

Análisis Matemático I

Clase 3: concepto intuitivo de límite. Cálculo de límites.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2025

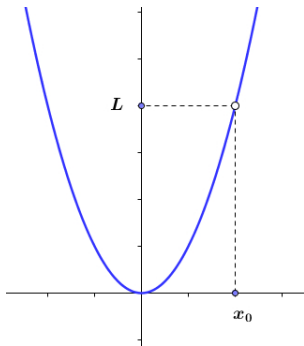
Objetivo de la clase 3: *se espera que el estudiante comience a familiarizarse con la idea intuitiva de límite y que aplique técnicas analíticas (factorización, racionalización, teorema de la compresión, etc.) para el cálculo de los mismos.*

¿Cómo determinar el comportamiento de una función alrededor de un punto?

¿Cómo determinar el comportamiento de una función alrededor de un punto?

La búsqueda de respuestas a esta pregunta nos lleva al concepto de *LÍMITE* de una función

Observar que en algunas situaciones, podemos responder los interrogantes sobre el comportamiento de una función a través de su gráfica. Por ejemplo:



Entonces, si nos preguntamos cuál es la tendencia de f cuando x se acerca cada vez más a x_0 , diríamos que los valores de f tienden a L . En símbolos, vamos a escribir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

y leemos: el límite (es decir, la tendencia) de f cuando x tiende a x_0 es L .

Concepto intuitivo de límite

Por otro lado, cuando disponemos de la fórmula de la función es posible intentar obtener el comportamiento de la función cerca de x_0 dándole valores a la variable independiente x cada vez más cercanos a x_0 y evaluándolos en la función. Por ejemplo, consideremos la función:

$$f : (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Supongamos que queremos saber cuál es la tendencia de f cuando x tiende a $x_0 = 1$. Observar que no podemos evaluar f directamente en 1 pues este número no pertenece al dominio de f . Lo que haremos es construir una tabla de valores apropiada.

Concepto intuitivo de límite

x	$f(x)$
0,9	1.9
0,99	1.99
0,999	1.999
1,1	2.1
1,01	2.01
1,001	2.001
1,0001	2.0001

Tabla: Valores de f cuando x tiende a 1.

Observar que los valores que se eligen deben estar cada vez más cerca de $x_0 = 1$, tanto por derecha como por izquierda. Además, excluimos el punto $x_0 = 1$ de la tabla.

Concepto intuitivo de límite

En conclusión, diríamos que la tendencia de f cuando x se acerca cada vez más a $x_0 = 1$ es 2. En símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

Sin embargo, tanto el enfoque gráfico como el numérico (tabla) presentan limitaciones para calcular límites. En el primer caso, cuando la función a analizar presenta un gráfico complejo o que no se puede determinar con claridad, resulta difícil encontrar el límite con este método. En el caso de la tabla de valores, darle solamente algunos valores a la variable independiente, cercanos al punto de análisis, no garantiza que el límite sea la tendencia observada en la tabla. Por ende, es necesario recurrir a herramientas analíticas que nos permitan obtener respuestas exactas. Con la finalidad de encontrar resultados exactos sin necesidad de gráficas ni tablas, vamos a introducir la definición de **límite** y estrategias para su cálculo.

Comenzaremos con la definición informal de límite:

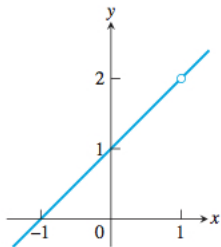
Definición informal de límite

Supongamos que f está definida en un intervalo abierto alrededor de x_0 , excepto posiblemente en el punto x_0 . Si los valores $f(x)$ de la función f están arbitrariamente cercanos a un número L , para toda x suficientemente cercana al punto x_0 , decimos que f tiende a L cuando x tiende a x_0 , y escribimos:

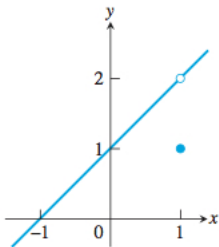
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Concepto intuitivo de límite: ejemplos

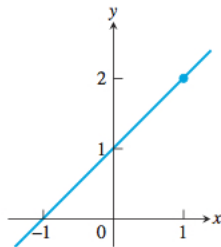
Estudiar el límite de las siguientes funciones cuando x tiende a 1.



