Análisis Matemático I
Clase 1: Presentación de la Cátedra-Introducción a Funciones

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2025

Equipo Docente

- Profesor Titular: Dr. Pablo Ochoa, e-mail: pablo.ochoa@ingenieria.uncuyo.edu.ar
- Profesores Adjunto:
  - Lic. Julio Alejo Ruiz
  - Lic. Cecilia Fernández Gauna
  - Lic. Martin Matons
- Profesores a cargo de la práctica:
  - Ing. Paula Acosta
  - Ing. Julián Martínez
  - Lic. Verónica Nodaro
  - Dra. Dalía Bertoldi
  - Dr. Hernán Garrido
  - Lic. Julio Alejo Ruiz
  - Lic. Cecilia Fernández Gauna
- Profesora Colaboradora: Dra. Mercedes Larriqueta

Metodología

Inicio del cuatrimestre: 06 de Marzo de 2025.
Finalización del cuatrimestre: 14 de Junio de 2025.

Metodología

Inicio del cuatrimestre: 06 de Marzo de 2025.
Finalización del cuatrimestre: 14 de Junio de 2025.
Metodología de Enseñanza:
La modalidad de cursado es de carácter presencial. Las clases tienen un carácter teórico-práctico. De las 6 horas semanales, se destinarán 3 horas al dictado de las clases teórico-prácticas y 3 horas al desarrollo de actividades prácticas.
Importante: consultar frecuentemente la plataforma AulaAbierta, ahí se encuentran las comisiones, horarios de consulta y se irá subiendo el material didáctico del curso.

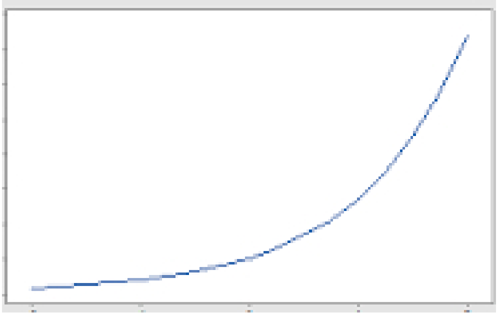
Resultados de Aprendizaje

- Analizar modelos matemáticos considerando las herramientas de límites, continuidad y derivadas para deducir propiedades geométricas, físicas y analíticas de éstos.
- Estudiar problemas geométricos y físicos del ámbito ingenieril o de computación tomando en cuenta los conceptos y propiedades del cálculo integral para su comprensión y resolución.
- Modelar situaciones concretas y aplicadas del ámbito ingenieril o de computación en lenguaje simbólico y matemático para su análisis y resolución a través del cálculo diferencial e integral.
- Expresar rigor y destreza en cálculos y argumentaciones para lograr exactitud y claridad en la comunicación de sus desarrollos teóricos y prácticos, tanto escritos como orales, a través de la resolución de problemas y comprensión de demostraciones.

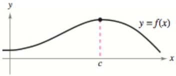
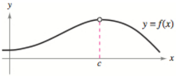
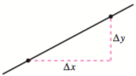
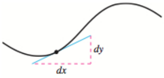
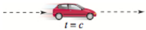
Criterios de Evaluación

- Exactitud en la expresión de definiciones, enunciados de teoremas, razonamientos en las demostraciones y en el desarrollo de cálculos.
- Coherencia en lo que se expresa en forma escrita y también oral, coherencia entre los resultados obtenidos y la interpretación de los mismos.
- Organización lógica en los razonamientos empleados en cálculos, demostraciones de teoremas e interpretación de resultados.
- Comprensión de la pertinencia de hipótesis o supuestos en los resultados dados y en las aplicaciones de la Matemática.
- Claridad en la comunicación escrita y oral de cálculos, desarrollos teóricos y lógicos, etc.

