Trabajo Práctico 2.1: MATRICES

PARTE A

1. Determine la matriz e identifíquela, si es posible, según las condiciones de sus elementos dadas en forma simbólica:

   a) $D_{3\times3} = [d_{ij}]$, donde $d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j \\ \frac{1}{2} & \text{si } i > j \end{cases}$

   b) $M_{3\times3} = [m_{ij}]$, donde $m_{ij} = \begin{cases} i - j & \text{si } i > j \\ i^2 + j^2 & \text{si } i = j \\ 2i^2 - j & \text{si } i < j \end{cases}$

   c) $T_{4\times2} = [t_{ij}]$, donde $t_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{si } i = j \\ 2i - j & \text{si } i \neq j \end{cases}$

2. Realice las operaciones que sean posibles con las matrices dadas a continuación. Identifique cuál de ellas son combinaciones lineales (puede usar https://matrixcalc.org/es/ para la verificación de algunos cálculos):

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -0.2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Matriz D, M y T del ejercicio anterior.

   a) $A + 2M$
   b) $B \cdot C$
   c) $C \cdot B$
   d) $(A \cdot C) - C$
   e) $2 \cdot (B - C^\top)$
   f) $-\frac{1}{2} \cdot C \cdot (3B)^\top$
   g) $D^2 + M$
   h) $(2 \cdot I_{3\times3} - A)^\top + \frac{1}{2} \cdot D$
   i) $[4 \cdot \frac{1}{2} \cdot A - 1/8 \cdot I_{3\times3}] \cdot M^\top$
   j) $-1 \cdot [(M \cdot D)^\top - 2 \cdot A]$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones matriciales, de ser posible, para obtener la expresión de la matriz X. Aplique propiedades. Todas las matrices son cuadradas, del mismo orden e invertibles.

   a) $A \cdot B \cdot X \cdot C \cdot D = A \cdot D$
   b) $[2 \cdot (A \cdot X^{-1}) + B^{-1}] = -3B$
   c) $(-2X + 2A)^\top - 3B^{-1} = B^{-1}$
   d) $[(-3X)^{-1} + 2 \cdot (ABC)^{-1}]^\top = [C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}]^\top$
   e) $(A \cdot X)^\top - 2X \cdot A + 3(A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$
   f) $(X \cdot B^{-1})^{-1} = (A^{-1} \cdot B^2)^{-1} \cdot A$

4. Indique cuáles de las siguientes matrices son elementales e indique la operación elemental realizada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Encuentre la matriz elemental E tal que $E \cdot A = B$ o $A \cdot E = B$. Verifique si la E propuesta es la correcta, realizando el producto con las herramientas digitales propuestas anteriormente. Indique la operación elemental que define a la matriz E.

   Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

   a) $E \cdot A = B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

   b) $E \cdot A = B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 14 & -17 \end{bmatrix}$

   c) $E \cdot A = B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

   Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

   - $E.A = B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$
   - $E.A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$
   - $A.E = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 26 \end{bmatrix}$

6. Determine qué matrices están en forma escalonada, en forma escalonada reducida o ninguna de ellas, e indique el rango de aquellas que están en forma escalonada o escalonada reducida.

   - Matrices del ejercicio 4.
   - $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
   - $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
   - $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
   - $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. Escalone y reduzca las matrices del ejercicio 4 (A, B, C) y las matrices A de los incisos a) y b) del ejercicio 5.

8. Encuentre los valores de los parámetros necesarios para que las matrices tengan rango igual a su orden o menor:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & b+2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Calcule la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

10. Dada la matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, calcule las siguientes operaciones:

- $\frac{1}{3}\left((A^T)^{-1}\right)$
- $\left((2A)^2\right)^{-1}$
- $(A \cdot A^T)^{-1}$

11. Demuestre:

    a) Si A y B son matrices inversibles de orden $n \times n$, entonces $A \cdot B$ es inversible y $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

    b) Si A es una matriz inversible de orden $n \times n$ y k un escalar real no nulo, kA es inversible y $(kA)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$.

    c) Si A es una matriz de $n \times n$, entonces $A + A^T$ es una matriz simétrica.

Ejercicio de aplicación (resuelto)

Una fábrica produce 3 artículos y tiene 4 clientes. El resumen mensual de ventas se anota en una matriz, donde cada cliente dispone de un vector fila cuyas componentes indican las cantidades adquiridas de cada artículo. Sea M la matriz de ventas de enero:

$$M = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Interpretar la matriz M, explicando cómo han sido las ventas.

La matriz M representa las ventas de enero, donde cada columna representa los 3 artículos producidos por la fábrica y cada fila a un cliente distinto. Así tenemos:

$$M = \begin{array}{c|ccc|l} & A_1 & A_2 & A_3 & \\ \hline C_1 & 9 & 5 & 2 & \text{Cliente 1} \\ C_2 & 3 & 8 & 0 & \text{Cliente 2} \\ C_3 & 0 & 0 & 0 & \text{Cliente 3} \\ C_4 & 6 & 7 & 1 & \text{Cliente 4} \end{array}$$

De acuerdo con esto interpretamos que, durante el mes de enero, el cliente C_1 compró 9 artículos del primer tipo, 5 del segundo y 2 del tercero. El segundo cliente compró 3 artículos del primer tipo, 8 del segundo y ninguno del tercero. Observamos que el tercer cliente, durante el mes de enero, no compró ningún artículo y el cuarto cliente compró 6 artículos del primer tipo, 7 del segundo y 1 del tercero.