$$(a) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$



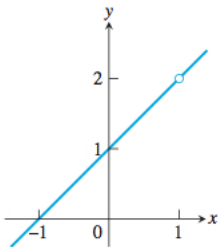
$$(b) g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$



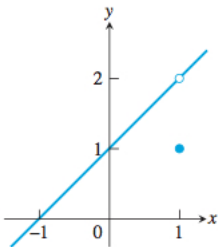
$$(c) h(x) = x + 1$$

Concepto intuitivo de límite: ejemplos

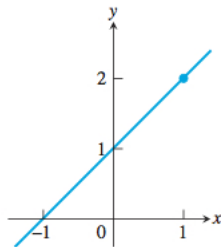
Estudiar el límite de las siguientes funciones cuando x tiende a 1.



$$(a) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$



$$(b) g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

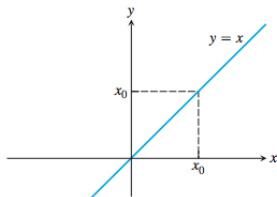


$$(c) h(x) = x + 1$$

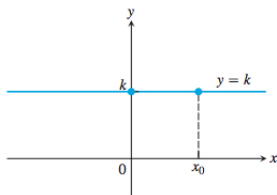
¡En todos los ejemplos, el límite considerado es 2!

Observación importante: el límite de una función cuando la variable independiente tiende a un valor x_0 puede existir sin que la función esté definida en el punto x_0 . Es decir, para calcular límites, no es relevante si la función está definida o no en el punto de interés!!!

Funciones identidad y constante

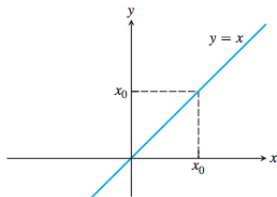


(a) Función identidad

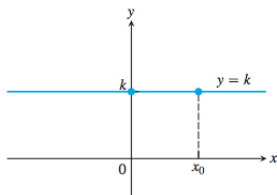


(b) Función constante

Funciones identidad y constante



(a) Función identidad

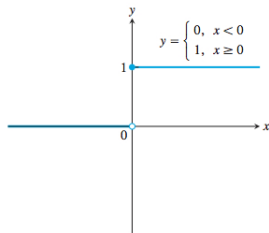


(b) Función constante

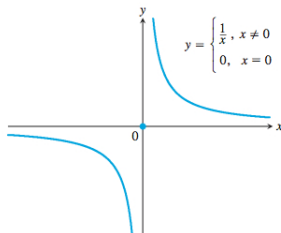
En el primer caso $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ y en el segundo $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Concepto intuitivo de límite

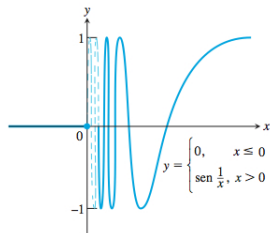
Más ejemplos: analizar si existe o no el límite de las siguientes funciones cuando x tiende a 0.



(a) Función escalón unitario $U(x)$



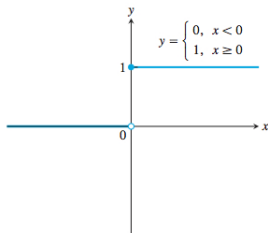
(b) $g(x)$



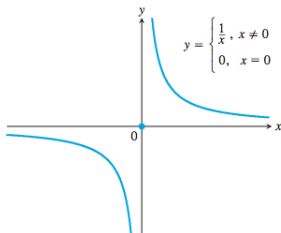
(c) $f(x)$

Concepto intuitivo de límite

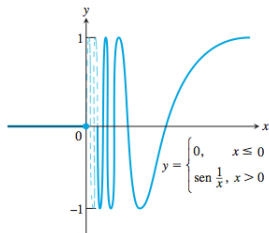
Más ejemplos: analizar si existe o no el límite de las siguientes funciones cuando x tiende a 0.



