Valores y Vectores Propios o Valores y Vectores Característicos o Autovalores y Autovectores o Eigenvalores y Eigenvectores

El problema del eigenvalor o valor propio es uno de los más importantes del álgebra lineal, se puede plantear como sigue. Si A es una matriz de nxn, ¿hay vectores $\boldsymbol{x}$ diferentes de cero en IR^n tales que A$\boldsymbol{x}$ sea un múltiplo escalar de $\boldsymbol{x}$?
Los autovalores y autovectores se utilizan principalmente en la solución de sistemas dinámicos, esto es, en sistemas que son función del tiempo.
Los términos *eigenvalor* y *eigenvector* provienen del término alemán *eigenwert*, que significa valor propio.

Definición Sea A una matriz real de nxn. El escalar λ es un **autovalor** de A si existe un vector $\boldsymbol{x} \in IR^n$, $\boldsymbol{x} \neq 0$ tal que

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

Al vector $\boldsymbol{x}$ se lo llama un **autovector** de A correspondiente a λ.

Observaciones

1) A es la matriz asociada estándar del operador lineal T sobre IR^n, pues verifica que

   A$\boldsymbol{x}$ = T($\boldsymbol{x}$), por lo tanto, se habla indistintamente de autovalores y autovectores de la matriz A o del operador lineal T.

2) A$\boldsymbol{x}$ es múltiplo escalar de $\boldsymbol{x}$.

3) La ecuación $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ tiene dos incógnitas, λ y $\boldsymbol{x}$.

4) En el plano IR^2 y en el espacio geométrico IR^3, los autovectores de A son los vectores de IR^2 o (excluyente) de IR^3 que bajo la acción de A no cambian de dirección, es decir, son los vectores paralelos (en la misma dirección) a $\lambda \boldsymbol{x}$. La multiplicación por A dilata ($\lambda > 1$), contrae ($0 < \lambda < 1$), o cambia el sentido ($\lambda < 0$) del vector $\boldsymbol{x}$, dependiendo del valor de λ.

Ejemplo 1 Muestre que $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es un autovector de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y encuentre el autovalor correspondiente.

Solución
Calculamos

$$A\,\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 5\,\boldsymbol{x},$$

de donde se sigue que $\boldsymbol{x}$ es un autovector de A.

Ejemplo 2 Muestre que 4 es un autovalor de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y encuentre todos los autovectores correspondientes a este autovalor.

Solución

Se debe demostrar que existe un vector $\boldsymbol{x} \neq 0$ tal que A$\boldsymbol{x}$ = 4$\boldsymbol{x}$, esta ecuación es equivalente a (A – 4I) $\boldsymbol{x}$ = **0.** Por lo tanto, se debe encontrar el espacio solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo anterior, es decir,

$$(A - 4I)\, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde se sigue que el espacio solución es $E_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \in IR^2 \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in IR \right\}$, sin embargo, este espacio contiene todos los autovectores correspondiente a $\lambda = 4$ más el vector nulo que no es un autovector de A por definición.

Luego, los autovectores pedidos son de la forma $\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$ con $t \neq 0$, o equivalentemente, son los múltiplos distintos de cero del vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Una base del espacio E_λ es el conjunto

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ y } \dim(E_\lambda) = 1.$$

Cálculo de autovalores y autovectores

Teorema (cálculo de autovalores) Si λ es valor propio de la matriz A de nxn, entonces

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Demostración

Por hipótesis, si λ es valor propio de la matriz A de nxn, por definición se tiene

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

Utilizando el álgebra matricial

$$A\boldsymbol{x} - \lambda I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

o bien

$$(A - \lambda I)\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (1)$$

La expresión (1) representa un sistema de ecuaciones lineales homogéneo compatible indeterminado, pues por definición, los autovectores $\boldsymbol{x}$ satisfacen $\boldsymbol{x} \neq 0$. Luego, la matriz de coeficientes del sistema, (A - λ I) de nxn es no inversible o singular. Por lo tanto,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \text{ que es la tesis o, equivalentemente, } \det(\lambda I - A) = 0.$$

.

Notas

La ecuación anterior se denomina **ecuación característica de A** y es de grado n en λ.
La expresión det(A - λ I) es un polinomio de grado n en λ y P(λ) se denomina **polinomio característico de A**, es decir, P(λ) = det (A - λ I)**.**
Según el **Teorema Fundamental del Álgebra**, cualquier polinomio de grado n con coeficientes reales o complejos, tiene exactamente n raíces contando multiplicidades.

Se observa que los n escalares λ (raíces repetidas o distintas) que satisfacen la ecuación característica, son los autovalores de A. En otras palabras, cada matriz A de nxn con coeficientes reales o complejos, tiene n valores propios complejos contando multiplicidades.
El conjunto de todos los autovalores de A recibe el nombre de **espectro de A** y el autovalor λ de mayor valor absoluto recibe el nombre de **radio espectral**, es el radio de un círculo centrado en el origen del plano complejo que incluye todos los autovalores de A.

