Análisis Matemático I
Clase 4: Cálculo de límites (continuación) y límites laterales. Continuidad.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2025

Un límite trigonométrico útil

Recordar:

Teorema

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1.$$

Un límite trigonométrico útil

Recordar:

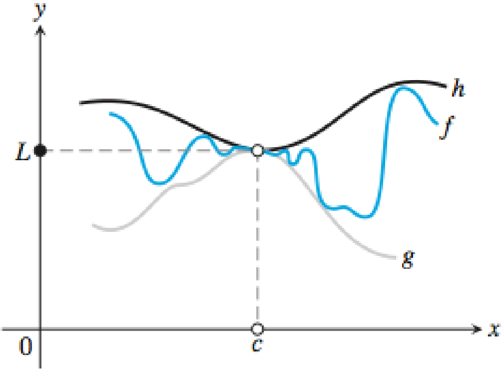
Teorema

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\ \theta}{\theta} = 1.$$

Ejemplo 2: calcule:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = .$$

Comencemos con la siguiente situación:



Teorema de la Compresión

Teorema de la compresión.

Sea I un intervalo abierto que contiene a un punto c. Supongamos que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \neq c$ en I. Si:

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L,$$

entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Teorema de la compresión

Ejemplo: Utilizando la siguiente información:

$$-|x| \leq \text{ sen } x \leq |x|,$$

compruebe que:

$$\lim_{x \to 0} \text{ sen } x = 0.$$

Ejemplo: Utilizando la siguiente información:

$$-|x| \leq \operatorname{sen} x \leq |x|,$$

compruebe que:

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0.$$

Solución: Observar que:

$$\lim_{x \to 0} -|x| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} |x| = 0,$$

Teorema de la compresión

Ejemplo: Utilizando la siguiente información:

$$-|x| \leq \operatorname{sen} x \leq |x|,$$

compruebe que:

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0.$$

Solución: Observar que:

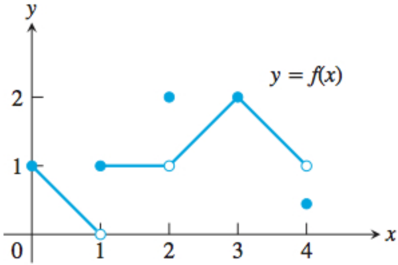
$$\lim_{x \to 0} -|x| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} |x| = 0,$$

luego el teorema de la compresión implica:

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0.$$

Límites laterales

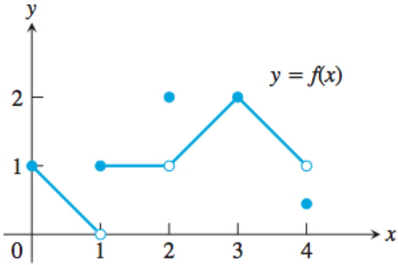
Límites laterales: considere la siguiente figura



y observar que $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe.

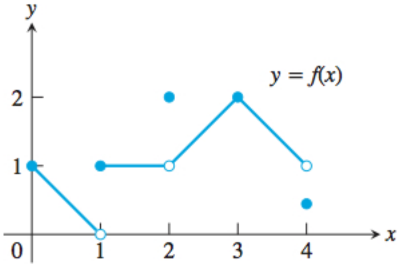
Límites laterales

Límites laterales: considere la siguiente figura



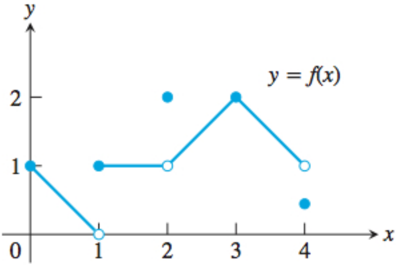
y observar que $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe. ¿Se puede dar una descripción del comportamiento de la función f cuando x tiende a 1 por la izquierda?

