1.1 LÓGICA

INGENIERÍA Y LCC

1 Proposiciones y conectivos lógicos
- Proposiciones
- Conectivos lógicos
  - Jerarquía de conectivos
- Implicación lógica y Equivalencia lógica

2 Uso de cuantificadores
- Proposiciones cuantificadas
- Negación de proposiciones cuantificadas
- Cuantificadores anidados

1 Proposiciones y conectivos lógicos
- Proposiciones
- Conectivos lógicos
  - Jerarquía de conectivos
- Implicación lógica y Equivalencia lógica

2 Uso de cuantificadores
- Proposiciones cuantificadas
- Negación de proposiciones cuantificadas
- Cuantificadores anidados

Proposiciones

Definición

Una proposición es un enunciado afirmativo que puede ser calificado como verdadero o falso, pero no ambos a la vez.

Proposiciones

Definición

Una proposición es un enunciado afirmativo que puede ser calificado como verdadero o falso, pero no ambos a la vez.

Notación: para nombrar las proposiciones se usa letras minúsculas del alfabeto latino como: p, q, r. Además, su valor de verdad suele indicarse como $v(p) = V$ ó $v(p) = F$.

Definición

Una proposición es un enunciado afirmativo que puede ser calificado como verdadero o falso, pero no ambos a la vez.

Notación: para nombrar las proposiciones se usa letras minúsculas del alfabeto latino como: p, q, r. Además, su valor de verdad suele indicarse como $v(p) = V$ ó $v(p) = F$.

Ejemplo

1. $5 + 8 < 6$

Proposiciones

Definición

Una proposición es un enunciado afirmativo que puede ser calificado como verdadero o falso, pero no ambos a la vez.

Notación: para nombrar las proposiciones se usa letras minúsculas del alfabeto latino como: p, q, r. Además, su valor de verdad suele indicarse como $v(p) = V$ ó $v(p) = F$.

Ejemplo

1. $5 + 8 < 6 : p$
2. Las clases del ingreso se dictaban los días sábado

Proposiciones

Definición

Una proposición es un enunciado afirmativo que puede ser calificado como verdadero o falso, pero no ambos a la vez.

Notación: para nombrar las proposiciones se usa letras minúsculas del alfabeto latino como: p, q, r. Además, su valor de verdad suele indicarse como $v(p) = V$ ó $v(p) = F$.

Ejemplo

1. $5 + 8 < 6 : p$
2. Las clases del ingreso se dictaban los días sábado: q
3. Definición de transformación lineal.

Proposiciones

Definición

Una proposición es un enunciado afirmativo que puede ser calificado como verdadero o falso, pero no ambos a la vez.

Notación: para nombrar las proposiciones se usa letras minúsculas del alfabeto latino como: p, q, r. Además, su valor de verdad suele indicarse como $v(p) = V$ ó $v(p) = F$.

Ejemplo

1. $5 + 8 < 6 : p$
2. Las clases del ingreso se dictaban los días sábado: q
3. Definición de transformación lineal. X
4. ¿Primer año de Arquitectura cursa los martes? X

Las proposiciones p y q son proposiones simples (o primitivas), ya que no pueden descomponerse

- **CONJUNCIÓN:** La conjunción de dos proposiciones p y q se denota como $p \wedge q$ y se lee **"**p **y** q **"**.

Conectivos lógicos

- **CONJUNCIÓN:** La conjunción de dos proposiciones p y q se denota como $p \wedge q$ y se lee "p **y** q".El valor de verdad de la proposición compuesta obtenida de esta manera es verdadera sólo cuando ambas proposiciones son verdaderas.

p	q	$p \wedge q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

- **CONJUNCIÓN:** La conjunción de dos proposiciones p y q se denota como $p \wedge q$ y se lee **"**p **y** q **"**. El valor de verdad de la proposición compuesta obtenida de esta manera es verdadera sólo cuando ambas proposiciones son verdaderas.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- **DISYUNCIÓN:** La disyunción de dos proposiciones p y q se denota como $p \vee q$ y se lee "p **o** q".

