Unidad 4.B. Control óptimo cuadrático

Dr. Ing. Hernán Garrido

Control y sistemas
Universidad Nacional de Cuyo, Facultad de Ingeniería

carloshernangarrido@gmail.com

Febrero de 2025

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

Contenidos

1. Introducción
2. Repaso de control en espacio de estados y del concepto de controlabilidad
3. Control en espacio de estados
4. Cálculo de ganancia de realimentación y ganancia de referencia
5. Ruido y perturbaciones
6. Acción integral
7. Regulador lineal cuadrático (LQR)

1 Introducción

2 Repaso de control en espacio de estados y del concepto de controlabilidad

3 Control en espacio de estados

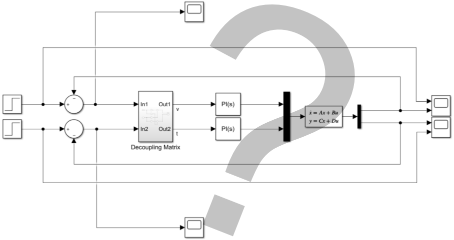
4 Cálculo de ganancia de realimentación y ganancia de referencia

5 Ruido y perturbaciones

6 Acción integral

7 Regulador lineal cuadrático (LQR)

- Los controladores del tipo PID, y en particular los PI son los más usados en la industria.
- Sin embargo, sólo sirven para plantas SISO:
  - Una salida: la variable controlada
  - Una entrada: la acción de control
- En sistemas MIMO donde no haya gran acoplamiento cruzado entre entradas y salidas:



Se pueden usar múltiples PID con cuidado:

- Simulando o experimentando en múltiples escenarios en busca de efectos no deseados.
- Revisando el ajuste de todos los PID, cada vez que se modifica uno de ellos o hay un cambio en la planta.

1 Introducción

2 Repaso de control en espacio de estados y del concepto de controlabilidad

3 Control en espacio de estados

4 Cálculo de ganancia de realimentación y ganancia de referencia

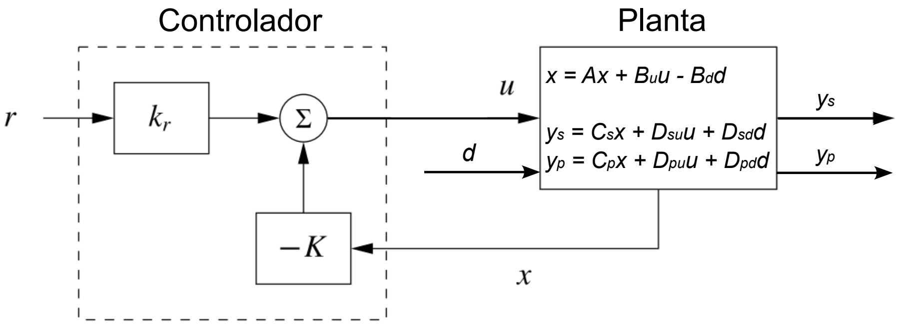
5 Ruido y perturbaciones

6 Acción integral

7 Regulador lineal cuadrático (LQR)

Repaso de control en espacio de estados y del concepto de controlabilidad

... the state may be regarded as a kind of information storage or memory or accumulation of past causes. We must, of course, demand that the set of internal states **x** be sufficiently rich to carry all information about the past history of **x** to predict the effect of the past upon the future. We do not insist, however, that the state is the least such information although this is often a convenient assumption. *R. E. Kalman, P. L. Falb and M. A. Arbib, Topics in Mathematical System Theory, 1969.*



Controlabilidad y alcanzabilidad: Definiciones

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B_u}\mathbf{u}(t), \mathbf{d}(t) = \mathbf{0}$$

Estabilizable (*stabilizability*)

$\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \exists \mathbf{u} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m : \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \wedge \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$

Existe una acción de control que puede llevar el estado al origen.

Controlable (*controllability*)

$\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \exists \mathbf{u} : [0, T] \to \mathbb{R}^m : \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \wedge \mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$

Existe una acción de control, de duración finita, que puede llevar el estado al origen.

Alcanzable (*reachability*)

$\forall (\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_f \in \mathbb{R}^n), \exists \mathbf{u} : [0, T] \to \mathbb{R}^m : \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \wedge \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_f$

Existe una acción de control, de duración finita, que puede llevar el estado a cualquier condición final.