Ejemplo Determinar los autovalores de la matriz A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución
Utilizando la ecuación característica det(A - λ I) = 0, se tiene

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

o bien

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, son los autovalores de A.

Observar que la **multiplicidad algebraica** de cada autovalor en el ejemplo anterior es 1, se anota $M_{alg}(\lambda_1) = 1$, $M_{alg}(\lambda_2) = 1$. Recordar que la multiplicidad algebraica de cada raíz en una ecuación algebraica, es el número de veces que aparece dicho valor como raíz de la ecuación.

Cálculo o determinación de autovectores

Para cada valor propio λ encontrado, se resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéno

$$\mathbf{(A - \lambda I)}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

obtenido en (1), siendo **(A - λ I)** la matriz de coeficientes de nxn**,** ***x*** el vector de las incógnitas de nx1 y **0** el vector de términos independientes de nx1.
El espacio solución del sistema anterior, que contiene todos los vectores propios ***x*** correspondientes a λ, más el vector cero (no es vector propio de A por definición) se denomina **espacio propio** o **espacio característico** o **eigenespacio** o **autoespacio** y se anota E_λ, es decir,

$$E_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \text{IR}^n \,/\, (A - \lambda I)\, \boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

La base de este espacio vectorial (no es única) es útil porque contiene un número finito de vectores propios linealmente independientes y generadores de los infinitos autovectores correspondientes a un mismo valor λ.
La dimensión del espacio E_λ se denomina en este contexto, **multiplicidad geométrica de** λ **y** se anota $M_{geo}(\lambda)$**.** Se observa que

$$\dim(E_\lambda) = g,$$

donde g denota los grados de indeterminación o de libertad del sistema lineal homogéneo

$$(A - \lambda I)\, \boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

siendo g$\geq$1 pues E_λ no es un espacio vectorial nulo. También, dim(E_λ) = g representa la nulidad de la matriz A - λ I (dimensión del núcleo del operador lineal T($\boldsymbol{x}$) = (A - λ I) $\boldsymbol{x}$).
Además se verifica que

$$0 < M_{geo}(\lambda) \leq M_{alg}(\lambda)$$

Ejemplo Calcular los vectores propios de A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Solución
Se resuelve la ecuación característica

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

siendo las raíces: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ y $\lambda_3 = 5$.
Se observa que $M_{alg}(\lambda_1 = 1) = 1$, $M_{alg}(\lambda' = 5) = 2$, la traza(A) es igual a la suma de los valores propios, tr(A) = 1 + 5 + 5 = 11 y determinante de A es igual al producto de los valores propios, det(A) = 1 · 5 · 5 = 25.
Para obtener los autovectores, se resuelve el sistema (A - λ I) $\boldsymbol{x}$ = $\mathbf{0}$ para cada valor de λ.

Para $\lambda' = 5$, se tiene el sistema

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando el teorema de Rouché - Frobenius y resolviendo, se obtienen los grados de libertad g = 2 y el espacio característico

$$E_{\lambda'} = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ t \\ s \end{bmatrix} \in IR^3 \right\}$$

Como

$$\begin{bmatrix} -t \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ para } s, t \in IR;$$

una base del espacio característico es

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Luego,

$$\dim(E_\lambda) = 2 = M_{geo}(\lambda' = 5) = g$$

Se observa que

$$M_{geo}(\lambda' = 5) = M_{alg}(\lambda' = 5) = 2$$

(La multiplicidad algebraica y geométrica de $\lambda' = 5$ coinciden).

Análogamente, se resuelve el sistema (A - λ I) $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ para $\lambda_1 = 1$ y se obtiene el siguiente espacio propio

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \in IR^3 \right\}.$$

Una base es

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

siendo

$$\dim\,(E_{\lambda_1}) = 1 = M_{geo}(\lambda_1 = 1) = g$$

(La multiplicidad algebraica y geométrica de $\lambda_1 = 1$ coinciden).

Propiedades de valores y vectores propios

1) Los valores propios de una matriz A y su transpuesta son iguales.

2) Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de su diagonal.

3) La suma de los valores propios de una matriz es igual a la traza de la matriz.

4) El producto de los valores propios de una matriz es igual al determinante de la matriz.

5) Si λ es valor propio de la matriz A de nxn inversible, $\lambda^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}$ es valor propio de A^{-1}. Equivalentemente, la matriz A es singular si, y sólo si $\lambda = 0$ es autovalor de A.

6) Si λ es valor propio de la matriz A de nxn, entonces kλ, con el escalar $k \neq 0$, es valor propio de kA (los vectores propios no cambian).

7) Si λ es valor propio de la matriz A de nxn, entonces λ^r, siendo r una potencia natural (r = 1, 2, 3, …), es valor propio de A^r (los vectores propios no cambian).

8) Si A es una matriz simétrica, entonces los autovalores son números reales y los autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

9) Si la matriz A de nxn tiene n autovalores distintos (la multiplicidad algebraica de cada autovalor es 1), entonces tiene un conjunto de n autovectores linealmente independiente.

Ejercicio obligatorio Demostrar las propiedades 1), 2), 5), 6) y 7).