Conectivos lógicos

- **DISYUNCIÓN:** La disyunción de dos proposiciones p y q se denota como $p \vee q$ y se lee "p **o** q".El valor de verdad de la nueva proposición que se obtiene de esta manera es falsa en el único caso en que las dos proposiciones sean falsas.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- **IMPLICACIÓN:** La implicación o condicional de dos proposiciones p y q se denota como $p \to q$. En esta nueva proposición:

$$\underbrace{p}_{\text{antecedente (o hipótesis)}} \quad \to \quad \underbrace{q}_{\text{consecuente (o conclusión o tesis)}}$$

Usualmente se lee como: **"Si** p **entonces** q **"**.

Conectivos lógicos

- **IMPLICACIÓN:** La implicación o condicional de dos proposiciones p y q se denota como $p \to q$. En esta nueva proposición:

$$\underbrace{p}_{\text{antecedente (o hipótesis)}} \qquad \to \qquad \underbrace{q}_{\text{consecuente (o conclusión o tesis)}}$$

Usualmente se lee como: **"Si** p **entonces** q **"**.El valor de verdad de una implicación es falsa sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- **IMPLICACIÓN:** La implicación o condicional de dos proposiciones p y q se denota como $p \to q$. En esta nueva proposición:

$$\underbrace{p}_{\text{antecedente (o hipótesis)}} \quad \to \quad \underbrace{q}_{\text{consecuente (o conclusión o tesis)}}$$

Usualmente se lee como: **"Si** p **entonces** q **"**.El valor de verdad de una implicación es falsa sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- p implica q
- Si p, q
- q si p
- p sólo si q

Conectivos lógicos

- **IMPLICACIÓN:**

Cada implicación tiene otras implicaciones asociadas, en el sentido de que se pueden escribir a partir de ella. Dichas implicaciones, cuya relevancia se analizará luego, son:

IMPLICACIÓN	IMPLICACIONES ASOCIADAS	
$p \to q$	$q \to p$	recíproca
	$\neg p \to \neg q$	contraria
	$\neg q \to \neg p$	contrarrecíproca

- **DOBLE IMPLICACIÓN:** La doble implicación, o bicondicional, entre proposiciones p y q se denota como $p \leftrightarrow q$. Coloquialmente se lee: **"p si y sólo si q "**. El valor de verdad de la proposición compuesta resultante es verdadera cuando los valores de verdad de las proposiciones involucradas son iguales, es decir, ambas verdaderas o ambas falsas.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Conectivos lógicos

- **NEGACIÓN:** La negación de una proposición p se denota como $\neg p$, $\overline{p}$ o $\sim p$. Coloquialmente se lee de muchas maneras, como por ejemplo: **"no es cierto que p"**, pero en realidad depende mucho de lo que enuncie la proposición.

Conectivos lógicos

- **NEGACIÓN:** La negación de una proposición p se denota como $\neg p$, $\overline{p}$ o $\sim p$. Coloquialmente se lee de muchas maneras, como por ejemplo: **"no es cierto que p"**, pero en realidad depende mucho de lo que enuncie la proposición. El valor de verdad de la nueva proposición obtenida al negar p es exactamente su contrario, es decir:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Jerarquía de conectivos

$$-3 + 5 \cdot 4 \cdot (-4) + 2 \cdot (3 + 1) \qquad [(-3 + 5 \cdot 4) \cdot (-4 + 2)] \cdot 3 + 1$$

Jerarquía de conectivos

$$-3 + 5 \cdot 4 \cdot (-4) + 2 \cdot (3 + 1) \qquad [(-3 + 5 \cdot 4) \cdot (-4 + 2)] \cdot 3 + 1$$

Lo mismo sucede con los conectivos. Si no queremos usar tanto paréntesis, hay que establecer una jerarquía:

