2.1 MATRICES

INGENIERÍA Y LCC

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
FACULTAD DE INGENIERÍA

IMPORTANTE

Esta presentación es una guía para la clase. No incluye desarrollo completo de los temas abordados.
De ninguna manera constituye el único material de estudio de la materia.

Definición

Si m y n son de $\mathbb{Z}^+$, definimos una matriz A de $m \times n$ como un arreglo rectangular ordenado de $m.n$ números, dispuestos en m filas y n columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los números en la matriz se llaman elementos, componentes o entradas. El elemento a_{ij} está ubicado en la $i-$ésima fila y en la $j-$ésima columna.

Notación: Las matrices pueden denotarse con letra mayúscula: $A, B, C, \dots$ o con un un elemento representativo: $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}], \dots$

Matrices

1. Una matriz $m \times n$ tiene m renglones y n columnas.
2. Si $m = n$ la matriz se llama **cuadrada de orden** n. En ella,los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ii}, \ldots, a_{nn}$ se denominan elementos de la diagonal principal.
3. En la notación de matrices se usan corchetes o paréntesis: $M = [m_{ij}] = (m_{ij})$. Si es necesario aclarar el orden de la matriz, se puede escribir como $M = [m_{ij}]_{m \times n}$.

Ejemplo

La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

1. es una matriz cuadrada, de orden 2.
2. $a_{12} = 3$
3. $a_{11} = 1$ y $a_{22} = 5$ componen la diagonal principal.

Igualdad de matrices

Definición

Dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son iguales si

1. tienen el mismo tamaño: $m \times n$.
2. $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ y para todo $1 \leq j \leq n$.

Ejemplo

- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix}$ son iguales si, y sólo si $x = 2$.
- Las matrices $M = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $N = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ no son iguales porque tienen distinto tamaño.

Clasificación de matrices

1. **Matriz columna o vector columna:** matriz de $m \times 1$.
   Por ejemplo:
   $$\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}$$
   y puede denotarse con mayúscula (matriz) o con minúscula (vector).
2. **Matriz fila o vector fila:** matriz de $1 \times n$.
   Por ejemplo:
   $$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$
3. **Matriz cero o nula:** es la matriz de $n \times m$ donde todos sus elementos son cero y se designa con O ó $O_{n \times m}$.
4. **Matriz identidad:** $I_n = [d_{ij}]$: Si $i = j$, $d_{ij} = 1$, si $i \neq j$; $d_{ij} = 0$.

Ejemplo

Matriz Identidad

- Si $n = 1,\ I_1 = [1]$
- Si $n = 2,\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Si $n = 3,\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Matriz diagonal D de orden n: Si para todo $i \neq j,\ d_{ij} = 0$.
Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Matriz triangular superior U de orden n: Si $i > j$, $u_{ij} = 0$; con $1 \leqslant i \leqslant n$ y $1 \leqslant j \leqslant n$.
   Por ejemplo:
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

7. Matriz triangular inferior L de orden n: Si $i < j$, $l_{ij} = 0$; con $1 \leqslant i \leqslant n$ y $1 \leqslant j \leqslant n$.
   Por ejemplo:
$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- **SUMA:**

Definición

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ dos matrices de tamaño $m \times n$. Definimos la suma $A + B$ como la matriz de tamaño $m \times n$ dada por

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

Importante: La suma de dos matrices de diferente tamaño no está definida.

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices

Propiedad

Sean A, B, C y O matrices de tamaño $m \times n$. Su suma tiene las siguientes propiedades:

1. *Conmutativa:* $A + B = B + A$
2. *Asociativa:* $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. *Elemento neutro:* $A + O = O + A = A$
4. *Elemento inverso u opuesto aditivo:* $A + (-A) = (-A) + A = O$

Observación: $-A$ designa a la matriz opuesta de A, es del mismo tamaño y cada entrada es el opuesto de las entrada correspondiente en A:

$$-A = [-a_{ij}] \quad \text{si} \quad A = [a_{ij}].$$

- **MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR:**

Definición

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de tamaño $m \times n$ Y sea c un escalar. Definimos la multiplicación de una matriz por un escalar cA como la matriz de tamaño $m \times n$ dada por

$$cA = [ca_{ij}]$$

Observación: Se puede utilizar la expresión $-A$ para el producto escalar $(-1)A$. Así, $A - B = A + (-1)B$.

