Análisis Matemático I
Clase 2: Clasificación de funciones (continuación) y operaciones con funciones. Introducción a límites.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2025

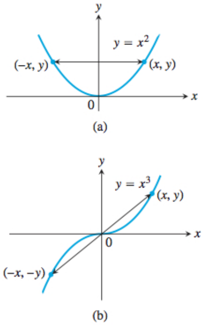
Objetivos de la clase 2:

Continuamos con el objetivo anterior:
Se espera que el estudiante comprenda la noción de función y comience a describir y analizar distintas funciones elementales desde enfoques geométricos y analíticos.

Clasificación de funciones en pares e impares

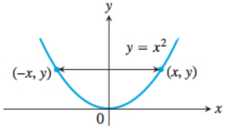
Funciones pares e impares

- Una función $y = f(x)$ es par si $f(x) = f(-x)$ para todo x en el dominio de f.
- Una función $y = f(x)$ es impar si $f(x) = -f(-x)$ para todo x en el dominio de f.

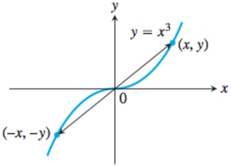


Clasificación de funciones en pares e impares

Observación: la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y y la gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas



(a)



(b)

Dar otros ejemplos.

Funciones crecientes y decrecientes

Funciones crecientes y decrecientes

- Una función $y = f(x)$ definida en un intervalo I es creciente en I si para todo par de puntos x_1 y x_2 en I tales que $x_1 < x_2$ se tiene:

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

- Una función $y = f(x)$ definida en un intervalo I es decreciente en I si para todo par de puntos x_1 y x_2 en I tales que $x_1 < x_2$ se tiene:

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Dar interpretación geométrica.

Función valor absoluto

La función $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

se denomina función valor absoluto.

Realizar gráfico.

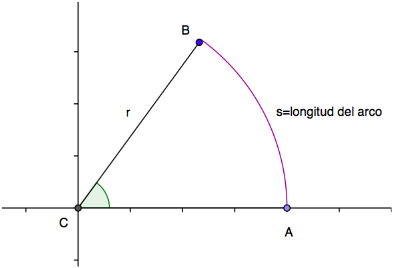
Observación: la función valor absoluto es un ejemplo de una función definida por partes. Veamos otro ejemplo: graficar la siguiente función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Medida en radianes

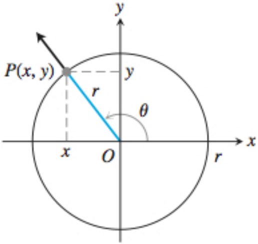
Sea ACB el ángulo que se desea medir. Sea r el radio de la circunferencia y s la longitud del arco determinado por el ángulo sobre la circunferencia. La medida del ángulo ACB en radianes es el cociente:

$$\frac{s}{r}.$$



Ejemplos: ángulos de un giro, de medio giro, etc. Recordar signos de ángulos (sentido horario y antihorario).

Funciones trigonométricas: suponemos $x \neq 0$ y $y \neq 0$.



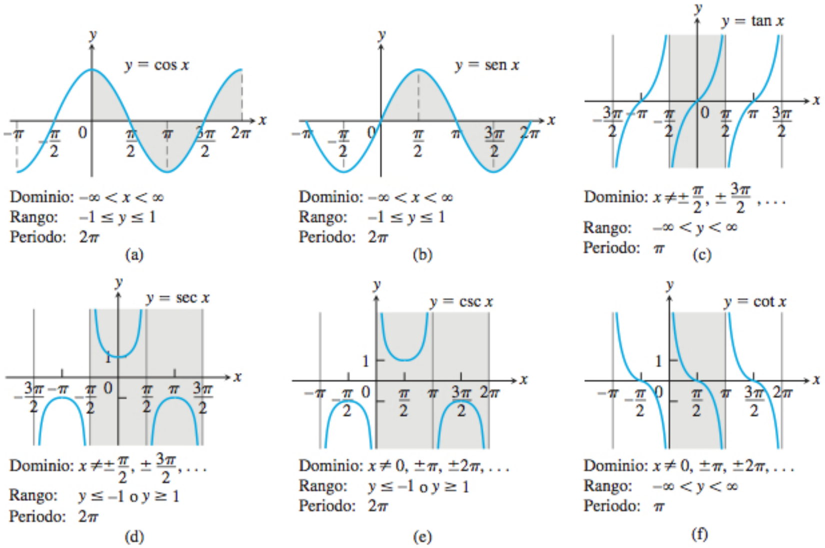
seno: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r}$ **cosecante:** $\csc\theta = \dfrac{r}{y}$

coseno: $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ **secante:** $\sec\theta = \dfrac{r}{x}$

tangente: $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ **cotangente:** $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$

Tarea: repasar páginas 25, 26, 27 y 28 del libro de texto (identidades trigonométricas y transformaciones de funciones trigonométricas.)