1. negación ($\neg$)
2. conjunción ($\wedge$)
3. disyunción ($\vee$)
4. implicación ($\rightarrow$)
5. doble implicación ($\leftrightarrow$)

$$q \wedge \neg u \rightarrow s$$

Jerarquía de conectivos

$$-3 + 5 \cdot 4 \cdot (-4) + 2 \cdot (3 + 1) \qquad [(-3 + 5 \cdot 4) \cdot (-4 + 2)] \cdot 3 + 1$$

Lo mismo sucede con los conectivos. Si no queremos usar tanto paréntesis, hay que establecer una jerarquía:

1. negación ($\neg$)
2. conjunción ($\wedge$)
3. disyunción ($\vee$)
4. implicación ($\to$)
5. doble implicación ($\leftrightarrow$)

$$q \wedge \neg u \to s \qquad \rightsquigarrow \qquad (q \wedge (\neg u)) \to s$$

Jerarquía de conectivos

$$-3 + 5 \cdot 4 \cdot (-4) + 2 \cdot (3 + 1) \qquad\qquad [(-3 + 5 \cdot 4) \cdot (-4 + 2)] \cdot 3 + 1$$

Lo mismo sucede con los conectivos. Si no queremos usar tanto paréntesis, hay que establecer una jerarquía:

1. negación ($\neg$)
2. conjunción ($\wedge$)
3. disyunción ($\vee$)
4. implicación ($\rightarrow$)
5. doble implicación ($\leftrightarrow$)

$$q \wedge \neg u \rightarrow s \qquad \rightsquigarrow \qquad (q \wedge (\neg u)) \rightarrow s$$

hacer tabla

Definición

Sea P una proposición compuesta, se dice que:

- P es **tautología** si es verdadera para todas las asignaciones de valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.

Definición

Sea P una proposición compuesta, se dice que:

- P es **tautología** si es verdadera para todas las asignaciones de valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.
- P es **contradicción** si es falsa para todas las asignaciones de valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.

Definición

Sea P una proposición compuesta, se dice que:

- P es **tautología** si es verdadera para todas las asignaciones de valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.
- P es **contradicción** si es falsa para todas las asignaciones de valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.
- P es una **contingencia** si su valor de verdad cambia según cuáles sean los de las proposiciones simples que la forman.

Implicación lógica y Equivalencia lógica

Definición

Sea P una proposición compuesta, se dice que:

- P es **tautología** si es verdadera para todas las asignaciones de valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.
- P es **contradicción** si es falsa para todas las asignaciones de valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.
- P es una **contingencia** si su valor de verdad cambia según cuáles sean los de las proposiciones simples que la forman.

Ejemplo

$$p \vee \neg p \qquad \text{es tautología}$$

Implicación lógica y Equivalencia lógica

Ejemplo

- $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ es tautología.

Ejemplo

- $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)]$ es tautología.
  Se expresa como:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \quad \text{o} \quad p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$$

Implicación lógica y Equivalencia lógica

Ejemplo

- $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)]$ es tautología.
  Se expresa como:

  $$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \quad \text{o} \quad p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$$

  Se dice que: **Las proposiciones son lógicamente equivalentes,** o que **la proposición es una equivalencia lógica.**

Implicación lógica y Equivalencia lógica

Ejemplo

- $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ es tautología.
  Se expresa como:

  $$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \quad \text{o} \quad p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

  Se dice que: **Las proposiciones son lógicamente equivalentes,** o que **la proposición es una equivalencia lógica.**

- $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$ es tautología.

Implicación lógica y Equivalencia lógica

Ejemplo

- $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)]$ es tautología.
  Se expresa como:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \quad \text{o} \quad p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$$

> Se dice que: **Las proposiciones son lógicamente equivalentes,** o que **la proposición es una equivalencia lógica.**

- $p \wedge (p \to q) \to q$ es tautología.
  Se expresa como:

$$p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$$

Implicación lógica y Equivalencia lógica

Ejemplo

- $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ es tautología.
  Se expresa como:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \quad \text{o} \quad p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

> Se dice que: **Las proposiciones son lógicamente equivalentes,** o que **la proposición es una equivalencia lógica.**

- $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$ es tautología.
  Se expresa como:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$$

