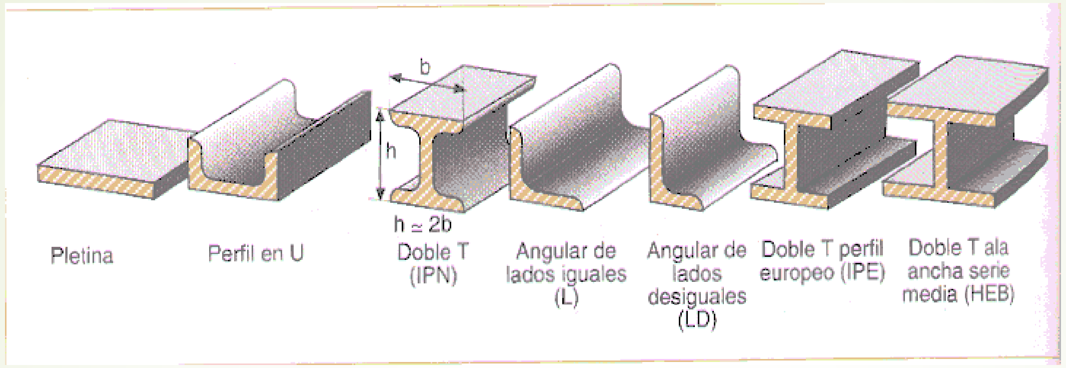
GEOMETRÍA DE LAS MASAS

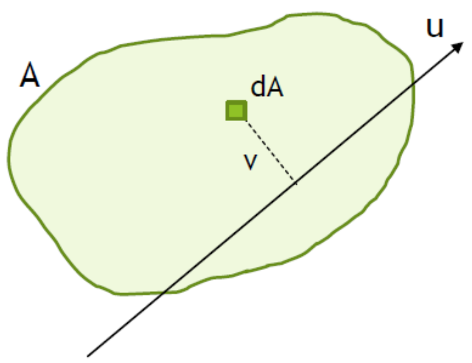
Secciones

Normalizadas



A medida de las necesidades

Momento Estático



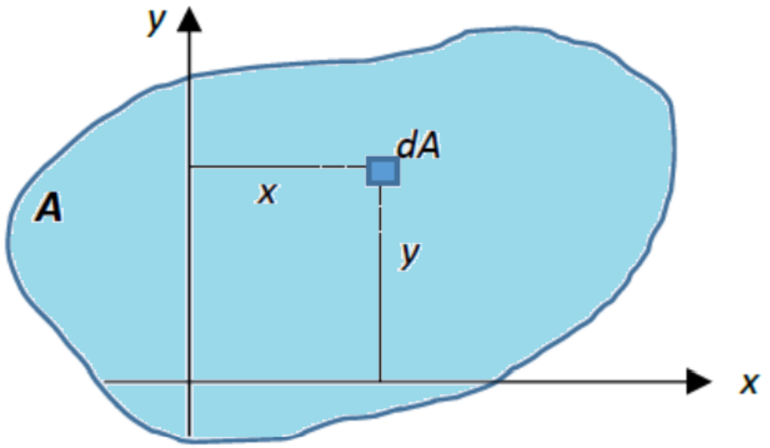
$$S_u = \int_A v.dA$$

Considerando la superficie plana de área **A** y una recta **u** en el plano de la superficie, que puede o no cortarla, se define

Su como **Momento estático**, siendo **v** la distancia al eje.

- **Unidades: [S]=m2.m=m3**
- **El área es positiva, el signo del momento estático depende de la coordenada.**
- **Puede ser positivo, negativo o nulo.**

Si se toma un sistema de referencia ortogonal, cartesiano y arbitrario x, y,
la expresión de momento de primer orden respecto de estos ejes es:

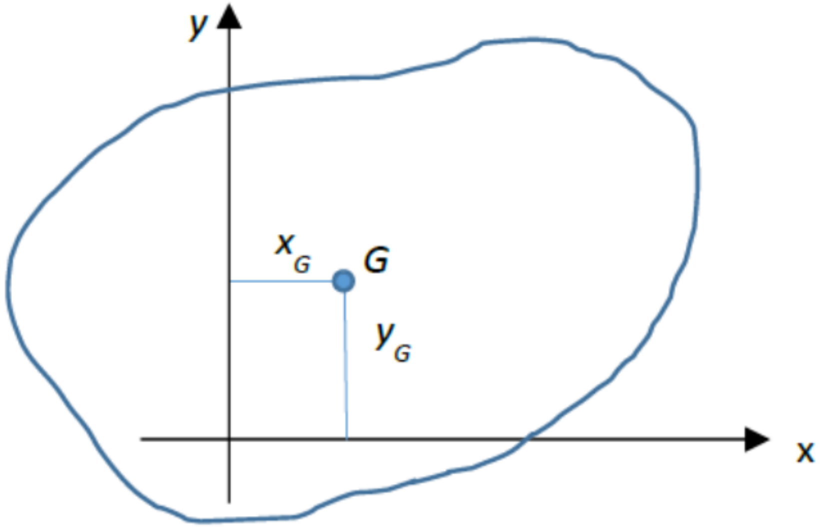


$$S_x = \int y\, dA$$

$$S_y = \int x\, dA$$

Baricentro

- Es el punto donde se podría concentrar toda el área de la superficie.
- Es el punto donde el momento estático vale 0.
- Es independiente del sistema coordenado.
- Puede ubicarse dentro o fuera del contorno de la superficie.

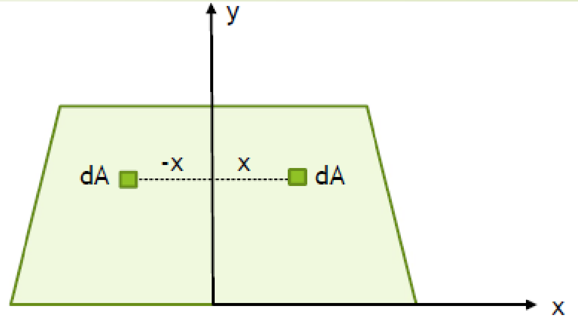


$$S_x = A \cdot y_G \qquad S_y = A \cdot x_G$$

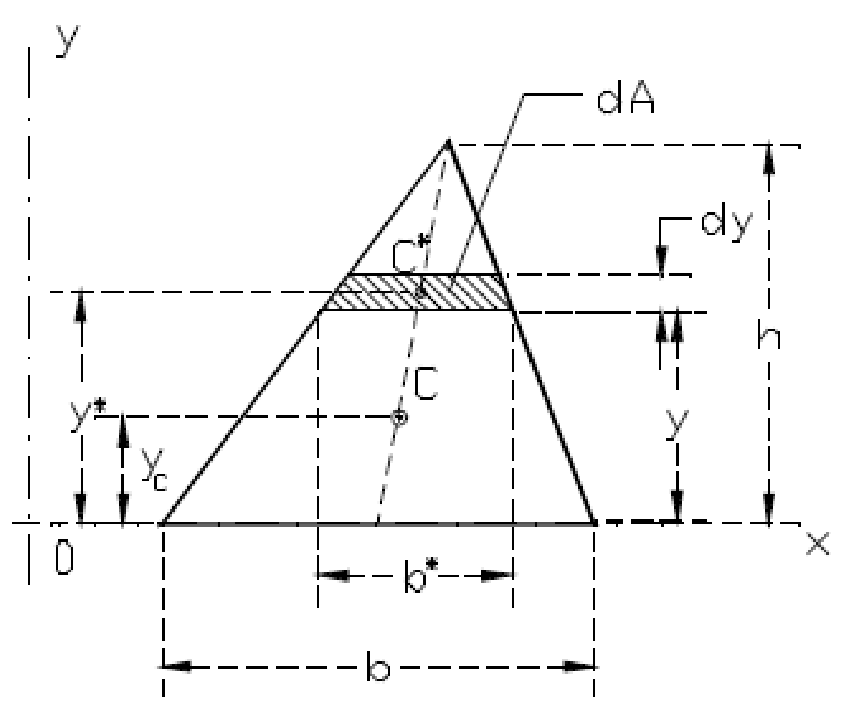
$$y_G = \frac{\int y\,dA}{A} = \frac{S_x}{A} \qquad x_G = \frac{\int x\,dA}{A} = \frac{S_y}{A}$$

Unidades: $[x_G] = \frac{[S_y]}{[A]} = \frac{m^3}{m^2} = m$

Cualquier recta que pase por el baricentro se denomina recta o eje baricéntrico. Respecto ella el momento estático es 0
Si la figura posee eje de simetría es baricéntrico.
Y si posee más de un eje de simetría tendremos el baricentro en el punto de encuentro de esos ejes.