Funciones trigonométricas



Operaciones con funciones: sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y $g : D(g) \to \mathbb{R}$ dos funciones. Entonces definimos nuevas funciones:

$$f + g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{(función suma)}$$

Operaciones con funciones.

Operaciones con funciones: sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ **y** $g : D(g) \to \mathbb{R}$ **dos funciones. Entonces definimos nuevas funciones:**

$$f + g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{(función suma)}$$

$$f - g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{(función diferencia)}$$

Operaciones con funciones.

Operaciones con funciones: sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ **y** $g : D(g) \to \mathbb{R}$ **dos funciones. Entonces definimos nuevas funciones:**

$$f + g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{(función suma)}$$

$$f - g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{(función diferencia)}$$

$$f.g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f.g)(x) = f(x).g(x) \quad \text{(función multiplicación)}$$

Operaciones con funciones.

Operaciones con funciones: sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y $g : D(g) \to \mathbb{R}$ dos funciones. Entonces definimos nuevas funciones:

$$f + g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{(función suma)}$$

$$f - g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{(función diferencia)}$$

$$f.g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f.g)(x) = f(x).g(x) \quad \text{(función multiplicación)}$$

La función división f/g tiene por dominio el conjunto:

$$D(f/g) = \{x \in D(f) \cap D(g) : g(x) \neq 0\}$$

y se obtiene mediante división:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad x \in D(f/g).$$

Importante: si bien se han mencionado explícitamente los dominios en las operaciones entre funciones, no se hará uso explícito de ellos, excepto en el caso de la división (por ejemplo en función racional).

Composición de funciones.

Composición de funciones

Sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y $g : D(g) \to \mathbb{R}$ dos funciones. Definimos la composición de f con g como la función $f \circ g : D(f \circ g) \to \mathbb{R}$ con dominio:

$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\}$$

y cuyas imágenes se obtienen mediante la fórmula:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad x \in D(f \circ g).$$

Hacer diagramas de Venn para ilustrar el dominio de la composición.
Importante: no se hará uso explícito del dominio de la composición, aunque sí de su fórmula.

Composición de funciones.

Ejemplo: dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = sen(x)$, escriba la expresión de $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

Introducción al concepto de Límite y convergencia

Recordar que una de las descripciones del Cálculo es que es un conjunto de herramientas matemática que nos permite comprender cómo varían o cambian las funciones

Tasa de cambio promedio o rapidez promedio

Problema 1: se deja caer un objeto desde lo alto de un edificio. Determinar:

(1) La rapidez promedio durante los primeros 2 s

(2) La rapidez promedio durante el intervalo de tiempo de un segundo a dos segundos.

Tasa de cambio promedio o rapidez promedio

Problema 1: se deja caer un objeto desde lo alto de un edificio. Determinar:

(1) La rapidez promedio durante los primeros 2 s
(2) La rapidez promedio durante el intervalo de tiempo de un segundo a dos segundos.

Solución:

(1) Caida libre: la distancia recorrida por el objeto viene dada por:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2, \text{ donde } g \approx 32ft/s^2.$$

Entonces la rapidez promedio durante los primeros 2 segundos es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(2) - y(0)}{2 - 0} = 32ft/s.$$

Tasa de cambio promedio

(2) Rapidez promedio en el intervalo $[1, 2]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(2) - y(1)}{2 - 1} = 48ft/s.$$

Tasa de cambio promedio

(2) Rapidez promedio en el intervalo $[1, 2]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(2) - y(1)}{2 - 1} = 48ft/s.$$

Problema 2: ¿Qué pasa si queremos calcular la rapidez promedio en un intervalo $[1, 1 + h]$?
Solución: longitud del intervalo: h. Entonces la rapidez promedio en el intervalo $[1, 1 + h]$ es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(1 + h) - y(1)}{h} = \frac{16(1 + h)^2 - 16(1)^2}{h}.$$

Tasa de cambio

Tasa de cambio promedio

La tasa de cambio promedio de una función $y = f(x)$ con respecto a la variable x en el intervalo $[x_1, x_1 + h]$ es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

.