Durante el mes de febrero se han realizado las siguientes ventas: el primer cliente ha comprado 5 unidades del primer artículo, 2 del segundo y 3 del tercero; el segundo cliente, 6 unidades de cada uno; el tercero sólo 4 unidades del primer artículo y el cuarto no ha comprado nada. Construir la matriz de ventas del mes de febrero:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar las ventas conjuntas del mes de enero y febrero:

$$M + B = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 & 5 \\ 9 & 14 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar la variación de las ventas de febrero en relación con las de enero:

$$B - M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ -6 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

Esto indica que el primer cliente, en el mes de febrero, compró 4 artículos menos del primer tipo que en enero, 3 artículos menos del segundo tipo y 1 artículo más del tercer tipo. (El resto de las interpretaciones siguen este análisis).

...

Si las ventas del mes de marzo han duplicado las de enero y las de abril han cuadruplicado las de marzo, hallar el total de ventas en el primer cuatrimestre.

Para responder a esta última pregunta, debemos determinar, en primer lugar, las matrices C y D que representan las ventas de los meses de marzo y abril, respectivamente:

$$C = 2M = 2 \cdot \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = 4C = 4 \cdot \begin{bmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 14 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 & 40 & 16 \\ 24 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 48 & 56 & 8 \end{bmatrix}$$

$$M + B + C + D = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 14 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 72 & 40 & 16 \\ 24 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 48 & 56 & 8 \end{bmatrix}$$

PARTE B

1. Enuncie en forma simbólica, las condiciones que deben cumplir los elementos de una matriz de orden 4×4 para ser diagonal, escalar y antisimétrica.

2. Defina una operación matricial que represente una combinación lineal de matrices y otra operación matricial que no sea una combinación lineal.

3. Indique las matrices elementales por las que se tuvo que premultiplicar a $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ para obtener $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

   Una vez que encontró las matrices elementales, postmultiplique a A por esas mismas matrices e indique el resultado hallado.

4. Encuentre un ejemplo de matrices cuadradas y rectangulares:

   - Escalonadas no reducidas.
   - Escalonadas reducidas.
   - No escalonadas.

5. Explique y justifique por simple inspección, a partir de la definición de inversa y sus propiedades, por qué las siguientes matrices no son inversibles:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 8 \\ 5 & -10 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

6. Calcule la inversa si es posible de las siguientes matrices y corrobore con un software:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Aplique propiedades de manera tal de colocar la operación en función de la inversa de A y B y en su forma más simplificada, sabiendo que A y B son del mismo orden e inversibles.

$$a)\ \left[\left(2\cdot A\cdot B^T\right)^T\right]^{-1}, \quad b)\ \left[\left(A^{-1}\cdot B+B\right)\cdot B^{-1}\right]^T, \quad c)\ \left[\left(B\cdot A^2\right)^{-1}\right]\cdot B.$$

8. Demuestre:
   - Si A es una matriz de orden $n\times n$ inversible y k es un entero positivo, entonces A^k es inversible y $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
   - Si A es una matriz inversible de orden $n\times n$, entonces A^T es inversible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
   - Si A es una matriz de $m\times n$, $A\cdot A^T$ es simétrica.

9. Modelice el problema a partir de lenguaje matricial:

   Un fabricante de aspas de aerogeneradores o molinos de viento requiere como materiales para la obtención de cada una de las tres aspas (también llamadas palas) de un molino:
   - 0.9 kg de epoxy,
   - 62.2 kg de fibra de vidrio,
   - 4.6 kg de fibra de carbono,
   - 7.2 kg de núcleo de espuma o madera de balsa.

   a) Coloque la información precedente ordenándola en una matriz conveniente a la que se denominará matriz de materiales, denotada como M.

   b) Investigue los costos actuales del kilogramo de cada uno de los materiales y ordénelos en una matriz conveniente que se denominará matriz de costos, denotada como C.

   c) ¿De qué modo relacionaría la información anterior, ordenada en las matrices M y C, para obtener el costo total de un aspa? Obtenga el resultado.

   d) El mismo fabricante presenta un "modelo alternativo de aspas" con características similares a la anterior pero construido con:
   - 1 kg de epoxy,
   - 70.8 kg de fibra de vidrio,
   - 12.7 kg de fibra de carbono,
   - 7.2 kg de núcleo de espuma.

   Obtenga el costo de las aspas de un molino usando matrices.

   e) Una industria "B" fabrica aspas de molinos de viento utilizando compuestos de madera como madera-epoxy, para lo cual se necesita 0.75 kg de este material para la obtención de un aspa (considera el precio del epoxy, ya que el costo de la madera es despreciable). El resto de los materiales son los mismos que el primer fabricante. Obtenga el costo de un aspa considerando el uso de madera-epoxy.

   f) Teniendo en cuenta los tres modelos de aspas posibles, escriba una matriz A con la información obtenida, ordenada de tal modo que al realizar el producto de las matrices A y C el resultado sea una matriz B de orden 3×1 donde se lea el valor de un aspa de un molino según los modelos propuestos por los fabricantes.