Baricentro de un Triángulo



$$y_C = \frac{S_x}{A}$$

$$A = \int_A dA = \int_A b^*\, dy$$

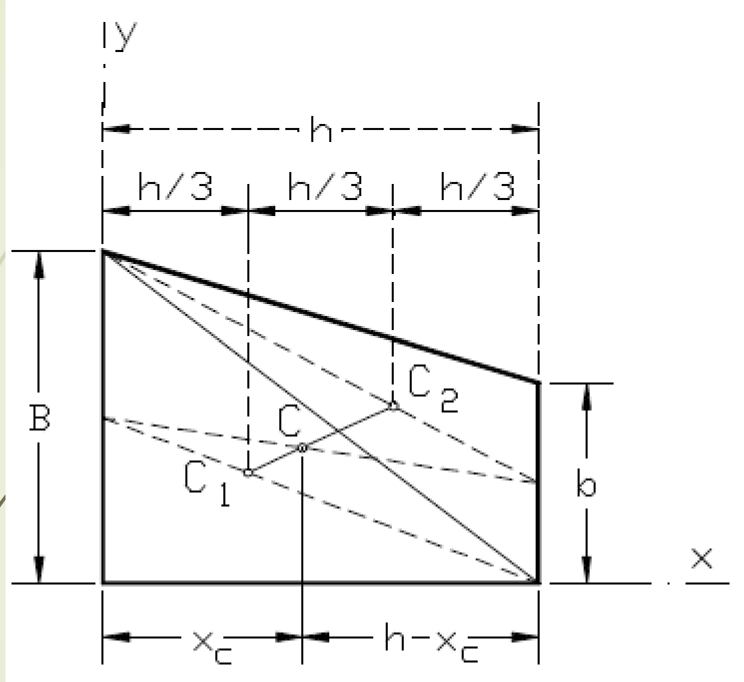
$$\frac{b^*}{b} = \frac{h-y}{h} \qquad \therefore \qquad b^* = \frac{b}{h}(h-y) = b - \frac{b}{h}y$$

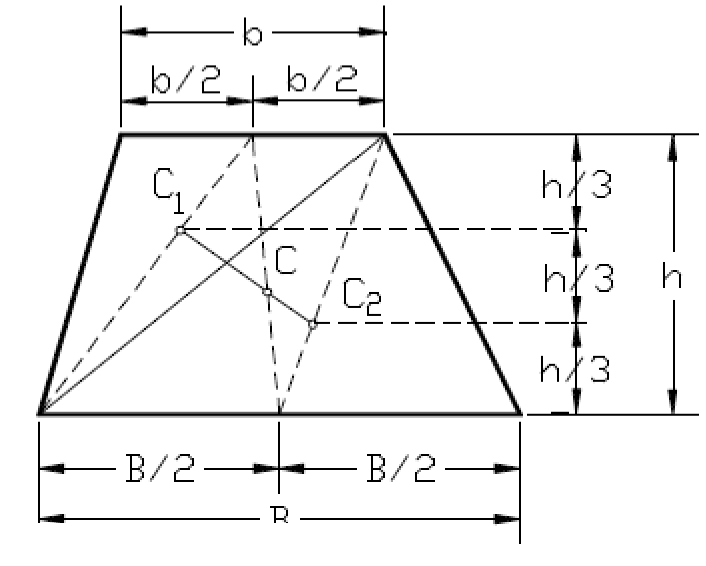
$$A = \int_A dA = \int_A b^*\, dy = b\int_0^h dy - \frac{b}{h}\int_0^h y\, dy = bh - \frac{b}{h}\frac{h^2}{2} = \frac{bh}{2}$$

$$S_x = \int_A y^*\, dA = \int_0^h y\left(b - \frac{b}{h}y\right)dy = b\int_0^h y\, dy - \frac{b}{h}\int_0^h y^2\, dy = \frac{bh^2}{2} - \frac{b}{h}\frac{h^3}{3} = \frac{bh^2}{6}$$

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{h}{3}$$

Baricentro de un Trapecio





$$x_C = \frac{S_y}{A}$$

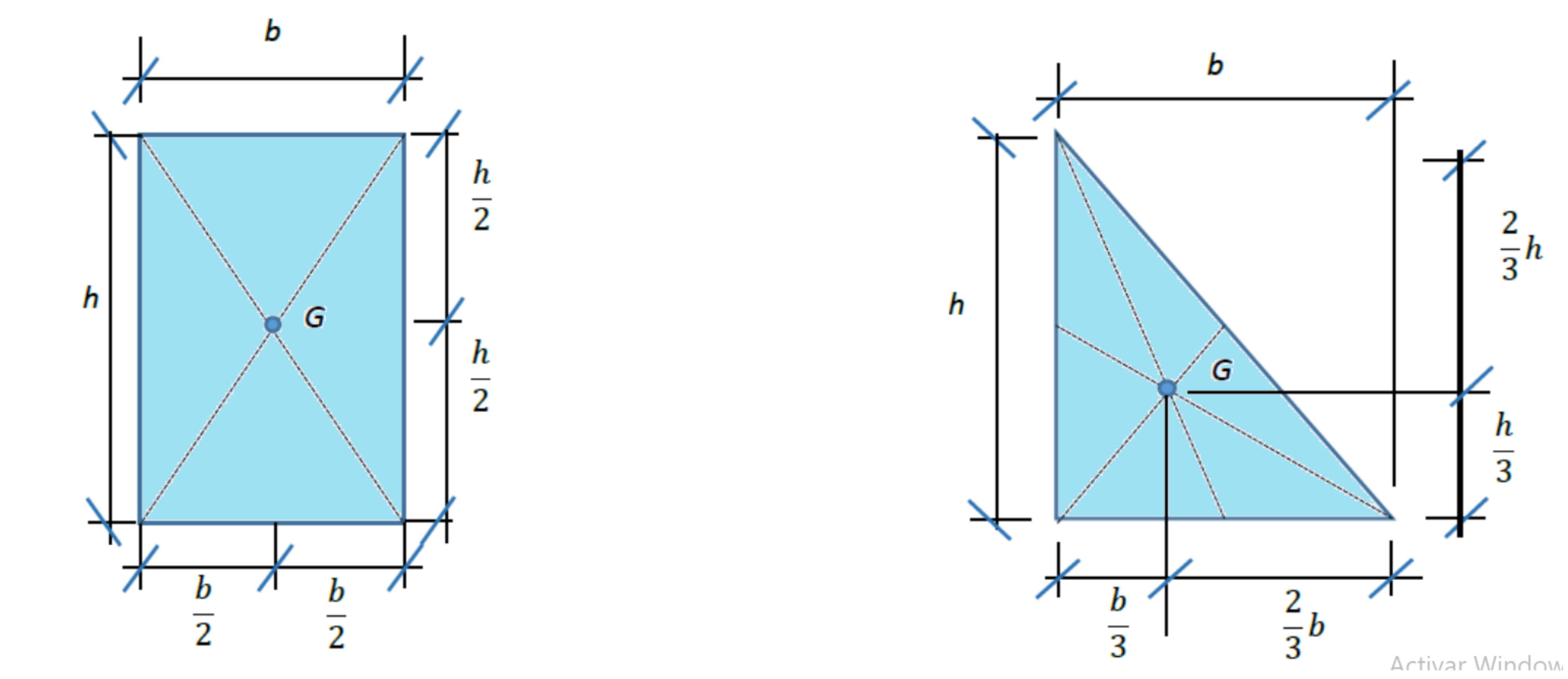
$$S_y = x_1A_1 + x_2A_2 = \frac{h}{3}\frac{1}{2}Bh + \frac{2}{3}h\frac{bh}{2} = \frac{1}{6}Bh^2 + \frac{2}{6}bh^2$$

$$S_y = \frac{h^2}{6}(2b + B)$$

$$A = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}Bh = \frac{h}{2}(b + B)$$

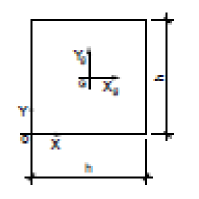
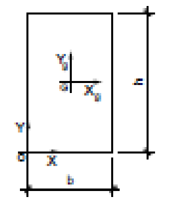
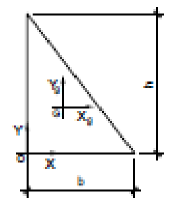
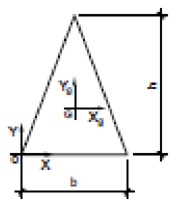
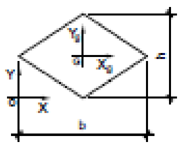
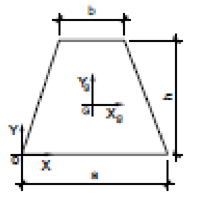
$$x_C = \frac{\frac{h^2}{6}(2b+B)}{\frac{h}{2}(b+B)} = \frac{h}{3}\frac{2b+B}{b+B}$$

Método Gráfico

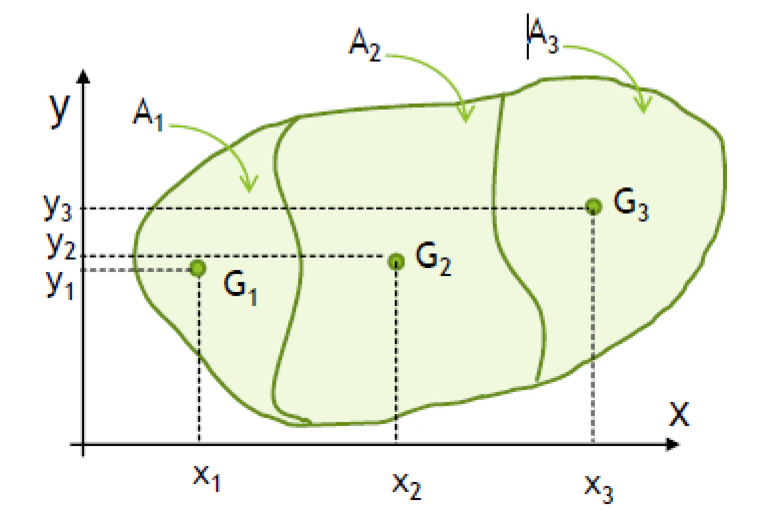


El baricentro se encuentra en la Intersección de las diagonales.