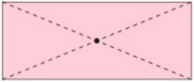
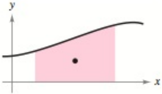
EXPECTATIVA: Curva de aprendizaje



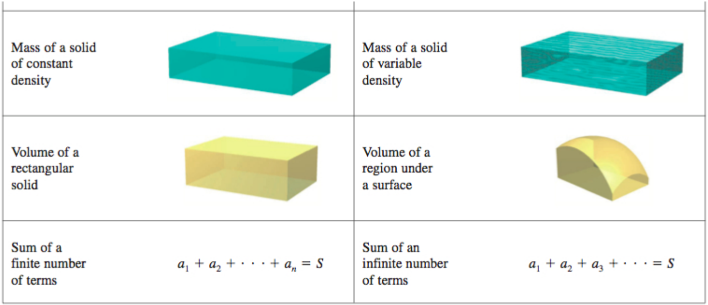
PROGRAMA DE LA ASIGNATURA:

Without Calculus		With Differential Calculus	
Value of $f(x)$ when $x = c$		Limit of $f(x)$ as x approaches c	
Slope of a line		Slope of a curve	
Secant line to a curve		Tangent line to a curve	
Average rate of change between $t = a$ and $t = b$		Instantaneous rate of change at $t = c$	
Curvature of a circle		Curvature of a curve	

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA:

Without Calculus		With Integral Calculus	
Area of a rectangle		Area under a curve	
Work done by a constant force		Work done by a variable force	
Center of a rectangle		Centroid of a region	
Length of a line segment		Length of an arc	

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA:



Mass of a solid of constant density		Mass of a solid of variable density	
Volume of a rectangular solid		Volume of a region under a surface	
Sum of a finite number of terms	$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S$	Sum of an infinite number of terms	$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = S$

Diagrama tomado de: Edwards, B. and Larson, R. Calculus of a single variable. Ed. 10. 2014.

Bibliografía

Libro principal:
Título: Cálculo: una variable.
Autor: George Thomas.
Editorial: PEARSON.
Edición: 12.
Año: 2010.
Puede consultar versiones más actuales o libros de autores como Larson, Stewart, etc. Sin embargo, estudie de las diapositivas y utilice los libros como material adicional para hacer ejercicios, ver más gráficos e interpretaciones, etc.

Régimen de regularidad

Se tomarán 2 evaluaciones parciales para definir la regularidad del estudiante. Cada una consistirá de ejercicios teórico-prácticos del mismo estilo y nivel de dificultad que los de las guías de trabajos prácticos. El contenido de cada examen será informado durante el cuatrimestre con la antelación adecuada. **Un alumno queda regular cuando aprueba los dos exámenes en cualquiera de sus instancias.**

Evaluaciones parciales

Importante: las instancias de evaluación son únicas y las fechas son inamovibles. La inasistencia a un examen parcial se considera como un No aprobado (aún si la inasistencia se justifica). Como regla general, el alumno recupera aquello que no ha aprobado (esto incluye inasistencias). Es decir, si en una evaluación parcial no obtuvo el mínimo de puntaje para aprobar, entonces recuperará solamente esa evaluación. Si el alumno no obtiene el puntaje mínimo en dos evaluaciones parciales, entonces rendirá un global asociado a los contenidos de los dos exámenes no aprobados, con la siguiente excepción: **si no asiste a las dos evaluaciones parciales, quedará libre (en carácter de Abandonó) sin posibilidad de recuperar y sin posibilidad de acceder al examen final.**

Evaluaciones parciales

Importante: las instancias de evaluación son únicas y las fechas son inamovibles. La inasistencia a un examen parcial se considera como un No aprobado (aún si la inasistencia se justifica). Como regla general, el alumno recupera aquello que no ha aprobado (esto incluye inasistencias). Es decir, si en una evaluación parcial no obtuvo el mínimo de puntaje para aprobar, entonces recuperará solamente esa evaluación. Si el alumno no obtiene el puntaje mínimo en dos evaluaciones parciales, entonces rendirá un global asociado a los contenidos de los dos exámenes no aprobados, con la siguiente excepción: **si no asiste a las dos evaluaciones parciales, quedará libre (en carácter de Abandonó) sin posibilidad de recuperar y sin posibilidad de acceder al examen final.**

Cronograma:

- Primer examen parcial: Lunes 21 de Abril (se respeta el turno)
- Segundo examen parcial: Lunes 2 de Junio (se respeta el turno)
- Recuperatorios/ Global: Viernes 13 de Junio (se rinde de tarde, de 17 a 20 h).

Acreditación de la asignatura

La acreditación de la asignatura es por examen final. La metodología del mismo se distingue si el alumno es regular o libre. Durante el cuatrimestre se darán más detalles.