Ejemplo

1. $5\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 25 \end{bmatrix}$
2. $(-3)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -9 & 0 \\ -6 & -15 & 21 \end{bmatrix}$

Propiedades de la multiplicación por un escalar

Propiedad

Sean A y B matrices de tamaño $m \times n$, k y s escalares. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Distributiva de multiplicación por un escalar respecto de la suma de matrices:* $k.(A + B) = k.A + k.B$
2. *Distributiva de la suma de escalares respecto de la multiplicación por una matriz* $(k + s).A = k.A + s.A$
3. *Asociatividad mixta* $(k.s).A = k.(s.A) = s.(k.A)$
4. *Propiedad modular:* $1.A = A$

- **MULTIPLICACIÓN DE MATRICES:**

Definición

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de tamaño $m \times n$ y sea $B = [b_{ij}]$ una matriz de tamaño $n \times p$. Definimos el producto AB como la matriz de tamaño $m \times p$ dada por

$$AB = [c_{ij}]$$

donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Importante: El producto de dos matrices está definido sólo cuando el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones de la segunda matriz.

Ejemplo

El producto AB es

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 6 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$$

Realicemos el producto BA.

Propiedades

Propiedad

Sean A, B y C matrices de tamaños tales que los productos indicados estén definidos y k un escalar. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Asociativa de la multiplicación de matrices:* $(AB)C = A(BC)$
2. *Distributiva de la multiplicación de matrices respecto de la adición:*

$$A(B + C) = AB + AC \qquad (B + C)A = BA + CA$$

3. *Elemento neutro: Si A es de orden n, $AI_n = I_nA = A$.*
4. *Elemento absorbente:* $AO = O$ *y también* $OA = O$
5. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
6. *Si A es $m \times n$ entonces:* $AI_n = A$ *y también* $I_mA = A$

Importante: *En general, la multiplicación de matrices NO es conmutativa.*

Operaciones con matrices

- **POTENCIA DE UNA MATRIZ CUADRADA:**

Definición

La potencia enésima (o n – ésima) de una matriz cuadrada A de orden m se denota como A^n y se define de la siguiente forma:

- $A^0 = I_m$
- $A^1 = A$
- $A^n = AA^{n-1} = AA \dots A$ (con n factores)

Teorema

Sea A una matriz cuadrada y $j, k \in \mathbb{N}$. Entonces

- $A^j A^k = A^{j+k}$
- $(A^j)^k = A^{jk}$

- **MATRIZ TRANSPUESTA:**

Definición

Sea A una matriz $m \times n$. La transpuesta de A, denota como A^T, se define como la matriz $n \times m$ que se obtiene al escribir las columnas de A como filas. Para cada $1 \leqslant i \leqslant n$ y cada $1 \leqslant j \leqslant m$,

$$a_{ij}^T = a_{ji}$$

Ejemplo

Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, entonces

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema

Sean A y B matrices de tamaños tales que las operaciones indicadas en cada caso están bien definidas y k un escalar.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(kA)^T = k(A^T)$
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. $(A^n)^T = (A^T)^n$, $n \in \mathbb{N}$

Matriz simétrica

Definición

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada. Decimos que A es una matriz simétrica si

$$A = A^T$$

es decir, si para todo i, j, $a_{ij} = a_{ji}$.

Ejemplo

La matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ es simétrica.

Matriz simétrica

Teorema

1. *La suma de matrices simétricas, es simétrica.*
2. *Toda matriz diagonal es simétrica.*
3. *Si A es simétrica, A^n es simétrica, con $n \in \mathbb{N}$.*
4. *Si A es una matriz simétrica de $m \times m$ y B es una matriz de $m \times n$, entonces $B^T AB$ es simétrica.*
5. *Si A y B son simétricas de orden n y AB es simétrica entonces $AB = BA$*
6. *El producto de una matriz por su traspuesta es una matriz simétrica.*
7. *La suma de toda matriz cuadrada y de su traspuesta es simétrica.*

Importante: El producto de matrices simétricas no es, en general, una matriz simétrica.