Controlabilidad y alcanzabilidad: Test para sistemas LTI de tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B_u}\mathbf{u}(t), \mathbf{d}(t) = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B_u}\mathbf{u}(t)$$

Test de alcanzabilidad

$$\mathbf{W}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{B_u} & \mathbf{A}\mathbf{B_u} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B_u} \end{bmatrix}_{n \times mn}$$

Alcanzable $\iff \operatorname{rank}(\mathbf{W}_r) = n$ (tiene rango completo)

En general

alcanzabilidad $\Rightarrow$ controlabilidad $\Rightarrow$ estabilizabilidad $\Leftarrow$ estabilidad

En sistemas LTI de tiempo continuo

alcanzabilidad $\iff$ controlabilidad $\Rightarrow$ estabilizabilidad $\Leftarrow$ estabilidad

Controlabilidad y alcanzabilidad: Ejemplo de inestable, no controlable pero estabilizable

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u(t), \qquad \begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0)e^{t} + \int_0^t u(\tau)d\tau \\ x_2(t) &= x_2(0)e^{-t}\end{aligned}$$

- Estabilidad

$$\mathrm{eig}(\mathbf{A}) = \{1, -1\} \Rightarrow \Re(1) > 0 \Rightarrow \mathbf{A} \text{ inestable}$$

- Controlabilidad

$$\mathbf{W}_r = \left[\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rank}(\mathbf{W}_r) = 1 < 2 = n \Rightarrow (\mathbf{A}, \mathbf{B_u}) \text{ no controlable}$$

- Estabilizabilidad

$$\begin{aligned} u(t) &= -2x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) = x_1(t) + u(t) &= -x_1(t) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0)e^{-t} \\ x_2(t) &= x_2(0)e^{-t}\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \forall \mathbf{x}_0 &= \mathbf{x}(0) \\ \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{0}\end{aligned} \Rightarrow (\mathbf{A}, \mathbf{B_u}) \text{ estabilizable}$$

Corolario: Si todos los modos no controlables son estables, el sistema es estabilizable.

Controlabilidad y alcanzabilidad: Ejemplo de controlable pero no alcanzable

- En tiempo discreto

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{k} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \qquad \begin{aligned} x_1[k+1] &= x_1[k] + u[k] \\ x_2[k+1] &= 0 \end{aligned}$$

  - Alcanzabilidad

$$\mathbf{W}_r = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rank}(\mathbf{W}_r) = 1 < 2 = n \Rightarrow (\mathbf{A_d}, \mathbf{B_u}) \text{ no alcanzable}$$

  - Controlabilidad

$$u[k] = -x_1[k] \Rightarrow \begin{aligned} x_1[k+1] &= x_1[k] - x_1[k] = 0 \\ x_2[k+1] &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\forall \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}[0] \\ &\mathbf{x}[1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \Rightarrow (\mathbf{A_d}, \mathbf{B_u}) \text{ controlable}$$

- En tiempo continuo (sistemas LTI):
  Controlable $\iff$ Alcanzable

1 Introducción

2 Repaso de control en espacio de estados y del concepto de controlabilidad

3 Control en espacio de estados

4 Cálculo de ganancia de realimentación y ganancia de referencia

5 Ruido y perturbaciones

6 Acción integral

7 Regulador lineal cuadrático (LQR)

Control en espacio de estados

- Control para estabilizar una planta
  - Objetivo: Hacer que $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ cuando $\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$ y las perturbaciones sean nulas.
  - Implementación: Con realimentación completa del vector de estado

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B_u}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y_p}(t) = \mathbf{C_p}\mathbf{x}(t) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B_u}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{B_u})\mathbf{x}$$

$\mathbf{A}$ puede ser inestable (hay raíces de $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ tienen parte real positiva), pero se puede elegir $\mathbf{K}$ para que $\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{B_u}$ sí lo sea (todas las raíces de $|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{B}_{\mathrm{u}})|$ tengan parte real negativa).

- Control para regular una planta estabilizada
  - Objetivo: Hacer que $\mathbf{y_p}(t) \to \mathbf{r}(t)$ cuando las perturbaciones sean nulas.
  - Implementación: Sistema a lazo cerrado con ganancia $\mathbf{I}$, al menos para $t \to \infty, s \to 0$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{k_r}\mathbf{r}(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \Rightarrow \mathbf{U}(s) = \mathbf{k_r}\mathbf{R}(s) - \mathbf{K}\mathbf{X}(s)$$