Acreditación de la asignatura

La acreditación de la asignatura es por examen final. La metodología del mismo se distingue si el alumno es regular o libre. Durante el cuatrimestre se darán más detalles.

Beneficios de alcanzar la regularidad:

- Puede cursar asignaturas en el semestre siguiente que requieran tener regular AM1 (como AM2).
- Para acreditar la asignatura, puede rendir un examen final escrito más breve que en el caso del alumno libre.
- En su nota final NF, se tiene en cuenta el desempeño durante el cuatrimestre:

NF=0.20 x (promedio de notas de parciales) + 0.80(nota examen final)

Introducción: lo que nos dice Chat gpt sobre Análisis I

¿Qué es el Análisis Matemático?

El **Análisis Matemático** es una rama de las matemáticas que estudia los límites, las funciones, las secuencias, las series y otros conceptos relacionados con el cambio y la aproximación. Es fundamental para entender el comportamiento de las funciones en contextos tanto finitos como infinitos. Se centra en conceptos clave como la continuidad, la derivada, la integral y la convergencia.

El análisis se ocupa de preguntas sobre cómo se comportan las funciones cuando sus variables se acercan a ciertos valores o cuando se extienden hacia el infinito. Un ejemplo claro son las herramientas como el **cálculo diferencial** (derivadas) y el **cálculo integral** (integrales), que son aplicaciones directas del análisis.

En resumen, el Análisis Matemático es esencial para desarrollar la teoría detrás de muchos otros campos de las matemáticas y las ciencias aplicadas, pues proporciona las bases para describir fenómenos cambiantes de manera precisa.

Introducción: lo que nos dice Chat gpt sobre Análisis I

¿Por qué es importante el Análisis Matemático en Ingeniería y en Computación?

El **Análisis Matemático** es fundamental tanto en **Ingeniería** como en **Computación** por varias razones, ya que proporciona las bases para resolver problemas complejos, modelar sistemas y optimizar soluciones. Vamos a desglosarlo para ambas disciplinas:

En Ingeniería:

1. **Modelado de fenómenos físicos**: En ingeniería, el análisis matemático es esencial para describir y predecir cómo los sistemas físicos y tecnológicos se comportan. Muchas veces, los fenómenos naturales se modelan mediante ecuaciones diferenciales, que son parte del análisis matemático. Esto es clave en áreas como la mecánica, la termodinámica, la electrónica, la ingeniería civil, etc.

Introducción: lo que nos dice Chat gpt sobre Análisis I

2. **Análisis de sistemas dinámicos**: Muchos sistemas de ingeniería (como los de control, vibración, flujo de fluidos) pueden modelarse y estudiarse usando el cálculo, la teoría de funciones y la teoría de sistemas. El análisis permite entender el comportamiento de estos sistemas bajo diferentes condiciones y optimizar su funcionamiento.
3. **Optimización**: En ingeniería, optimizar recursos, materiales, tiempos o diseños es esencial. El análisis matemático ofrece herramientas, como el cálculo de variaciones y la programación matemática, que ayudan a encontrar soluciones óptimas en problemas de diseño o en la toma de decisiones.
4. **Simulaciones y predicciones**: La simulación numérica de procesos físicos (por ejemplo, la dinámica de fluidos computacional o el análisis estructural) depende de métodos matemáticos complejos. El análisis matemático permite desarrollar los algoritmos que hacen estas simulaciones posibles.

Introducción: lo que nos dice Chat gpt sobre Análisis I

En **Computación**:

1. **Teoría de algoritmos y eficiencia**: El análisis matemático es vital en el diseño y análisis de algoritmos. En computación, no solo se trata de escribir código, sino de asegurarse de que el algoritmo sea eficiente. Esto implica analizar la complejidad temporal y espacial, y cómo los algoritmos se comportan a medida que crecen los datos de entrada. Todo esto requiere un conocimiento profundo del análisis matemático.
2. **Modelos de computación y computación numérica**: El análisis matemático ayuda a desarrollar algoritmos numéricos que resuelven problemas complejos en áreas como la simulación, el procesamiento de señales y la visión por computadora. Muchos de estos algoritmos dependen de métodos de aproximación, series de Fourier, transformadas y ecuaciones diferenciales.
3. **Teoría de la computación**: El análisis matemático también juega un papel clave en la teoría de la computación, que estudia qué problemas pueden resolverse computacionalmente y cómo medir la eficiencia de los procesos. La complejidad computacional, la teoría de autómatas y la lógica matemática son áreas que dependen en gran medida del análisis.