El baricentro se encuentra en la Intersección de las mediatrices.

SECCIÓN	BARICENTRO / ÁREA
	$x_g = \frac{h}{2}$
	$y_g = \frac{h}{2}$
	$F = h^2$
	$x_g = \frac{b}{2}$
	$y_g = \frac{h}{2}$
	$F = b \cdot h$
	$x_g = \frac{b}{3}$
	$y_g = \frac{h}{3}$
	$F = \frac{b \cdot h}{2}$
	$x_g = \frac{b}{2}$
	$y_g = \frac{h}{3}$
	$F = \frac{b \cdot h}{2}$
	$x_g = \frac{b}{2}$
	$y_g = \frac{h}{2}$
	$F = \frac{b \cdot h}{2}$
	$x_g = \frac{a}{2}$
	$y_g = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$
	$F = \frac{h}{2} \cdot (a+b)$

Baricentro se superficies de forma arbitraria o compuestas

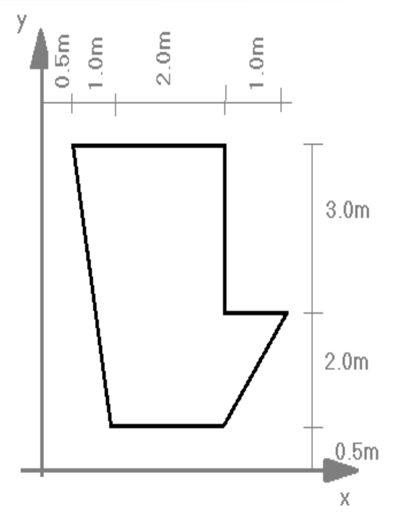


Se divide el área en pequeñas subdivisiones.

Los momentos estáticos del área compuesta se pueden calcular como la suma de los momentos estáticos de cada área pequeña.

$$S_x = \int y\, dA = \sum \int y\, dA_i = \sum S_{xi}$$

$$S_y = \int x\, dA = \sum \int x\, dA_i = \sum S_{yi}$$

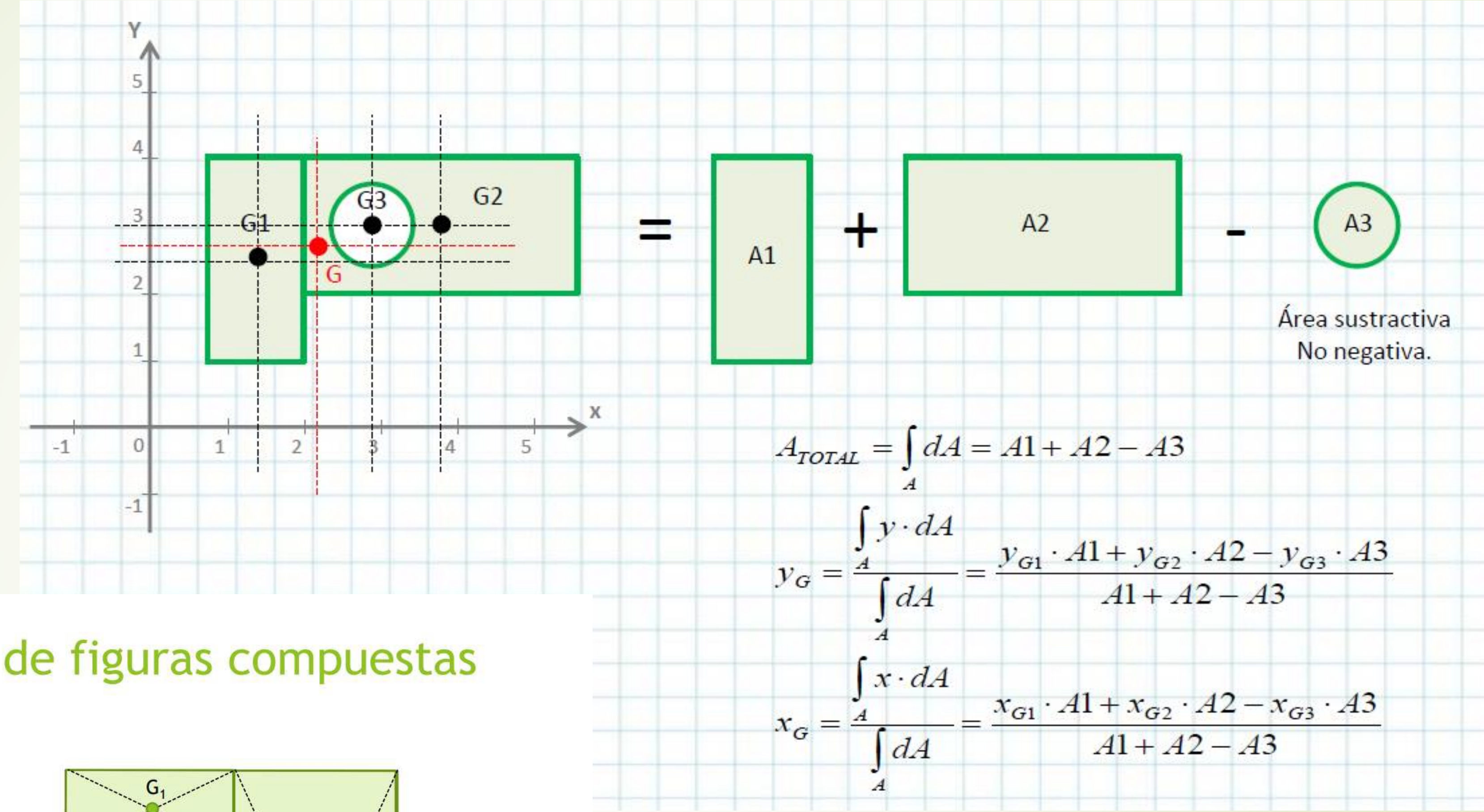


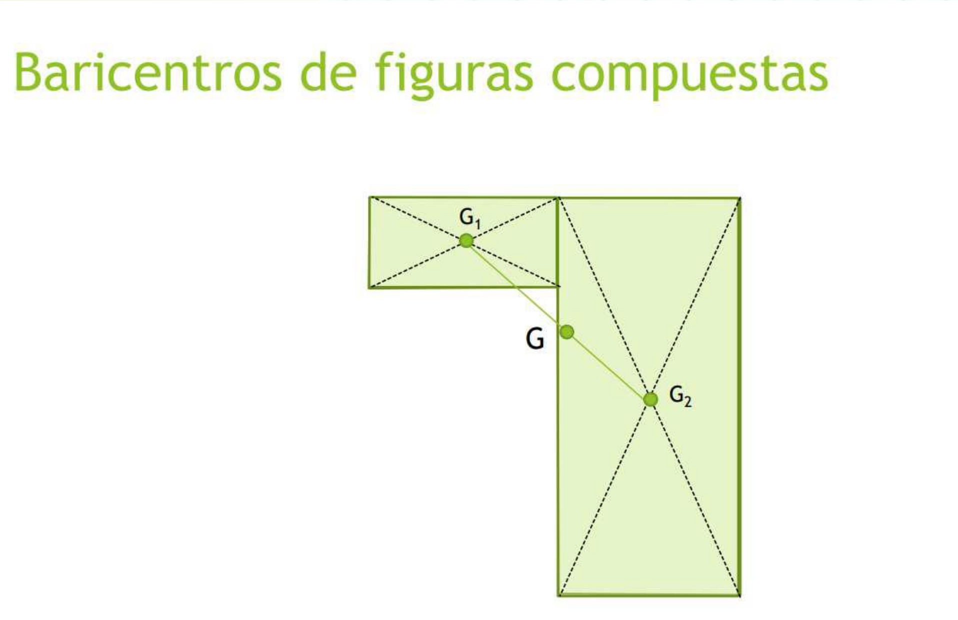
Las coordenadas del baricentro del área compuesta se calcula como:

$$y_G = \frac{\sum y_{Gi} \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$x_G = \frac{\sum x_{Gi} \cdot A_i}{\sum A_i}$$