> Se dice que: **La proposición es una implicación lógica,** o que **el antecedente implica lógicamente al consecuente.**

Equivalencias Lógicas

EQUIVALENCIAS LÓGICAS	
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$	leyes conmutativas
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	leyes asociativas
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	leyes distributivas
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{1}$	tautología
$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{0}$	contradicción
$p \vee \mathbf{0} \equiv p$ $p \wedge \mathbf{1} \equiv p$	leyes de identidad
$p \to q \equiv \neg p \vee q$	implicación
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$	contrarrecíproca
$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$	bicondicional
$p \to q \equiv p \wedge \neg q \to \mathbf{0}$	reducción al absurdo

Equivalencias Lógicas

EQUIVALENCIAS LÓGICAS	
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	leyes de De Morgan
$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$	negación de implicación
$\neg(\neg p) \equiv p$	doble negación

IMPLICACIONES LÓGICAS	
$p \Rightarrow p \vee q$	adición
$p \wedge q \Rightarrow p$	simplificación
$p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$	modus ponens
$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$	modus tollens
$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$	silogismo hipotético
$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$	silogismo disyuntivo
$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$	transitiva del bicondicional

Ejemplo

Dadas la proposición compuesta $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$. ¿Es posible simplificarla?

$$
\begin{array}{lll}
 & (p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) & \\
\Longleftrightarrow & (p \vee q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg q) & \text{ley de De Morgan} \\
\Longleftrightarrow & (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) & \text{doble negación} \\
\Longleftrightarrow & p \vee (q \wedge \neg q) & \text{distributiva de } \vee \text{ sobre } \wedge \\
\Longleftrightarrow & p \vee \mathbf{0} & \text{contradicción} \\
\Longleftrightarrow & p & \text{ley de identidad}
\end{array}
$$

Conclusión:

$$(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \Longleftrightarrow p$$

1 Proposiciones y conectivos lógicos
- Proposiciones
- Conectivos lógicos
  - Jerarquía de conectivos
- Implicación lógica y Equivalencia lógica

2 Uso de cuantificadores
- Proposiciones cuantificadas
- Negación de proposiciones cuantificadas
- Cuantificadores anidados

Función proposicional

Definición

Un enunciado es una función proposicional si

1) contiene una o más variables, y
2) no es una proposición, pero
3) se convierte en una proposición cuando las variables que contiene se reemplazan por alguna opción permitida.

Ejemplo

$$p(x) : x \text{ es un número primo.}$$

Función proposicional

Definición

Un enunciado es una función proposicional si

1) contiene una o más variables, y
2) no es una proposición, pero
3) se convierte en una proposición cuando las variables que contiene se reemplazan por alguna opción permitida.

Ejemplo

$$p(x) : x \text{ es un número primo.}$$

$$p(11) : 11 \text{ es un número primo.}$$

$$p(305) : 305 \text{ es un número primo.}$$

Uso de cuantificadores

- Para algún x, $p(x)$.
- Existe algún x tal que $p(x)$.
- Existe al menos un x tal que $p(x)$.

Una forma de cuantificar la variable es el **cuantificador existencial**. La proposición que se forma se simboliza con:

$$\exists x : p(x). \qquad \text{o} \qquad \exists x \in X : p(x).$$ [a]

[a] Notación más rigurosa.

Uso de cuantificadores

El modo de indicar que un enunciado comprende a todos los sujetos posibles del universo de discurso es el **cuantificador universal** y la proposición así formada se simboliza con:

$$\forall x : q(x) \qquad \text{o} \qquad \forall x \in X : q(x).^{a},$$

[a] Notación más rigurosa.

Algunas formas de leer una proposición cuantificada de este modo son:

- Para todo x, $q(x)$.
- Cualquier x cumple $q(x)$.
- Todo x verifica $q(x)$.