Límites laterales: considere la siguiente figura



y observar que $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe. ¿Se puede dar una descripción del comportamiento de la función f cuando x tiende a 1 por la izquierda?
Respuesta: Se observa que los valores de la función tienden a 0 **cuando** x **tiende a** 1 **por la izquierda**

Límites laterales: considere la siguiente figura



y observar que $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe. ¿Se puede dar una descripción del comportamiento de la función f cuando x tiende a 1 por la izquierda?
Respuesta: Se observa que los valores de la función tienden a 0 cuando x tiende a 1 por la izquierda
¿Qué pasa con los valores de f cuando x tiende a 1 por la derecha?

Los límites anteriores, donde se estudia el comportamiento de f para x a un lado del punto de análisis x_0, se denominan límites laterales y se simbolizan:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

para el límite lateral de f cuando x tiende a x_0 por derecha, y

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

para el límite lateral de f cuando x tiende a x_0 por izquierda.

Para calcular límites laterales podemos aplicar las mismas técnicas que para los límites *usuales* vistos en la clase 3.

Para calcular límites laterales podemos aplicar las mismas técnicas que para los límites *usuales* vistos en la clase 3.

Ejemplos

1. $$\lim_{x \to -5^-} \frac{x-5}{x^2-25} =$$

2. $$\lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2|}{x^2-4} =$$

Límites laterales

La siguiente es una propiedas que vincula los conceptos de límite lateral y límite:

Teorema

El límite:

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

existe si y solo si los límites laterales

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

existen y son iguales a L.

Continuidad

Analicemos la siguiente figura:

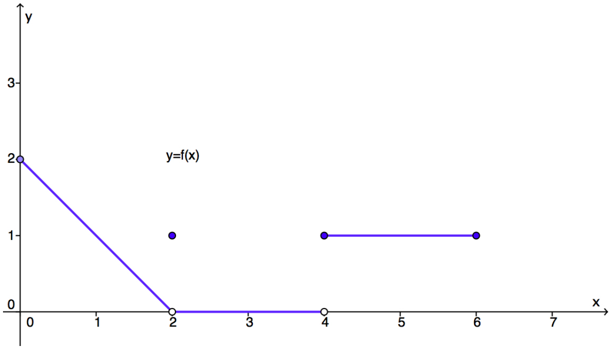


Figura: Introducción a Continuidad.

Analicemos la siguiente figura:

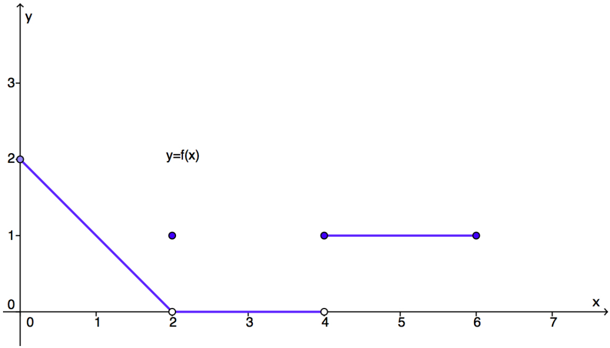


Figura: Introducción a Continuidad.

Más allá de que no hayamos definido el concepto de continuidad, diríamos que la función $y = f(x)$ no es continua en el punto $x = 2$ ni en $x = 4$.
Estudiemos cada caso:

- en $x = 2$ tenemos que $f(2) = 1$ y $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$. Así, el comportamiento de f en $x = 2$ no coincide con el comportamiento de f alrededor de $x = 2$.
- en $x = 4$, se observa que $f(4) = 1$, pero el límite de f cuando $x \to 4$ no existe. La situación es peor que en el caso anterior.

De las situaciones anteriores, deducimos que la continuidad de una función en un punto x_0 de su dominio se va a dar cuando el valor de f en x_0 coincida con el comportamiento de f alrededor de x_0.

Continuidad

Definición de continuidad

Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, b) que contiene a c. Decimos que f es continua en $x = c$ si y solo si

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Decimos que f es continua en (a, b) si y solo si f es continua en cada punto del intervalo (a, b).