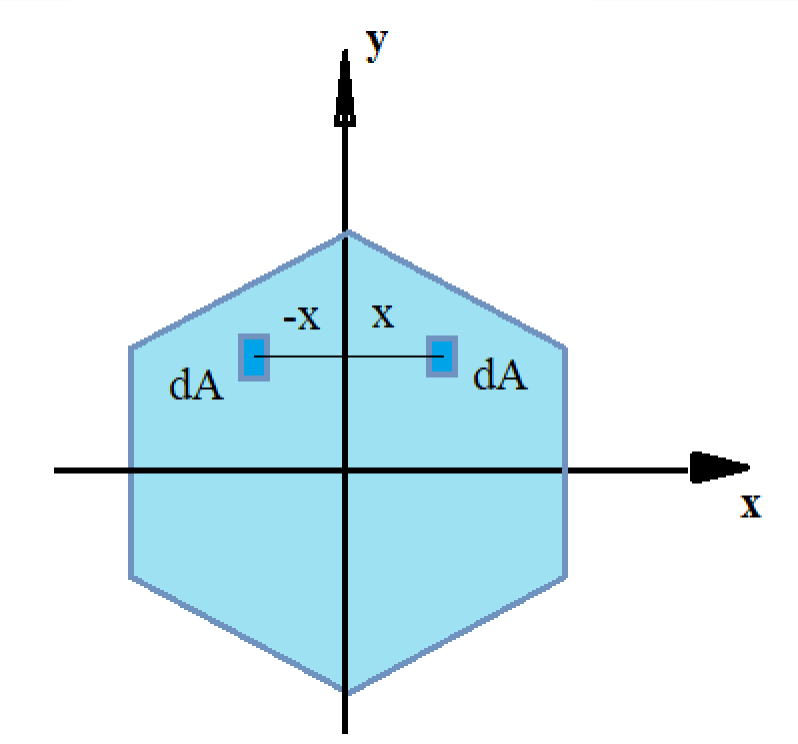
Baricentro de Secciones compuestas



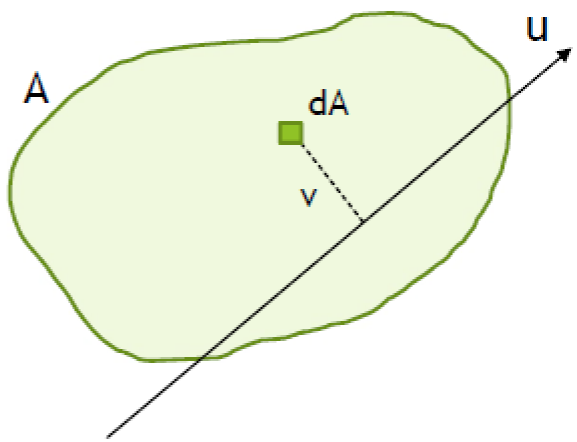


Ejes baricéntricos

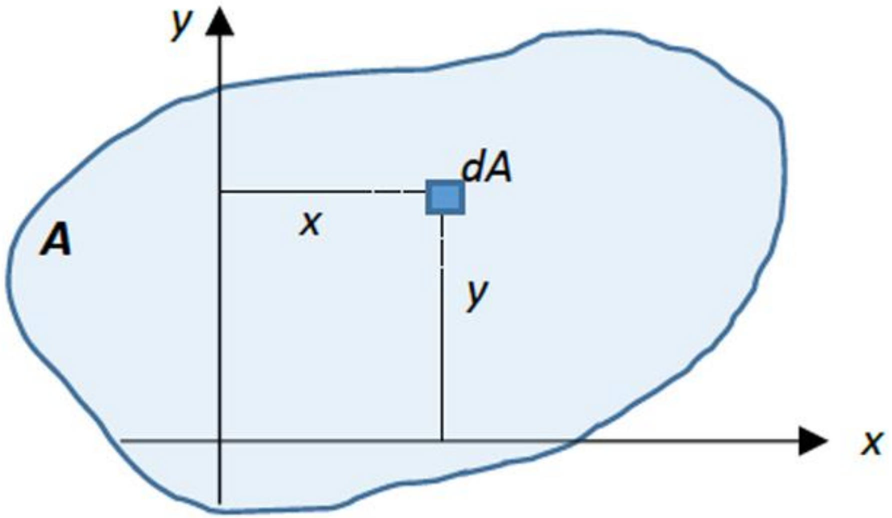
- Es cualquier eje que pasa por el baricentro de la sección.
- El Momento estático respecto de un eje baricéntricos es nulo. $S_G = 0$



Momento de Inercia



$$I_u = \int_A v^2 . dA$$

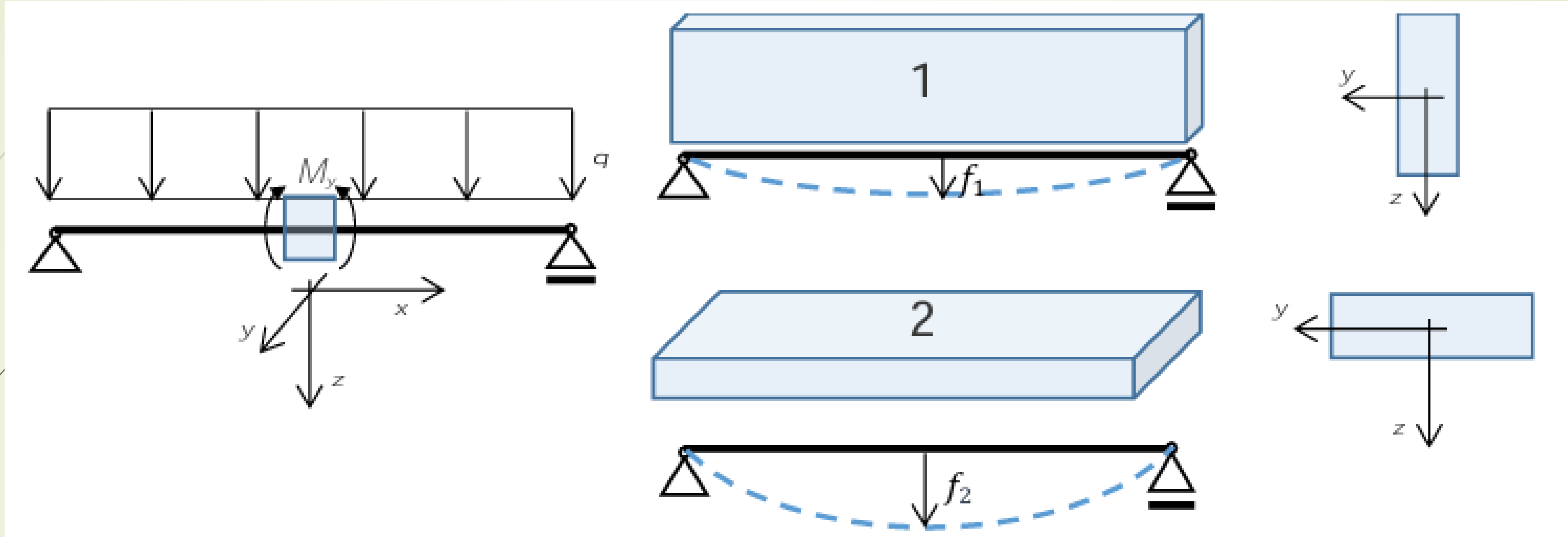


$$I_x = \int y^2 \, dA$$

$$I_y = \int x^2 \, dA$$

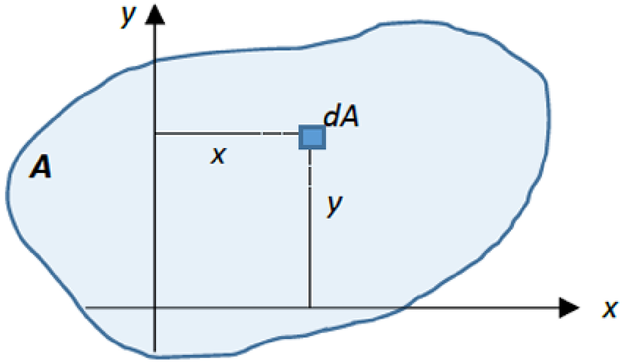
Unidades: $[I] = m^2 . m^2 = m^4$

El momento de inercia nos da una idea de la resistencia que tiene una sección al giro respecto de un eje.



