1$ personas).

   Así, con cualquiera de los métodos se tiene un presidente y un comité de $k-1$ personas, al que llamaremos çúpula de gobierno".

   ¿Cuál de las dos formas de elección tiene más cantidad de çúpulas de gobierno"diferentes? Justifique su respuesta.

5. Hay 300 inscriptos para la MIM en la categoría D. ¿Cuántos podios diferentes pueden haber?

6. ¿Cuántas manos de truco tienen al menos dos cartas del mismo número?