Introducción: lo que nos dice Chat gpt sobre Análisis I

4. **Criptografía y seguridad informática**: Muchos algoritmos criptográficos y sistemas de seguridad en la computación se basan en conceptos del análisis matemático, como las funciones matemáticas complejas y la teoría de números. Estos métodos aseguran la integridad y confidencialidad de la información en sistemas informáticos.

En Resumen:

- **En ingeniería**, el análisis matemático proporciona herramientas para modelar, entender y optimizar sistemas físicos y tecnológicos.
- **En computación**, el análisis matemático es crucial para desarrollar algoritmos eficientes, resolver problemas computacionales complejos y garantizar la seguridad de los sistemas.

Ambos campos están interconectados y dependen fuertemente del análisis matemático para abordar los problemas más desafiantes de la ciencia y la tecnología moderna.

Objetivo de la clase 1:

Se espera que el estudiante comprenda la noción de función y comience a describir y analizar distintas funciones elementales desde enfoques geométricos y analíticos.

Noción de función

Las funciones son objetos matemáticos muy importantes para describir el *mundo real*. Algunos ejemplos son:

- la velocidad de ejecución de un algoritmo depende de los pasos a ejecutar
- el costo de elaboración de un tanque metálico cilíndrico depende del radio o de la altura del mismo
- la fuerza ejercida sobre la pared de una presa por un líquido aumenta con la profundidad
- el trabajo realizado por una fuerza sobre un objeto puede depender del desplazamiento del mismo

Noción de función

Recordar que:

$$\mathbb{N} := \text{conjunto de los números naturales}$$

$$\mathbb{Z} = \text{conjunto de los números enteros}$$

$$\mathbb{Q} = \text{conjunto de los números racionales}$$

$$\mathbb{R} = \text{conjunto de los números reales}$$

Definición de función

Sea A un subconjunto de números reales. Una función f definida en A asigna a cada número x de A un único número $f(x)$.
El **dominio** de f es el conjunto A. La **imagen** de f es el conjunto de los $y \in \mathbb{R}$ tales que existe $x \in A$ que cumple

$$f(x) = y.$$

El **conjunto de llegada o codominio** de f es cualquier conjunto que contenga a la imagen de f.

Noción de función

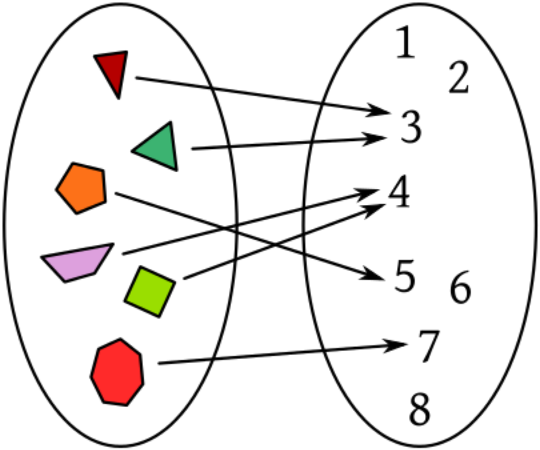
Muchas veces tomaremos simplemente como codominio a $\mathbb{R}$.

Notación: Si D es el dominio de f y C su conjunto de llegada, entonces escribimos:

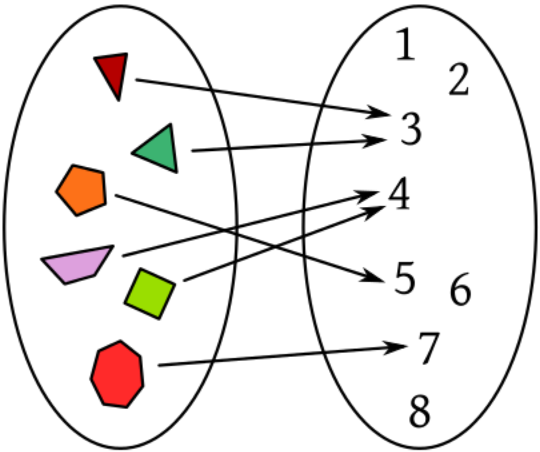
$$f : D \to C.$$

Si en una situación intervienen más de una función, por ejemplo f, g, etc., entonces distinguimos los dominios como sigue: $D(f) =$dominio de f, $D(g) =$ dominio de g, etc.