Relación que tiene el momento de inercia con la flexión

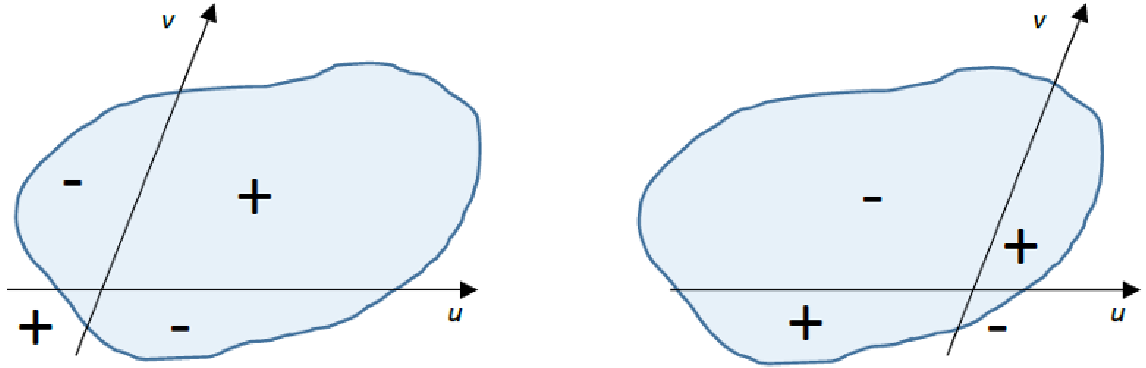
Momento centrífugo

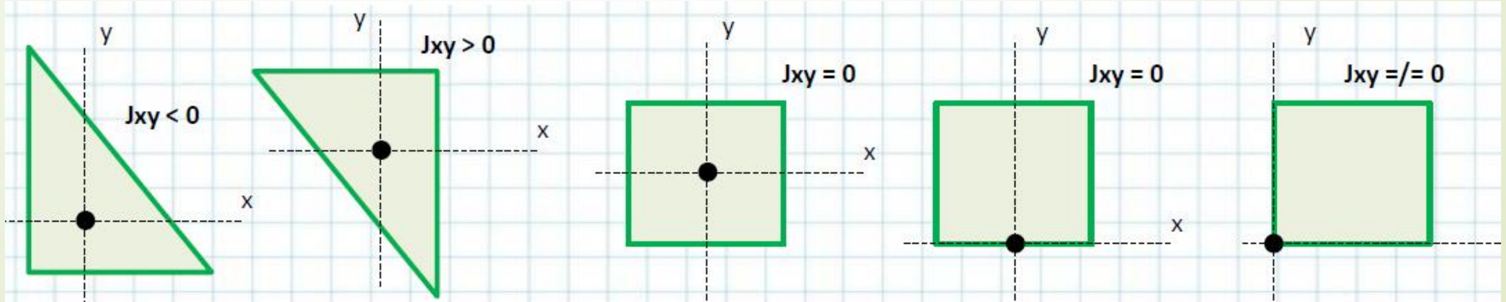


$$I_{xy} = \int x\,y\,dA$$

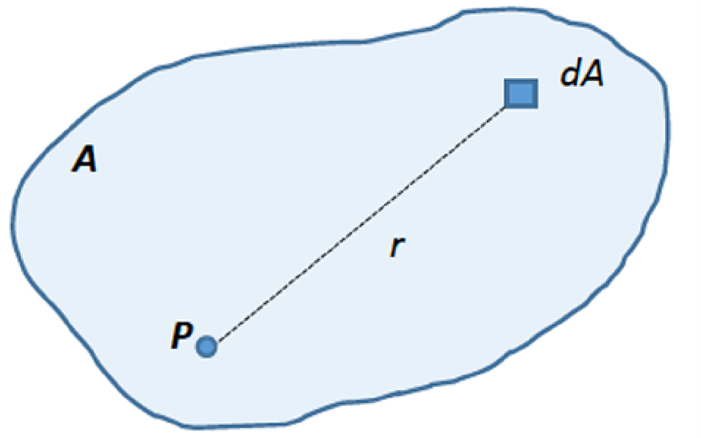
Unidades: $[I] = m^2.m^2 = m^4$

El signo del momento depende del cuadrante donde exista mayor área.



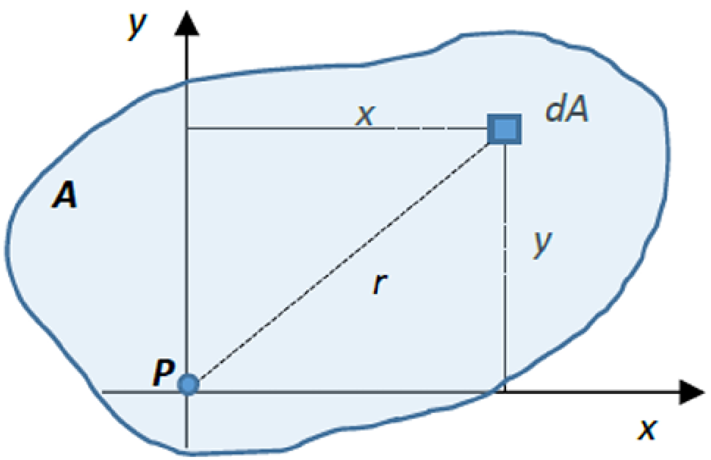


Momento polar



$$I_P = \int r^2 \, dA$$

Unidades: $[I] = m^2 . m^2 = m^4$

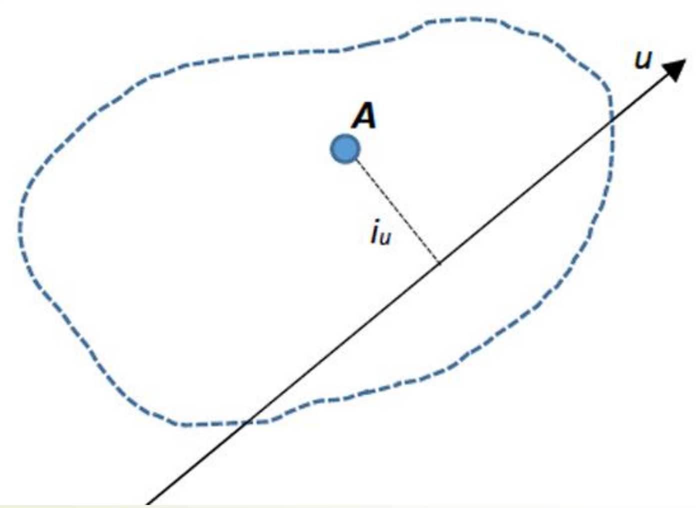


$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$I_P = \int (x^2 + y^2) \, dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_x + I_y$$

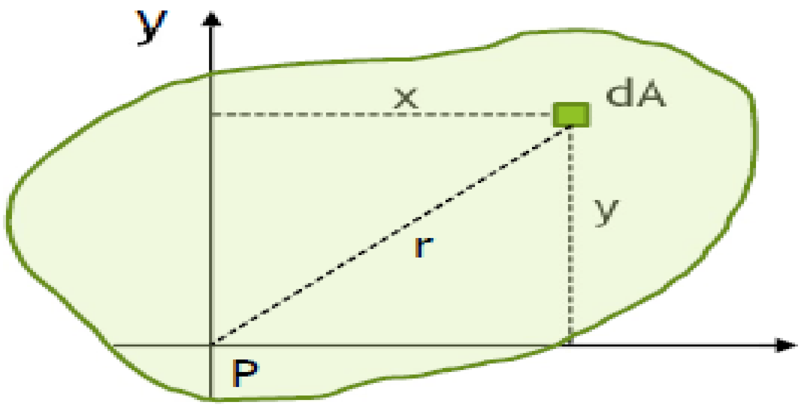
Radio de giro

Es la distancia a una recta, tal que si toda el área estuviera concentrada en dicho punto, obtendríamos el mismo momento de inercia de la figura respecto del eje.