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B_u}(\mathbf{k_r}\mathbf{R}(s) - \mathbf{K}\mathbf{X}(s)) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) - \mathbf{B_u}\mathbf{K}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B_u}\mathbf{k_r}\mathbf{R}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B_u}\mathbf{K}))\mathbf{X}(s) = \mathbf{B_u}\mathbf{k_r}\mathbf{R}(s) \Rightarrow \mathbf{Y_p}(s)\mathbf{R}^{-1}(s) = \frac{\mathbf{Y_p}(s)}{\mathbf{R}(s)} = \mathbf{C_p}(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B_u}\mathbf{K}))^{-1}\mathbf{B_u}\mathbf{k_r}$$

1 Introducción

2 Repaso de control en espacio de estados y del concepto de controlabilidad

3 Control en espacio de estados

4 Cálculo de ganancia de realimentación y ganancia de referencia

5 Ruido y perturbaciones

6 Acción integral

7 Regulador lineal cuadrático (LQR)

Asignación de polos: Encontrar $\mathbf{K}$ tal que las raíces de

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{B_u})| = 0$$

sean prescritas como $s_0, s_1, ..., s_{n-1}$

Método de Ackermann

Si el par $\mathbf{A}, \mathbf{B_u}$ es controlable, se puede plantear un sistema de ecuaciones donde las ganancias (elementos de $\mathbf{K}$) son incógnitas. Se puede resolver directamente con Matlab mediante las funciones *acker* o *place* de Matlab o del paquete control en python (pip install control).

Ganancia de referencia (ganancia de pre-alimentación)

Ganancia para seguir una referencia, al menos para $t \to \infty$: Encontrar $\mathbf{k_r}$ tal que

$$\left.\frac{\mathbf{Y_p}(s)}{\mathbf{R}(s)}\right|_{s=0} = \mathbf{C_p}(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B_u}\mathbf{K}))^{-1}\mathbf{B_u}\mathbf{k_r}\Big|_{s=0} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{k_r} = (\mathbf{C_p}(0 \cdot \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B_u}\mathbf{K}))^{-1}\mathbf{B_u})^{-1}$$

Método de la ganancia en régimen estacionario de la planta estabilizada

La acción de control resultante es:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{k_r}\mathbf{r}(t)$$

donde la ganancia de pre-alimentación $\mathbf{k_r}$ se calcula como:

$$\mathbf{k_r} = -(\mathbf{C_p}(\mathbf{A} - \mathbf{B_u}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B_u})^{-1}$$

para lo cual $\mathbf{B_u}$ debe tener tantas columnas como filas tenga $\mathbf{C_p}$. Es decir, debe haber al menos un actuador por cada variable que se quiera seguir.

1 Introducción

2 Repaso de control en espacio de estados y del concepto de controlabilidad

3 Control en espacio de estados

4 Cálculo de ganancia de realimentación y ganancia de referencia

5 Ruido y perturbaciones

6 Acción integral

7 Regulador lineal cuadrático (LQR)

Ruido y perturbaciones

Ruido en los sensores

Se modelan normalmente en forma aditiva:

$$\mathbf{y_s}(t) = \mathbf{C_s}\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t)$$

donde $\mathbf{n}(t)$ debe ser consistente con las especificaciones del fabricante del sensor y demás particularidades de la aplicación. Ejemplos: cuantización, ruido blanco, ruido de línea, de derivada numérica.

Perturbaciones sobre la planta

Se modelan normalmente en forma aditiva:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B_u}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B_d}\mathbf{d}(t)$$

donde $\mathbf{d}(t)$ representa todas las acciones que excitan a la planta y no son definidas por el controlador. Ejemplos: gravedad, ruido mecánico, viento, sismo, vandalismo.

1 Introducción

2 Repaso de control en espacio de estados y del concepto de controlabilidad

3 Control en espacio de estados

4 Cálculo de ganancia de realimentación y ganancia de referencia

5 Ruido y perturbaciones

6 Acción integral

7 Regulador lineal cuadrático (LQR)

Acción integral

Debido a:

- errores en la calibración de los parámetros del modelo de la planta
- perturbaciones con componente de estado estacionario
- ruidos con componente de estado estacionario

puede aparecer *error de estado estacionario* entre $\mathbf{y_p}(t)$ y $\mathbf{r}(t)$.

Solución

Aumentar el vector de estado $\mathbf{x}(t)$ con una variable $z_i(t)$ por cada referencia a seguir, tal que:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{y_p}(t) - \mathbf{r}(t)$$

es decir, que el nuevo estado incluye la integral del error de cada referencia a seguir.