Noción de función: ejemplo



Noción de función: ejemplo



Dominio: el conjunto de las 6 figuras geométricas que se ilustran.
Imagen $= \{3, 4, 5, 7\}$.
Conjunto de llegada o codominio $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Dominio de una función

Observación: Siempre que busquemos el dominio de una función, lo haremos encontrando el máximo conjunto de números reales donde esté definida.

Ejemplo: determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{4 - x}.$$

Dominio de una función

Observación: Siempre que busquemos el dominio de una función, lo haremos encontrando el máximo conjunto de números reales donde esté definida.

Ejemplo: determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{4 - x}.$$

Solución: para determinar el dominio vamos a encontrar todos los x que cumplen

$$4 - x \geq 0.$$

Despejando x se obtiene:

$$4 - x \geq 0$$

$$4 \geq x.$$

Así, el dominio de f es $D = (-\infty, 4]$.

Dominio de una función

Ejemplo: determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{2 - x^2}.$$

Dominio de una función

Ejemplo: determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{2 - x^2}.$$

Solución: para determinar el dominio vamos a encontrar todos los x que cumplen

$$2 - x^2 \geq 0.$$

Despejando x se obtiene:

$$2 - x^2 \geq 0$$

$$2 \geq x^2.$$

Tomando raíces cuadradas a ambos miembros y recordando que $\sqrt{x^2} = |x|$, se obtiene:

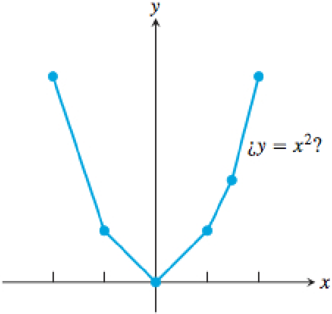
$$\sqrt{2} \geq \sqrt{x^2}$$

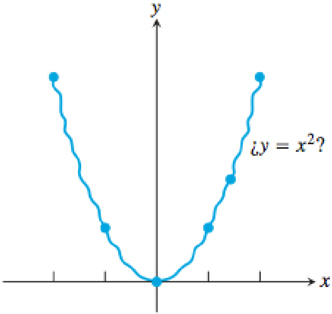
$$\sqrt{2} \geq |x|.$$

Así, el dominio de f es $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

El problema de graficar una función.

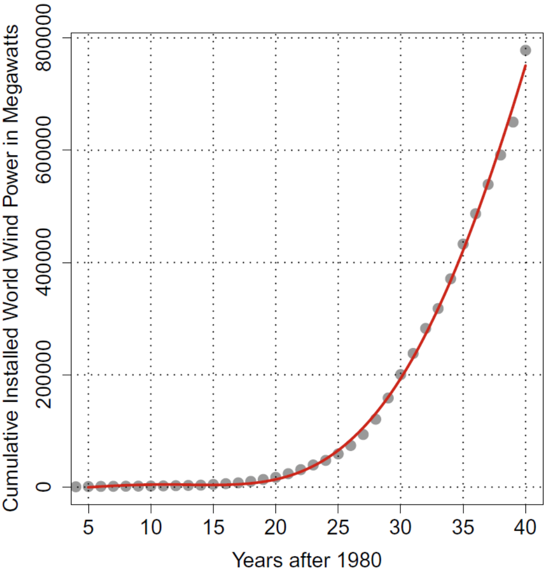
Gráfica de una función: sea $y = x^2$. ¿Exactitud en el trazado del gráfico?



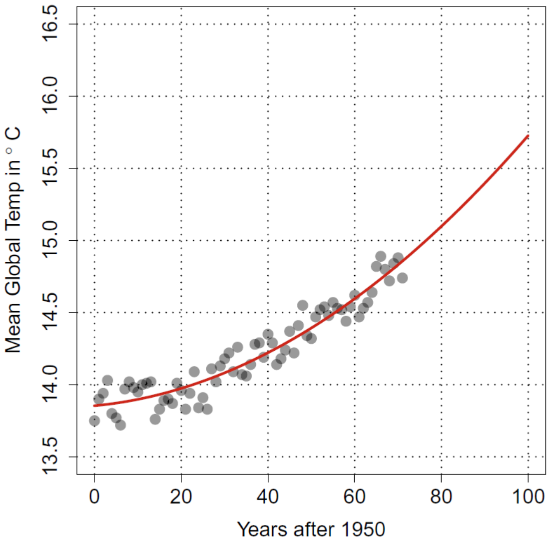


El Análisis Matemático da herramientas para determinar con gran detalle el comportamiento de la gráfica de una función, facilitando así la descripción y representación de la misma.