$$I_u = i_u{}^2 \cdot A$$

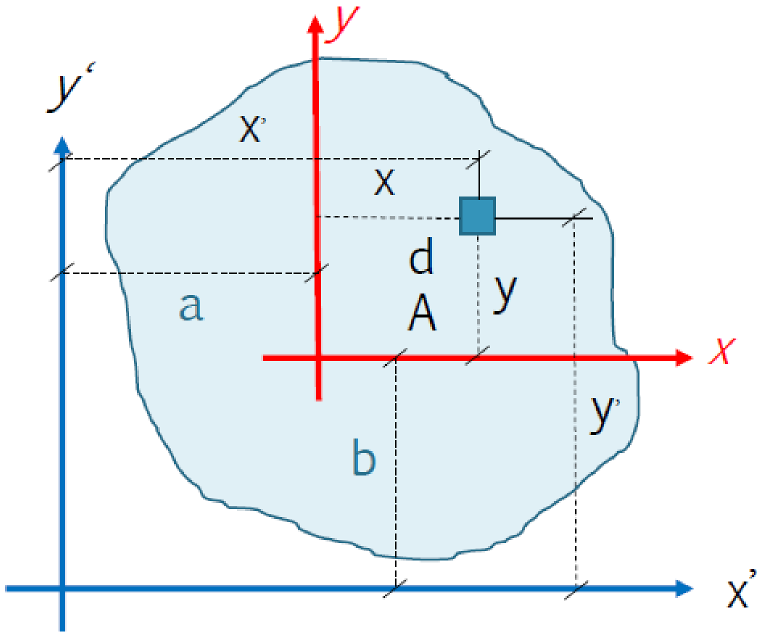
Entonces: $i_u = \sqrt{\dfrac{I_u}{A}}$



Nos da idea de la efectividad de la distribución del área en una sección

$$\begin{cases} i_x = \sqrt{\dfrac{I_x}{A}} \\ i_y = \sqrt{\dfrac{I_y}{A}} \end{cases} \qquad i_P = \sqrt{\dfrac{I_P}{A}}$$

TRASLACIÓN DE EJES



$$\begin{cases} x' = \boldsymbol{x} + a \\ y' = \boldsymbol{y} + b \end{cases}$$

$$I_{x'} = \iint y'^2 dA = \iint (y+b)^2 dA = \iint y^2 dA + 2.b \iint y\, dA + b^2 \iint dA$$

$$\boxed{I_{x'} = I_x + 2\,.b.S_x + b^2.A}$$

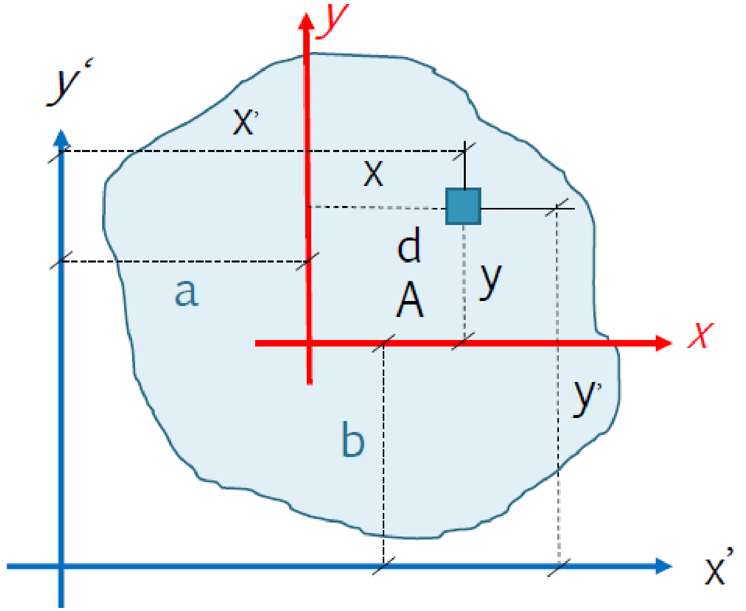
$$I_{y'} = \iint x'^2 dA = \iint (x+a)^2 dA = \iint x^2 dA + 2.a \iint x\, dA + a^2 \iint dA$$

$$\boxed{I_{y'} = I_y + 2\,.a.S_y + a^2.A}$$

$$I_{x'y'} = \iint x'.y' dA = \iint (x+a).(y+b)\, dA = \iint x.y\, dA + b \iint x\, dA + a \iint y\, dA + ab \iint dA$$

$$\boxed{I_{x'y'} = I_{xy} + b.S_y + a.S_x + a.b.A}$$

Traslación de ejes baricéntricos
Teorema de Steiner



$$I_{x'} = I_{xG} + 2.b.\cancel{S_{xG}} + b^2.A \qquad \boxed{I_{x'} = I_{xG} + b^2.A}$$

$$I_{y'} = I_{yG} + 2.a.\cancel{S_{yG}} + a^2.A \qquad \boxed{I_{y'} = I_{yG} + a^2.A}$$

$$I_{x'y'} = I_{xGyG} + b.\cancel{S_{yG}} + a.\cancel{S_{yG}} + a.b.A \qquad \boxed{I_{x'y'} = I_{xGyG} + a.b.A}$$

Conclusión:
Los momentos de inercia baricéntricos son siempre menores que los momentos de inercia respecto a cualquier otro par de ejes paralelos.

Determinación de Momentos de 2do Orden en Rectángulos.

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_o^h y^2 b dy = \frac{bh^3}{3}$$

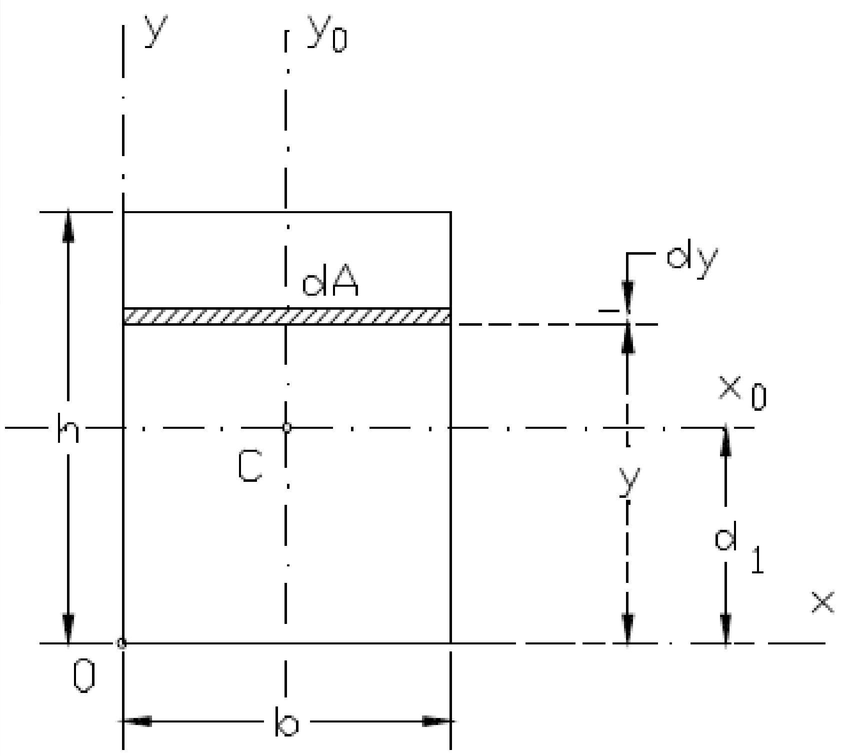
$$I_{xo} = I_x - d_1^2\ A = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12}$$

$$i_{xo} = \sqrt{\frac{I_{xo}}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3/12}{bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

$$I_y = \frac{b^3 h}{3} \qquad I_{yo} = \frac{b^3 h}{12} \qquad i_{yo} = \frac{b}{\sqrt{12}}$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{bh}{3}(h^2 + b^2)$$

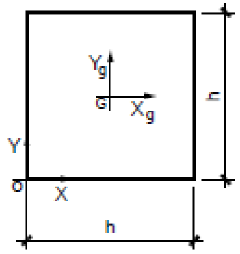
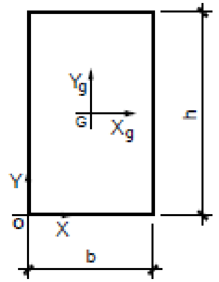
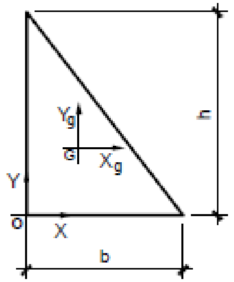
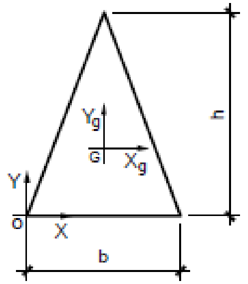
$$I_{xo\,yo} = 0$$



$$I_C = I_{xo} + I_{yo} = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2)$$

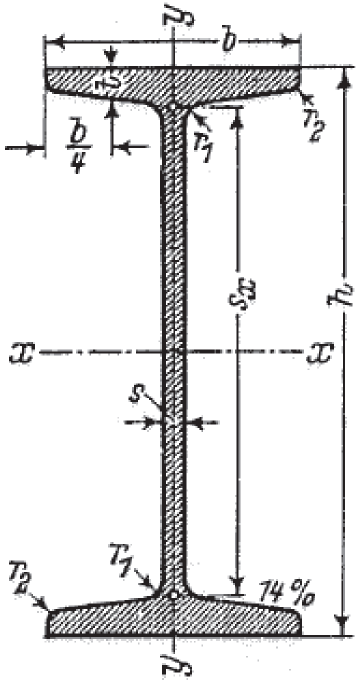
$$I_{xy} = I_{xo\,yo} + d_1 d_2 A = \frac{b^2 h^2}{4}$$