Acción integral

El sistema aumentado es:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B_u}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B_d}\mathbf{d}(t)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{y_p}(t) - \mathbf{r}(t) = \mathbf{C_p}\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)$$

que en forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C_p} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{\text{aug}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B_u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\text{aug}}} \mathbf{u}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B_d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\mathbf{d},\text{aug}}} \mathbf{d}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B_r}} \mathbf{r}(t)$$

- Nueva variable de estado: $\mathbf{z}(t) = \int (\mathbf{y_p}(t) - \mathbf{r}(t))\mathrm{d}t$
- Matriz aumentada $\mathbf{A}_{\text{aug}}$ de dimensión $(n+p) \times (n+p)$
- Permite eliminar error en régimen permanente

Diseño del controlador integral (con seguimiento de referencia)

Ley de control para estabilizar y controlar error en estado estacionario:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - \mathbf{K_i}\mathbf{z}(t) = -\begin{bmatrix}\mathbf{K} & \mathbf{K_i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t)\end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{K}_{\text{aug}} = \begin{bmatrix}\mathbf{K} & \mathbf{K_i}\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_{\text{aug}} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t)\end{bmatrix} \quad \text{con lo cual:} \quad \mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_{\text{aug}}\mathbf{x}_{\text{aug}}$$

Paso 1: Obtener $\mathbf{K}_{\text{aug}}$ mediante:

- Asignación de polos al sistema aumentado, cuyo polinomio característico es $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\text{aug}} + \mathbf{B}_{\text{aug}}\mathbf{K}_{\text{aug}}) = 0$, o LQR

Paso 2: Extraer $\mathbf{K}$ y $\mathbf{K_i}$ de $\mathbf{K}_{\text{aug}}$

Paso 3: Calcular la ganancia de pre-alimentación mediante: $\mathbf{k_r} = -(\mathbf{C_p}(\mathbf{A} - \mathbf{B_u}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B_u})^{-1}$

Ley de control completa

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - \mathbf{K_i}\mathbf{z}(t) + \mathbf{k_r}\mathbf{r}(t)$$

1 Introducción

2 Repaso de control en espacio de estados y del concepto de controlabilidad

3 Control en espacio de estados

4 Cálculo de ganancia de realimentación y ganancia de referencia

5 Ruido y perturbaciones

6 Acción integral

7 Regulador lineal cuadrático (LQR)

Regulador lineal cuadrático (LQR): Motivación

Motivación:

La ubicación de los polos del polinomio característico a lazo cerrado (mediante *acker* o *place*):

- Permite definir la definir la dinámica *discrecionalmente* a partir de especificaciones temporales.
- Pero, en la práctica siempre se debe chequear que las acciones de control sean *económicamente* razonables.
  - Esto lleva a muchas iteraciones de diseño en proyectos reales.
- Además, no ofrece discrecionalidad sobre la autoridad de control en cada variable, grado de libertad o modo dinámico.

Solución:

Plantear un problema de optimización que pondere:

- Autoridad sobre cada variable de estado, o combinaciones entre ellas. Ejemplos
  - posición, velocidad, integral del error
  - distancia entre efectores
- Intensidad de las acciones de control, o combinaciones entre ellas:
  - voltaje, corriente
  - potencia

Regulador lineal cuadrático (LQR): Formulación

Minimizamos la función de costo cuadrático:

$$\tilde{J} = \int_0^\infty \left(\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{Q}_u \mathbf{u} \right) \mathrm{d}t \tag{1}$$

donde:

- $\mathbf{Q}_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Q}_x \succeq 0$ (matriz simétrica y semidefinida positiva)
- $\mathbf{Q}_u \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\mathbf{Q}_u \succ 0$ (matriz simétrica y definida positiva)
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: Vector de estados
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$: Vector de acciones de control

Esta formulación establece un balance entre:

- **Regulación de estados**: $\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{x}$ penaliza las desviaciones del estado respecto al origen
- **Economía de control**: $\mathbf{u}^T \mathbf{Q}_u \mathbf{u}$ penaliza el uso excesivo de acciones de control

Regulador lineal cuadrático (LQR): Interpretación

$$J = \int_0^{\infty} \left(\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{Q}_u \mathbf{u} \right) \mathrm{d}t \tag{2}$$

La matriz $\mathbf{K}$ que minimiza J aplicando la ley de control $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ se encuentra resolviendo una ecuación de Ricatti. En la práctica simplemente usamos la función *lqr* de Matlab o del paquete *control* en python.[1]