Valor de verdad de proposiciones cuantificadas

Proposición	**¿Cuándo es verdadera?**	**¿Cuándo es falsa?**
$\exists x : p(x)$	Para algún a (al menos uno) en el universo, $p(a)$ es verdadera.	Para todo a en el universo, $p(a)$ es falsa.
$\forall x : q(x)$	Para cada a del universo, $q(a)$ es verdadera.	Existe al menos un a en el universo tal que $q(a)$ es falsa.

Propiedad importante

Teorema

Dada una función proposicional $p(x)$ con universo U, se verifica que:

$$[\,\forall x : p(x)\,] \Rightarrow [\,\exists x : p(x)\,]$$

Negación de proposiciones cuantificadas

$$\begin{aligned} \neg(\exists x : P(x)) &\equiv \forall x : \neg P(x) \\ \neg(\forall x : P(x)) &\equiv \exists x : \neg P(x) \end{aligned}$$

Cuantificadores anidados

Ejemplo

Las dos variables son números enteros: $x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}$:

$$\forall x \exists y : \ x + y = 3x$$

Cuantificadores anidados

Ejemplo

Las dos variables son números enteros: $x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}$:

$$\forall x \exists y : \ x + y = 3x$$

$$x = 4 \rightsquigarrow y = 8 \text{ que verifican que } 4 + 8 = 3 \cdot 8$$

$$x = -3 \rightsquigarrow y = -6 \text{ que verifican que } -3 + (-6) = 3 \cdot (-3)$$

Cuantificadores anidados

Ejemplo

Las dos variables son números enteros: $x \in \mathbb{Z}, \ y \in \mathbb{Z}$:

$$\forall x \exists y : \ x + y = 3x$$

$$x = 4 \rightsquigarrow y = 8 \ \text{ que verifican que } \ 4 + 8 = 3 \cdot 8$$

$$x = -3 \rightsquigarrow y = -6 \ \text{ que verifican que } \ -3 + (-6) = 3 \cdot (-3)$$

Para probar que cada vez que se fije un valor de x **siempre** se podrá encontrar algún valor de y que haga verdadera la igualdad, se requiere hacer una **demostración**. Aquí sólo hemos hecho una **verificación** de un par de ejemplos.

Cuantificadores anidados

Ejemplo

Las dos variables son números reales: $x \in [0,\ 1)$ $y \in [0,\ 1)$ y la función proposicional $p(x, y)$: x es la parte entera de y.

$$\exists x \forall y : \ p(x, y)$$

Cuantificadores anidados

Ejemplo

Las dos variables son números reales: $x \in [0,\ 1)$ $y \in [0,\ 1)$ y la función proposicional $p(x, y)$: x es la parte entera de y.

$$\exists x \forall y : \ p(x, y)$$

Existe $x = 0$:

- $\rightsquigarrow y = 0{,}34$ y se verifica que $x = 0$ es la parte entera de $y = 0{,}34$

Cuantificadores anidados

Ejemplo

Las dos variables son números reales: $x \in [0,\ 1)$ $y \in [0,\ 1)$ y la función proposicional $p(x, y)$: x es la parte entera de y.

$$\exists x \forall y : \ p(x, y)$$

Existe $x = 0$:

- $\rightsquigarrow y = 0{,}34$ y se verifica que $x = 0$ es la parte entera de $y = 0{,}34$
- $\rightsquigarrow y = 0{,}9086$ y se verifica que $x = 0$ es la parte entera de $y = 0{,}9086$

Ejemplo

Las dos variables son números reales: $x \in [0,\ 1)$ $y \in [0,\ 1)$ y la función proposicional $p(x, y)$: x es la parte entera de y.

$$\exists x \forall y : \ p(x, y)$$

Existe $x = 0$:

- $\rightsquigarrow y = 0{,}34$ y se verifica que $x = 0$ es la parte entera de $y = 0{,}34$
- $\rightsquigarrow y = 0{,}9086$ y se verifica que $x = 0$ es la parte entera de $y = 0{,}9086$

Para probar que cada vez que existe al menos un individuo (x) que verifica la proposición con todos los posibles individuos y, se requiere hacer una **demostración**. Aquí sólo hemos hecho una **verificación** de un par de ejemplos.