Momentos Inercia y Centrífugos en Secciones características

SECCIÓN	BARICENTRO / ÁREA	MOMENTOS DE INERCIA Y MOMENTOS CENTRIFUGOS	
	$x_g = \frac{h}{2}$	$J_x = \frac{h^4}{3}$	$J_{xg} = \frac{h^4}{12}$
	$y_g = \frac{h}{2}$	$J_y = \frac{h^4}{3}$	$J_{yg} = \frac{h^4}{12}$
	$F = h^2$	$Jxy = \frac{h^4}{4}$	$J_{xyg} = 0$
	$x_g = \frac{b}{2}$	$J_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$	$J_{xg} = \frac{b \cdot h^3}{12}$
	$y_g = \frac{h}{2}$	$J_y = \frac{b^3 \cdot h}{3}$	$J_{yg} = \frac{b^3 \cdot h}{12}$
	$F = b \cdot h$	$Jxy = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$	$J_{xyg} = 0$
	$x_g = \frac{b}{3}$	$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$	$J_{xg} = \frac{b \cdot h^3}{36}$
	$y_g = \frac{h}{3}$	$J_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}$	$J_{yg} = \frac{b^3 \cdot h}{36}$
	$F = \frac{b \cdot h}{2}$	$Jxy = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}$	$J_{xyg} = \frac{-b^2 \cdot h^2}{72}$
	$x_g = \frac{b}{2}$	$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$	$J_{xg} = \frac{b \cdot h^3}{36}$
	$y_g = \frac{h}{3}$	$J_y = \frac{7 \cdot b^3 \cdot h}{48}$	$J_{yg} = \frac{b^3 \cdot h}{48}$
	$F = \frac{b \cdot h}{2}$	$Jxy = \frac{b^2 \cdot h^2}{12}$	$J_{xyg} = 0$

Momentos Inercia y Centrífugos en Secciones características

2.2.1.1. Vigas I de ala estrecha, taluzada interiormente, serie I (laminada en caliente), según **DIN 1025 hoja 1,** Edición octubre 1963



F = Sección

G = Peso

U = Superficie exterior por m de pieza

J = Momento de inercia
W = Momento resistente
$i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ = Radio de giro

} referido al eje correspondiente de flexión

S_x = Momento estático de media sección de la I

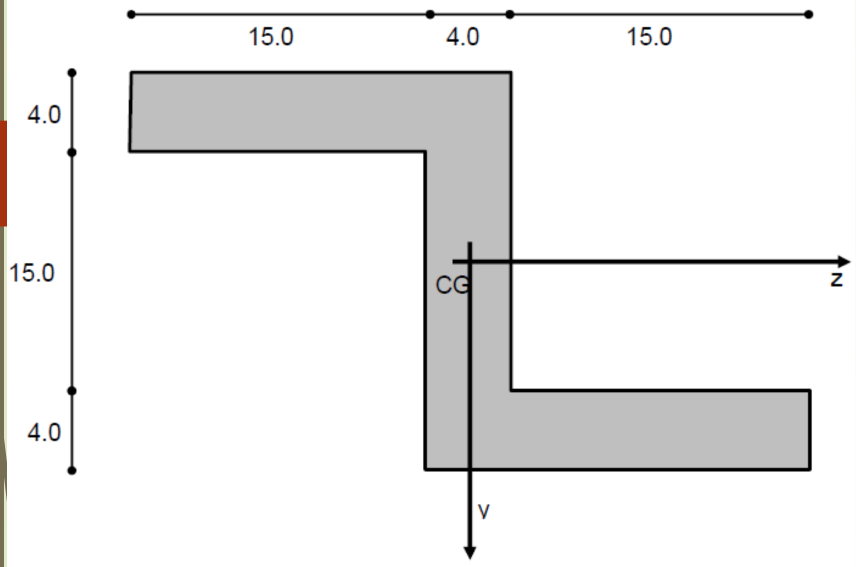
$s_x = \frac{J_x}{S_x}$ Separación entre los centros de tracción y compresión

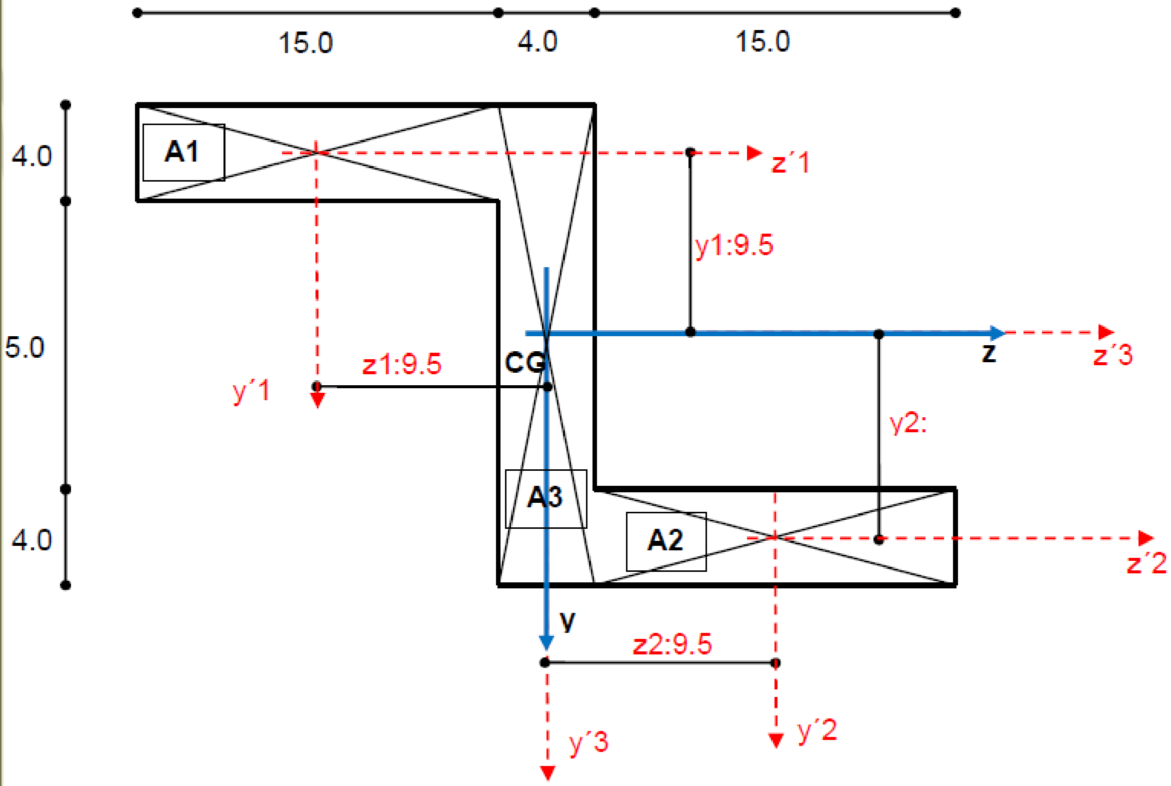
Datos sobre largos, ejemplos de designación, de pedidos, y tolerancias, *ver capítulo 2.9.*

Material : Preferentemente clases de acero según DIN 17 100

Designación I	Dimensiones en mm					F	G	U	Para el eje de flexión x — x			y — y			S_x	s_x
	h	b	$s = r_1$	t	r_2	cm²	kg/m	m²/m	J_x cm⁴	W_x cm³	i_x cm	J_y cm⁴	W_y cm³	$i_y = i_1$ (min) cm	cm³	cm
80	80	42	3,9	5,9	2,3	7,57	5,94	0,304	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	11,4	6,84
100	100	50	4,5	6,8	2,7	10,6	8,34	0,370	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	19,9	8,57