Demostrar 1

Matriz simétrica

Teorema

La suma de matrices simétricas, es simétrica.

Demostración

Sean A y B dos matrices simétricas de orden n, es decir que verifican:

$$A = A^T \qquad B = B^T.$$

Se analiza qué sucede con la matriz que resulta de sumar las matrices consideradas:

$$\begin{aligned} A + B &= A^T + B^T && \text{ya que cada matriz es simétrica (hipótesis)} \\ &= (A + B)^T && \text{por propiedad de la transpuesta de suma de matrices} \end{aligned}$$

Luego, la matriz obtenida al sumar A y B cumple con la definición de matriz simétrica, o sea, $A + B$ es simétrica. ∎

Matriz antisimétrica

Definición

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada. Decimos que A es una matriz antisimétrica si

$$A^T = -A$$

es decir, para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n$,

$$a_{ji} = -a_{ij}$$

Ejemplo

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

es antisimétrica.

Matriz antisimétrica

Teorema

Si A es antisimétrica entonces todos los elementos de la diagonal son iguales a 0.

Teorema

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces:

1. $A – A^T$ *es antisimétrica.*
2. $A + A^T$ *es simétrica.*
3. *Puede ser escrita en forma única como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica:*

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

Demostrar 1

Matriz antisimétrica

Teorema

$A – A^T$ es antisimétrica, cualquiera sea A de orden n.

Demostración

Sea A una matriz cualquiera cuadrada de orden n y a_{ji} un elemento cualquiera de ella.
Se designa $C = A - A^T$ y se analiza su elemento c_{ji}:

$$\begin{aligned}
c_{ji} &= a_{ji} - a^T_{ji} && \\
&= a_{ji} - a_{ij} && \text{por definición de matriz transpuesta.} \\
&= -(a_{ij} - a_{ji}) && \text{por distributiva en números reales.} \\
&= -(a_{ij} - a^T_{ij}) && \text{por definición de matriz transpuesta.} \\
&= -c_{ij}
\end{aligned}$$

Luego, los elementos de $C = A - A^T$ verifican la condición que permite asegurar que ella es una matriz antisimétrica. ■

Traza de una matriz

Definición

La traza de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n, se denota $tr(A)$, es la suma de los elementos de la diagonal principal. Es decir,

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Teorema

Sean A y B matrices de orden n y sea c un escalar. Entonces, valen las siguientes propiedades.

1. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
2. $tr(I_n) = n$
3. $tr(cA) = c\, tr(A)$
4. $tr(A^T) = tr(A)$
5. $tr(AB) = tr(BA)$

Inversa

Definición

Una matriz A de orden n es inversible (o no singular o regular) si exsite una matriz B de orden n tal que

$$AB = BA = I_n$$

La matriz B se denomina inversa de A.
La matriz A de orden n que no tenga inversa se llama no inversible (o singular).

- Las matrices no cuadradas no tienen inversa.
- No todas las matrices cuadradas tienen inversa.

Ejemplo

1. La inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ es $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
2. Determinar si existe inversa de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
3. Para toda matriz A de orden 2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, verificar que A es inversibe si y sólo si $ad - bc \neq 0$ y que su inversa es

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Unicidad de la inversa

Teorema

Si A es cualquier matriz inversible de orden n, entonces su inversa es única.

Demostración

Sea A una matriz cualquiera inversible de orden (n), o sea, existe B tal que $A\,B = B\,A = I_n$.
Supongamos además, que A tiene más de una matriz inversa, C y $C \neq B$. Como C es inversa de A, verifica que $A\,C = C\,A = I_n$.

$$
\begin{aligned}
B &= B\,I_n && \text{por ser } I_n \text{ la identidad del producto.}\\
&= B\,(A\,C) && \text{dado que } C \text{ es inversa de } A.\\
&= (B\,A)\,C && \text{por asociativa del producto.}\\
&= I_n\,C && \text{por ser } B \text{ inversa de } A:\\
&= C && \text{por ser } I_n \text{ la identidad del producto.}
\end{aligned}
$$

Luego, $B = C$, lo que contradice el supuesto de $B \neq C$.
La contradiccción viene de suponer que A tiene más de una inversa.
Por lo tanto la matriz inversible A tiene sólo una inversa. ■

Unicidad de la inversa

Teorema

Si A es una matriz inversible, entonces su inversa es única.