Lo importante es definir correctamente $\mathbf{Q}_u$ y $\mathbf{Q}_x$:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = q_{11}x_1^2 + 2q_{12}x_1x_2 + 2q_{13}x_1x_3 + q_{22}x_2^2 + 2q_{23}x_2x_3 + q_{33}x_3^2 \tag{3}$$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{Q}_u \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = r_{11}u_1^2 + 2r_{12}u_1u_2 + r_{22}u_2^2 \tag{4}$$

[1] Se puede trabajar con $\mathbf{x}_{aug}$, generando $\mathbf{Q}_{xaug}$, para encontrar $\mathbf{K}_{aug}$

Regla de Bryson (Bryson y Ho, 1975)

$$\mathbf{Q_x} = \begin{bmatrix} 1/x_{1\text{typ}}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/x_{2\text{typ}}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/x_{n\text{typ}}^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q_u} = \begin{bmatrix} 1/u_{1\text{typ}}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/u_{2\text{typ}}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/u_{n\text{typ}}^2 \end{bmatrix}$$

Regla de Bryson (Bryson y Ho, 1975) adaptable

$$\mathbf{y_p} = \mathbf{C_p x}$$

$$\mathbf{Q_p} = \begin{bmatrix} 1/y_{p1\mathrm{typ}}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/y_{p2\mathrm{typ}}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/y_{pn\mathrm{typ}}^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q_x} = \mathbf{C_p}^\top \mathbf{Q_p C_p}$$

La matriz $\mathbf{C_p}$ permite construir cualquier combinación lineal de los estados.

Regulador lineal cuadrático (LQR): Regla de Bryson adaptable

Ejemplo 1: Dado $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\mathsf{T}$, minimizar $|x_1 + x_2|$:

$$\mathbf{y_p} = \mathbf{C_p}\mathbf{x} = y_p = x_1 + x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C_p} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_p} = \begin{bmatrix} q_p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_x = \mathbf{C_p}^\mathsf{T}\mathbf{Q_p}\mathbf{C_p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_p & q_p \\ q_p & q_p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_x\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_p & q_p \\ q_p & q_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = q_p x_1^2 + q_p x_1 x_2 + q_p x_2 x_1 + q_p x_2^2$$

$$= q_p(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) = q_p(x_1 + x_2)^2$$

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_x\mathbf{x} + \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_u\mathbf{u})\, dt = \int_0^\infty \left(q_p(x_1 + x_2)^2 + \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_u\mathbf{u}\right) dt$$

Regulador lineal cuadrático (LQR): Regla de Bryson adaptable

Ejemplo 2: Dado $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\intercal$, minimizar $|x_1| + |x_2|$:

$$\mathbf{y_p} = \mathbf{C_p x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C_p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_p} = \begin{bmatrix} q_p & 0 \\ 0 & q_p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_x = \mathbf{C_p}^\intercal \mathbf{Q_p C_p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_p & 0 \\ 0 & q_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_p & 0 \\ 0 & q_p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^\intercal \mathbf{Q}_x \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_p & 0 \\ 0 & q_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = q_p x_1^2 + q_p x_2^2$$

$$J = \int_0^\infty \left(\mathbf{x}^\intercal \mathbf{Q}_x \mathbf{x} + \mathbf{u}^\intercal \mathbf{Q}_u \mathbf{u} \right) dt = \int_0^\infty \left(q_p (x_1^2 + x_2^2) + \mathbf{u}^\intercal \mathbf{Q}_u \mathbf{u} \right) dt$$

Ejemplo práctico

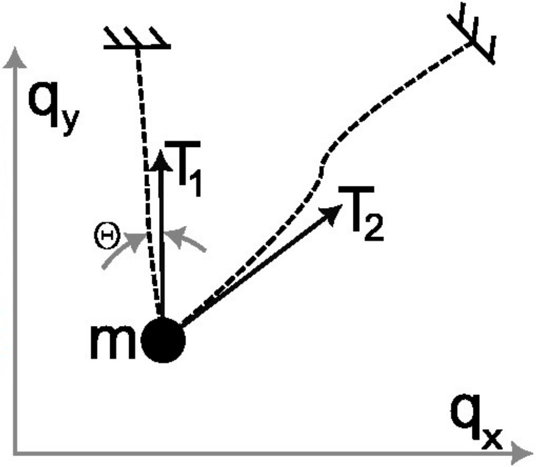


Figura: La lámpara del Fantasma de la Ópera

Bibliografía

1. Astrom, K. J., and Murray, R. M. (2008). Feedback Systems. Princeton University Press.
2. Ogata, K. (2010). Modern control engineering (5th ed.). Prentice Hall.