Ejemplos de modelos matemáticos



Ejemplos de modelos matemáticos



Función afín

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son números reales, se denomina función afín. El gráfico de una función afín es una recta. El número m es la pendiente de dicha recta y b es la ordenada al origen.

Función afín y función polinómica

Función afín

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

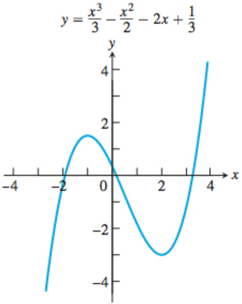
$$f(x) = mx + b$$

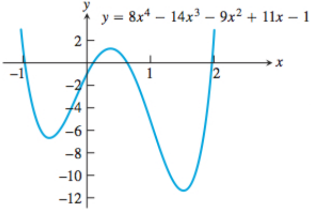
donde m y b son números reales, se denomina función afín. El gráfico de una función afín es una recta. El número m es la pendiente de dicha recta y b es la ordenada al origen.

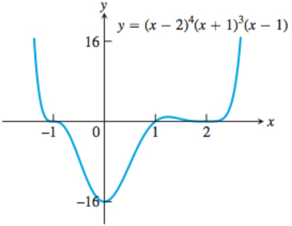
Funciones polinómicas

Una función polinómica es una función $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$







Observación: el gráfico de una función polinómica es *suave*, sin *picos* ni *saltos*.

Funciones racionales

Funciones racionales

Una función racional R es un cociente de funciones polinómicas. Es decir, si P y Q son funciones polinómicas, entonces $R : D_R \to \mathbb{R}$ tal que:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad x \in D_R$$

es una función racional.

Funciones racionales

Funciones racionales

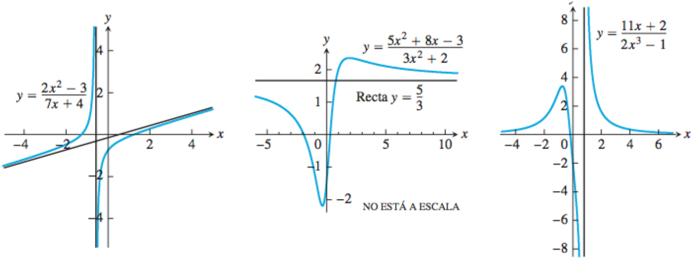
Una función racional R es un cociente de funciones polinómicas. Es decir, si P y Q son funciones polinómicas, entonces $R : D_R \to \mathbb{R}$ tal que:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad x \in D_R$$

es una función racional. Observar que el dominio D_R de R es :

$$D_R = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

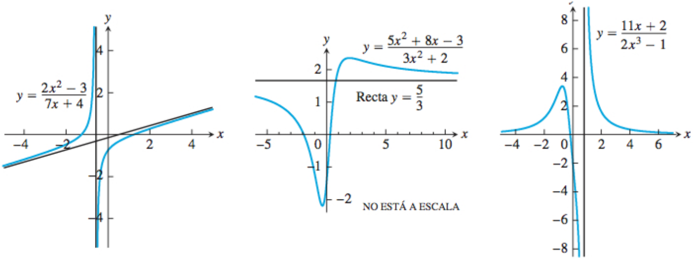
Ejemplos:



Calcular el dominio de $f(x) = \frac{2x^2-3}{7x+4}$.

Funciones racionales

Ejemplos:



Calcular el dominio de $f(x) = \frac{2x^2-3}{7x+4}$.
Solución: dado que f es una función racional, para determinar su dominio observamos cuándo se anula el denominador

$$7x + 4 = 0$$

$$x = -\frac{4}{7}.$$

Luego, $D(f) = (-\infty, -4/7) \cup (-4/7, +\infty)$.