- Ahora es posible hablar de "la" inversa de A, que se denota por A^{-1}.
- Resulta,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Propiedades de la inversa

Teorema

Sean A y B dos matrices inversibles del mismo tamaño, entonces

1. AB *es una matriz inveribsle y la inversa de* AB *es* $B^{-1}A^{-1}$, *es decir,*
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
2. A^{-1} *es una matriz inversible y* $(A^{-1})^{-1} = A$
3. *Para todo* $n \in \mathbb{N}_0$, A^n *es una matriz inversible y* $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
4. *Para todo escalar* $c \neq 0$, cA *es una matriz inversible y* $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$
5. A^T *es una matriz inversible y* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
6. $tr(B^{-1}AB) = tr(A)$ *para toda matriz* B *no singular.*

Demostrar $1, 2, 4$. Verificar 3.

Demostración de propiedades de la inversa

Teorema

Si A y B son matrices inversibles del mismo orden entonces AB es una matriz inverisble y la inversa de AB es $B^{-1}A^{-1}$.

Demostración

Las matrices A y B tienen el mismo orden (n) y son inversibles, o sea, existen A^{-1} y B^{-1} tales que:

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_n \qquad\qquad B\,B^{-1} = B^{-1}\,B = I_n$$

$$\bullet\,(AB)\,(B^{-1}A^{-1}) \begin{array}{ll} = A(BB^{-1})A^{-1} & \text{asociativa del producto de mat.} \\ = A\,I_n\,A^{-1} & \text{por ser } B \text{ inversible} \\ = A\,A^{-1} & \text{por ser } I_n \text{ matriz identidad.} \\ = I_n & \text{por ser } A \text{ inversible} \end{array}$$

Luego, $B^{-1}A^{-1}$ se comporta como la inversa de AB a derecha.

• Análogamente se prueba que se comporta como inversa a izquierda.

Por lo tanto, AB tiene como inversa (única) a la matriz $B^{-1}A^{-1}$. ■

Demostración de propiedades de la inversa

Teorema

Si A es una matriz inversible entonces A^{-1} es inverisble y su inversa es A : $(A^{-1})^{-1} = A$.

Demostración

Sea A una matriz inversible de orden n y sea A^{-1} su inversa que cumple:

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_n$$

- $A^{-1}\,A \quad = I_n$ por definición de matriz inversa
- $A\,A^{-1} \quad = I_n$ por definición de matriz inversa

Luego, la inversa de A^{-1} es A, ya que al post y pre multiplicarla por ella se obtiene la matriz identidad de orden n. ■

Demostración de propiedades de la inversa

Teorema

Si A es matriz inversible de orden n y c es un número real no nulo, entonces (cA) es inveribible y su inversa es $\frac{1}{c}A^{-1}$, o sea $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.

Demostración

Sea A matriz inversible de orden n y $c \in \mathbb{R} - \{0\}$. Evaluamos qué sucede al multiplicar cA por la que se sugiere como su inversa: $\frac{1}{c}A^{-1}$

- $(cA)\left(\frac{1}{c}A^{-1}\right) = \frac{1}{c}(cA)A^{-1}$ por prop. de producto por escalar
  $= \left(\frac{1}{c}c\right)A\,A^{-1}$ por asociatividad mixta
  $= 1\,(A\,A^{-1})$ por inversos en multipl. de reales
  $= 1I_n$ por definición de inversa
  $= I_n$ por propiedad modular

- Análogamente se prueba que: $\left(\frac{1}{c}A^{-1}\right)(cA) = I_n$. Luego cA es inversible y su inversa es $\frac{1}{c}A^{-1}$. ∎

Operaciones elementales

Existen tres tipos de Operaciones Elementales que pueden realizarse en las filas de una matriz.

1. Intercambiar dos filas.
2. Multiplicar una fila por una constante diferente de cero.
3. Sumar a una fila, un múltiplo de otra fila.