Continuidad

Definición de continuidad

Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, b) que contiene a c. Decimos que f es continua en $x = c$ si y solo si

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Decimos que f es continua en (a, b) si y solo si f es continua en cada punto del intervalo (a, b).

Como se vio en la parte de límites, si P es una función polinómica, entonces $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Así, las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$. La continuidad de las funciones racionales también se da en todo punto donde el denominador no sea cero. Gráficamente, también pude verse que las funcioes sen y cos son continuas en $\mathbb{R}$.

Ahora bien, ¿Qué pasa si el punto c donde analizamos la continuidad no es interior al dominio?

Continuidad

Definición de continuidad por izquierda y por derecha

Sea f una función definida en un intervalo $[a, b]$. Decimos que f es continua por derecha en $x = a$ si y solo si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

De forma análoga, decimos que f es continua por izquierda en $x = b$ si y solo si

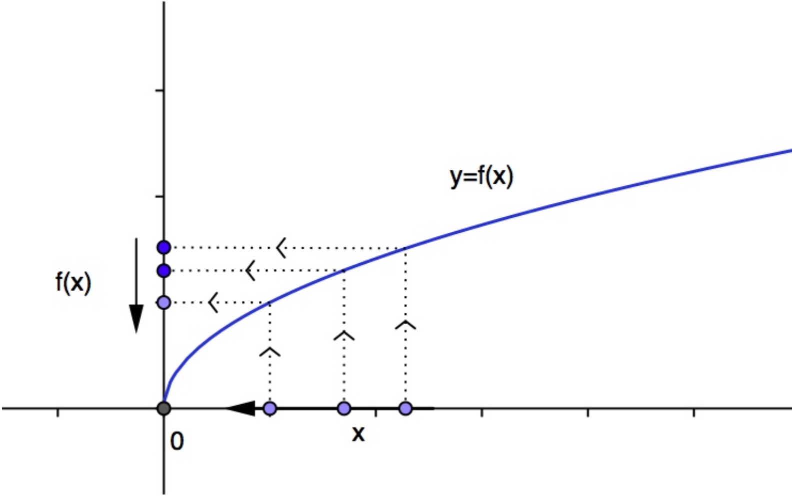
$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Continuidad en intervalos cerrados

Decimos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ si y solo si f es continua en (a, b), es continua por derecha en $x = a$ y es continua por izquierda en $x = b$.

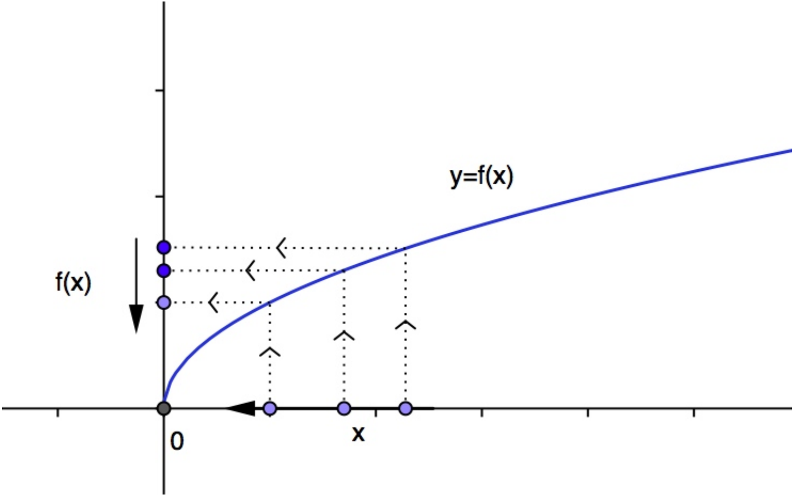
Continuidad

La siguiente función es continua por derecha en $x = 0$:



Continuidad

La siguiente función es continua por derecha en $x = 0$:



De hecho, la función f es continua en $[0, \infty)$.