(a) Función escalón unitario $U(x)$



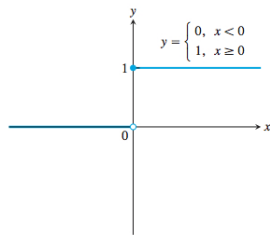
(b) $g(x)$



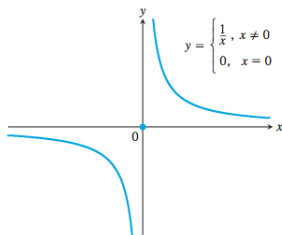
(c) $f(x)$

- (a) El límite $\lim_{x \rightarrow 0} U(x)$ no existe pues cuando x se acerca a 0 por la izquierda (valores negativos), la función $U(x)$ vale siempre 0, mientras que cuando x se acerca a 0 por la derecha (valores positivos), la función $U(x)$ vale siempre 1. Como los valores de la función U no se acercan a un número para todo x suficientemente cercano a 0, el límite estudiado no existe.

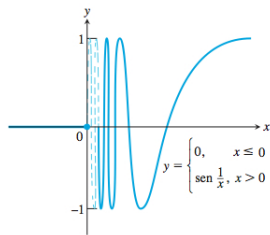
Concepto intuitivo de límite



(a) Función escalón unitario $U(x)$



(b) $g(x)$



(c) $f(x)$

- (b) El límite $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ no existe pues cuando x tiende a 0 por la derecha los valores de la función $y = g(x)$ se hacen arbitrariamente grandes. Así, los valores de g no se acercan a un determinado valor cuando x tiende a 0.
- (c) Las oscilaciones de la función f cuando x tiende a 0 por la derecha hacen que los valores de la función no se acerquen a un determinado valor. Luego, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe.

Teorema

Supongamos que los límites:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \quad y \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x), \text{ existen.}$$

Entonces:

- $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$.
- Si $k \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$.
- Si $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$.
- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)]^n$, n es un entero positivo.
- $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$, n es un entero positivo. Cuando n es par, se pide que el límite de f sea no negativo.

Consecuencias: cálculo de límites de funciones polinómicas y racionales

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0$$

Además, si P y Q son polinomios y $Q(c) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Así, por ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x^2 - x + 1} = \frac{3}{1} = 3.$$

Consecuencias: cálculo de límites de funciones polinómicas y racionales

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0$$

Además, si P y Q son polinomios y $Q(c) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Así, por ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x^2 - x + 1} = \frac{3}{1} = 3.$$

Pregunta: ¿qué sucede si $Q(c) = 0$?

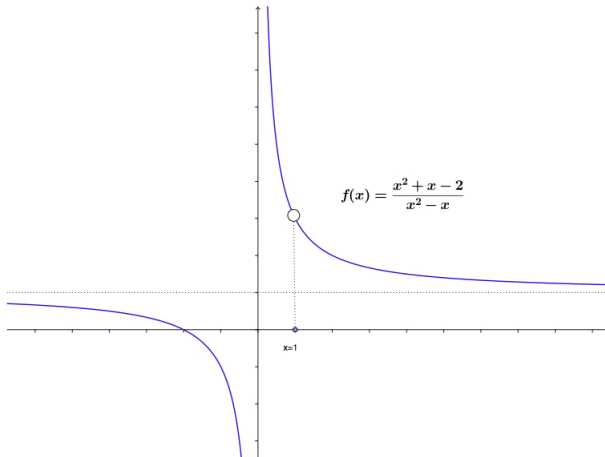
Ejemplo: calcular

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}.$$

Ejemplo: calcular

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}.$$

Observar que la función no está definida ni en 0 ni en 1:



Observar que el denominador:

$$x^2 - x$$

se anula en $x = 1$ (el punto de análisis del límite). Por ende, para calcular el límite no se puede reemplazar directamente por $x = 1$ en el cociente. Sin embargo, se puede eliminar el problema mediante factorización:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x}.$$

Observar que en el último caso, el denominador no se anula en $x = 1$. Por ende podemos reemplazar en el último cociente x por 1 y obtener:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{1 + 2}{1} = 3.$$

Ejemplo: calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}.$$

Ejemplo: calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}.$$

Observar que el denominador se anula cuando $x = 0$. Luego, para resolver el límite no se puede reemplazar directamente x por 0. Vamos a racionalizar el numerador:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(\sqrt{x^2 + 100} - 10) \cdot (\sqrt{x^2 + 100} + 10)}{x^2 \cdot (\sqrt{x^2 + 100} + 10)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 100} + 10)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} = \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Teorema

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1.$$

La demostración de este resultado se verá en el capítulo 7.

Teorema

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1.$$

La demostración de este resultado se verá en el capítulo 7.

Ejemplo: compruebe que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$