Definición

Una matriz de orden n se denomina matriz elemental si se puede obtener a partir de la matriz identidad I_n al efectuar una sola operación elemental en las filas.

Operaciones elementales

Ejemplo

Las siguientes son matrices elementales

- Intercambiar la segunda fila con la tercera fila. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Multiplicar por -3 la segunda fila $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$
- Sumar 5 veces la tercera fila a la primera. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Propiedades de las Matrices Elementales

Teorema

1. *La pre multiplicación de una matriz elemental por una matriz cualquiera A, da por resultado una matriz B que tiene la misma operación elemental de filas que la elemental.*
2. *La post multiplicación de una matriz elemental por una matriz cualquiera A, da por resultado una matriz B que tiene la misma operación elemental de columnas que la elemental. Observación: En general, trabajaremos con la propiedad $1)$.*
3. *Toda matriz elemental es inversible, y su inversa también es una matriz elemental.*

Ejemplo

Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ y la matriz elemental $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. El producto EA es: $EA = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ que es la misma matriz que se obtiene al sumar 5 veces la tercera fila a la primera de A.

Observación: Si se aplica una operación elemental a las filas de I para producir una matriz elemental E, entonces hay otra operación en las filas de E que permite obtener a I.

Matrices equivalentes

Definición

Sean A y B matrices de $m \times n$. La matriz B es equivalente por renglones con A si existe un número finito de matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tal que

$$B = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A$$

Se denota $B \sim A$

Importante: Si $B \sim A$, $A \sim B$. Se dice entonces que A *y* B *son equivalentes.*

Ejemplo

La matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ es equivalente a I_2.

Matriz escalonada y escalonada reducida

Definición

Se dice que una matriz es **escalonada**, si satisface los siguientes requisitos:

1. Si una fila no consta exclusivamente de ceros, entonces el primer elemento diferente de cero en la fila es 1.
2. Si hay filas que constan exclusivamente de ceros, entonces están agrupados en la parte inferior de la matriz.
3. Si las filas i e $i+1$ son dos filas sucesivas cualesquiera que no constan exclusivamente de ceros, entonces, el primer número no nulo en la fila $i+1$ debe estar a la derecha del primer número no nulo en la fila i.

Toda matriz que, además, cumpla con la condición

4. Todas las columnas que contienen el primer elemento diferente de cero de alguna fila, tienen ceros en todas las posiciones restantes. Se dice que es una matriz en **forma escalonada reducida.**

Matriz escalonada y escalonada reducida

Ejemplo

Las siguientes matrices tienen forma escalonada por filas.

- $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
- $$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las siguientes matrices tienen forma escalonada reducida.

- $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La siguiente matriz no está en forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Rango

Propiedad

Sea A una matriz cualquiera.
El número k de filas no nulas y la cantidad de columnas que contienen el primer elemento distinto de cero (leído de izquierda a derecha) en cada una de esas filas es el mismo en cualquier matriz escalonada obtenida a partir de una matriz A, independientemente de la secuencia de operaciones elementales de fila que se haya aplicado.

Definición

El rango de una matriz es el número de filas diferentes de cero en cualquier matriz escalonada A' obtenida a partir de A mediante operaciones elementales de fila.
Se denota $\rho(A)$ y se lee *rango de A*.

Observación: El número k, del que habla la propiedad, tampoco cambia en la matriz escalonada reducida de A. Por lo tanto, en la definición de rango se puede sustituir "escalonada" por "escalonada reducida".

Rango

Ejemplo

Determinar el rango de las matrices

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Método para encontrar la inversa

Propiedad

Sea A de orden n. $A \sim I_n$ si y sólo si A es inversible.

Demostración

Se demuestra que si $A \sim I_n$ entonces A es inversible.
Por hipótesis, existen k matrices elementales tales que:

$$(E_1 E_2 \dots E_k)A = I_n$$

Se sabe que las matrices elementales son inversibles (prop.). Pre multiplicando ambos miembros de la ecuación por $E_k^{-1}, \dots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\left(E_k^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1}\right)(E_1 E_2 \dots E_k)A &= \left(E_k^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1}\right) I_n \\
E_k^{-1} \dots E_2^{-1}(E_1^{-1} E_1) E_2 \dots E_k A &= E_k^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1} \\
E_k^{-1} \dots E_2^{-1}\, I_n\, E_2 \dots E_k A &= E_k^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1} \\
E_k^{-1} \dots E_2^{-1} E_2 \dots E_k A &= E_k^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1} \\
A &= E_k^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1}
\end{aligned}$$

Método para encontrar la inversa

Propiedad

Sea A de orden n. $A \sim I_n$ si y sólo si A es inversible.