Interpretar geométricamente.

Introducción a la tasa de cambio instantánea

Recordar que la tasa de cambio promedio de $y = 16t^2$ en $[t_0, t_0 + h]$ es:

$$\frac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h}.$$

Observemos la siguiente situación:

valor de h	tasa promedio de $y = 16t^2$ para $t_0 = 1$ en $[1, 1 + h]$
1	48
0.1	33.6
0.01	32.16
0.001	32.016
0.0001	32.0016

Introducción a la tasa de cambio instantánea

Recordar que la tasa de cambio promedio de $y = 16t^2$ en $[t_0, t_0 + h]$ es:

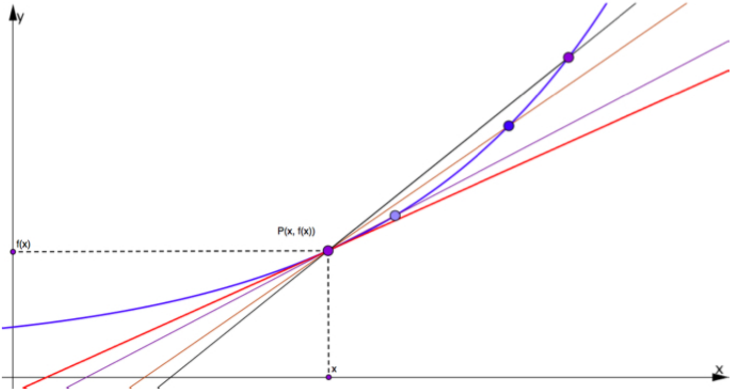
$$\frac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h}.$$

Observemos la siguiente situación:

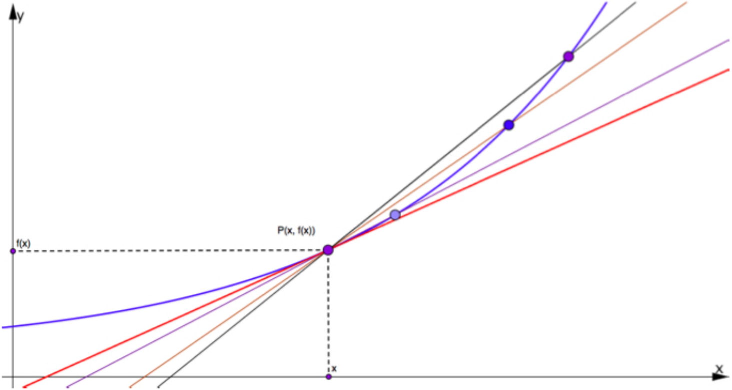
valor de h	tasa promedio de $y = 16t^2$ para $t_0 = 1$ en $[1, 1 + h]$
1	48
0.1	33.6
0.01	32.16
0.001	32.016
0.0001	32.0016

Así, podemos decir que para $t_0 = 1$, la tasa de cambio promedio de y con respecto a t tiende al valor 32 a medida que la longitud del intervalo $[1, 1 + h]$ tiende a cero (es decir, a medida que h tiende a 0.) **Decimos que 32 (ft/s) es la tasa de cambio instantánea de y con respecto a t en $t_0 = 1$. Luego aprenderemos a calcular la rapidez instantánea en forma precisa.**

Interpretación geométrica de la tasa instantánea



Interpretación geométrica de la tasa instantánea



Conclusión

Tasa instantánea de f en t_0 = pendiente de la recta tangente al gráfico de f en $(t_0, f(t_0))$.

Ejercicios complementarios:

1) Encuentre el dominio de

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$$

y luego de

$$g(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}.$$

2) Dadas

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ y } g(x) = x+1,$$

determine la expresión de cálculo de:

1. $f \circ f$
2. $f \circ g$
3. $g \circ f$

Observación: con lo visto en la clase de hoy puede hacer todos los ejercicios de la sección Funciones del TP1.