Demostración

Luego, la matriz A es inversible por ser el producto de las matrices inversibles $E_k^{-1}, \ldots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$.

Para demostrar la proposición recíproca (y con eso completar la prueba de la equivalencia que enuncia el teorema), se requiere una propiedad que no hemos analizado en este curso. Por ese motivo, se omite aquí la demostración de que:
Si A es inversible entonces $A \sim I_n$.
Aunque con otras herramientas se puede probar su validez. ■

Método para encontrar la inversa

Propiedad

Sea A de orden n.
$A \sim I_n$ *si y sólo si* A *es inversible.*

Aplicando la propiedad anterior repetidas veces, se puede determinar la inversa de A.

$$\left[\ A \ \middle|\ I\ \right] \sim \left[\ I\ \middle|\ A^{-1}\ \right]$$

Ejemplo

Determinar, si existe, la matriz inversa de

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

Rango e inversa

Teorema

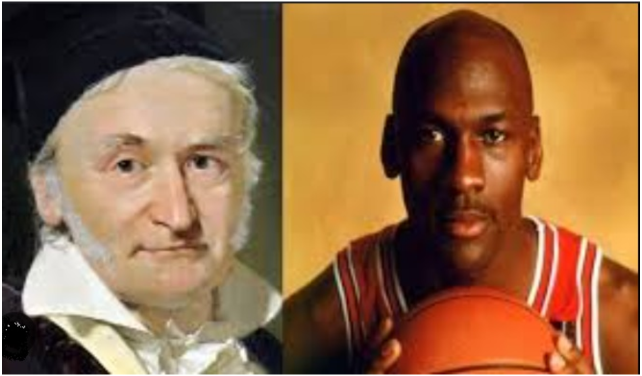
La matriz A de orden n es inversible si y sólo si $\rho(A) = n$.

Ejemplo

Determinar, a simple vista, el rango de las siguientes matrices e indicar si son inversibles.

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

Método de Gauss-Jordan



Método de Gauss-Jordan

Este método permite determinar el rango de una matriz, aplicando un número finito de operaciones elementales a la filas de la matriz.

Ejemplo

Mediante el método de Gauss-Jordan, obtener el rango de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Inversa de matrices por Gauss-Jordan

Este método ayuda a determinar la existencia de la inversa o no y en caso afirmativo se la obtiene.

Ejemplo

Determinar la inversa, si existe, de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Consideraciones finales

Sea el conjunto: $\mathcal{M}$ de todas las matrices A de un mismo orden $m \times n$ y escalares en $\mathbb{R}$.

1. La suma de matrices de $\mathcal{M}$, que verifica las propiedades:
   - Asociativa
   - Conmutativa
   - Existencia de elemento neutro para la suma
   - Existencia de elementos opuestos para la suma
2. Multiplicación de una matriz por un escalar, que verifica las propiedades:
   - Distributiva de multiplicación por un escalar respecto de la suma de matrices
   - Distributiva de la suma de escalares respecto de la multiplicación por una matriz
   - Asociatividad mixta
   - Propiedad modular.

Se dice que $\mathcal{M}$ es un ESPACIO VECTORIAL REAL, con esas operaciones. Los "vectores" son las matrices A y los escalares son números reales.

Consideraciones finales

Si A_1, A_2, $\ldots$, A_n son matrices del mismo tamaño y $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son escalares reales, entonces una expresión de la forma

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \ldots + c_n A_n$$

es **una** combinación lineal de A_1, A_2, $\ldots$, A_n.

Ejemplo

Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1. $2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es una combinación lineal de A y B.
2. $0 \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es una combinación lineal de A y B que tiene como resultado la matriz $O_{2\times 3}$.