Mom. Inercia en Secciones compuestas
Teorema de Steiner





$$Jz = \sum(Jz_i + A_i y_i^2)$$

Elemento	Jz_i (cm4)	A_i (cm2)	y_i (cm)	$A_i y_i^2$ (cm4)	$Jz_i+A_i y_i^2$ (cm4)
A1	80.0	60.0	9.5	5415.0	5495.0
A2	80.0	60.0	-9.5	5415.0	5495.0
A3	4055.6	92.0	0.0	0.0	4055.6
		Jz(cm4)			**15045.6**

$$Jy = \sum(Jy_i + A_i z_i^2)$$

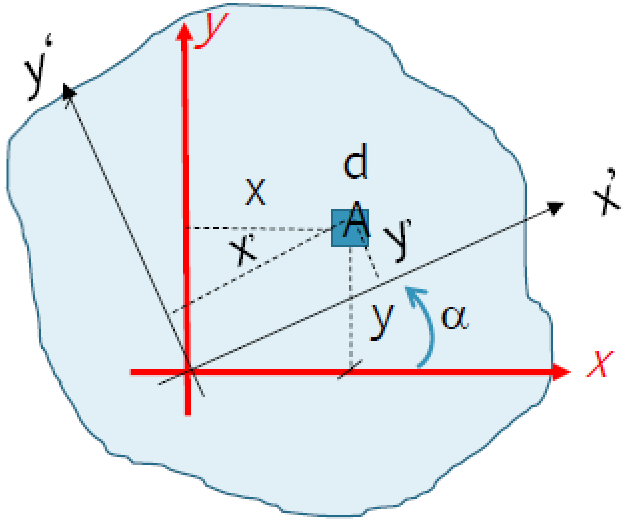
Elemento	Jy_i (cm4)	A_i (cm2)	z_i (cm)	$A_i z_i^2$ (cm4)	$Jy_i+A_i z_i^2$ (cm4)
A1	1125.0	60.0	-9.5	5415.0	6540.0
A2	1125.0	60.0	9.5	5415.0	6540.0
A3	122.6	92.0	0.0	0.0	122.6
		Jy(cm4)			**13202.6**

$$Jzy = \sum(Jzy_i + A_i y_i z_i)$$

Elemento	Jzy_i (cm4)	A_i (cm2)	z_i (cm)	y_i (cm)	$A_i z_i y_i$ (cm4)	$Jzy_i+A_i z_i y_i$ (cm4)
A1	0.0	60.0	-9.5	9.5	-5415.0	-5415.0
A2	0.0	60.0	9.5	-9.5	-5415.0	-5415.0
A3	0.0	92.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			Jzy(cm4)			**-10830.0**

ROTACIÓN DE EJES ORTOGONALES

Características geométricas respecto de x,y conocidas.
Se desea conocer respecto de x',y', girados a respecto de x,y.



$$\begin{cases} x' = x.\cos(\alpha) + y.\sin(\alpha) \\ y' = y.\cos(\alpha) - x.\sin(\alpha) \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 2.\sin(\alpha).\cos(\alpha) = \sin(2\alpha) \\ \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 = \cos(2\alpha) \end{matrix}}$$

$$I_{x'} = \iint y'^2 dA = \iint (y.\cos(\alpha) - x.\sin(\alpha)\ )^2 dA =$$

$$= -\sin(2\alpha) \iint x.y\ dA + \sin(\alpha)^2 \iint x^2 dA + \cos(\alpha)^2 \iint y^2 dA \quad \boxed{I_{x'} = \sin(\alpha)^2 . I_y + \cos(\alpha)^2 . I_x - \sin(2\alpha)\, I_{xy}}$$

$$I_{y'} = \iint x'^2 dA = \iint (x.\cos(\alpha) + y.\sin(\alpha)\ )^2 dA =$$

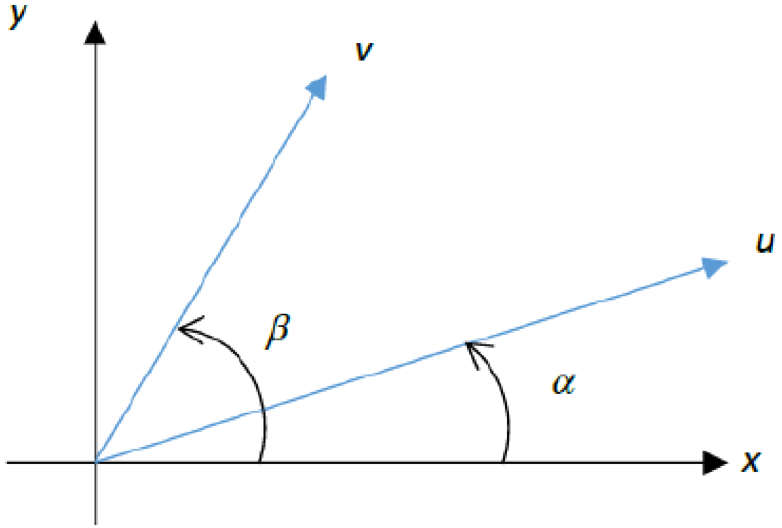
$$= \sin(2\alpha) \iint x.y\ dA + \cos(\alpha)^2 \iint x^2 dA + \sin(\alpha)^2 \iint y^2 dA \quad \boxed{I_{y'} = cos(\alpha)^2 . I_y + sin(\alpha)^2 . I_x + \sin(2\alpha)\, I_{xy}}$$

$$I_{x'y'} = \iint x'.y' dA = \iint (x.\cos(\alpha) + y.\sin(\alpha)).(y.\cos(\alpha) - x.\sin(\alpha))\ dA =$$

$$= \cos(2\alpha) \iint x.y\ dA - \frac{\sin(2\alpha)}{2} \iint x^2 dA + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \iint y^2 dA = \quad \boxed{I_{x'y'} = \cos(2\alpha)\, I_{xy} - \frac{\sin(2\alpha)}{2}(I_y - I_x)}$$

EJES CONJUGADOS DE INERCIA:

Es un par de ejes cuyo momento centrífugo es nulo.



Teniendo el eje *u* que forma un ángulo α con x, calculamos el eje *v* conjugado de inercia:

$$\tan(\beta) = \frac{I_x - I_{xy}.\tan(\alpha)}{I_{xy} - I_y.\tan(\alpha)}$$

- Si además de ser Conjugados, el par de ejes son ortogonales entre sí, se los denomina Ejes Principales de Inercia.
- Si uno de los ejes es de simetría, cualquiera sea el otro eje, el Momento Centrífugo será nulo.

➢ EJES PRINCIPALES DE INERCIA:

Es el par de ejes para los cuales los momentos de inercia son máximos y mínimos.
Para hallar el eje, derivamos la expresión de rotación respecto del ángulo.

$$\boxed{I_{x'} = \sin(\alpha)^2 \,.\, I_y + \cos(\alpha)^2 \,.\, I_x - \sin(2\alpha)\, I_{xy}}$$

$$\frac{dI_{x'}}{d\alpha} = 0 = \frac{d\sin(\alpha)^2}{d\alpha} \,.\, I_y + \frac{d\cos(\alpha)^2}{d\alpha} \,.\, I_x - \frac{d\sin(2\alpha)}{d\alpha} \,.\, I_{xy}$$

$$0 = \sin(2\alpha_0) \,.\, I_y - \sin(2\alpha_0) \,.\, I_x - 2.\cos(2\alpha_0).\, I_{xy}$$

$$2.\cos(2\alpha_0) \,.\, I_{xy} = \sin(2\alpha_0) \,.\, (I_y - I_x)$$

$$\frac{2.\, I_{xy}}{(I_y - I_x)} = \frac{\sin(2\alpha_0)}{\cos(2\alpha_0)} = \tan(2\alpha_0)$$

$$\boxed{\tan(2\alpha_0) = \frac{2.\, I_{xy}}{(I_y - I_x)}}$$

MOMENTOS DE INERCIA PRINCIPALES:

Reemplazando el a que maximiza el valor del Momento de Inercia en la ecuación de rotación de ejes, se obtienen los momentos de inercia máximos y mínimos o Momentos Principales de Inercia

$$\underbrace{\begin{aligned} \cos(\alpha)^2 &= \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \\ sin(\alpha)^2 &= \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \end{aligned}}$$

$$I_{x'} = \sin(\alpha)^2 . I_y + \cos(\alpha)^2 . I_x - \sin(2\alpha)\, I_{xy} = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} . I_y + \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} . I_x - \sin(2\alpha)\, I_{xy} =$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{\cos(2\alpha)}{2} . (I_x - I_y) - \sin(2\alpha)\, I_{xy} =$$

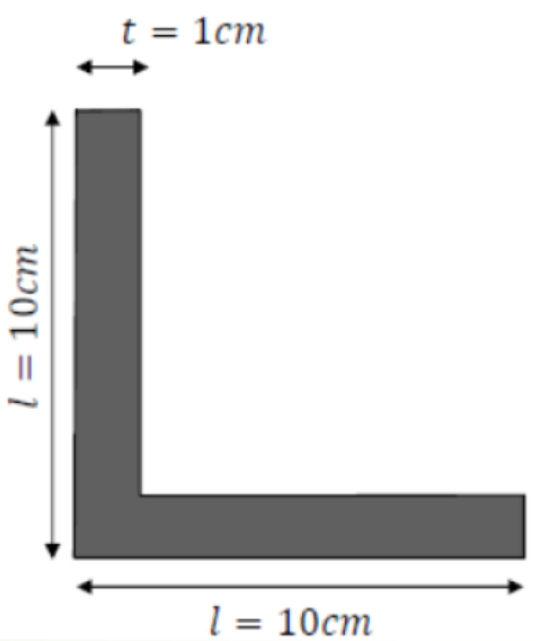
Reemplazando el α por α_0: $\tan(2\alpha_0) = \dfrac{2. I_{xy}}{(I_y - I_x)}$

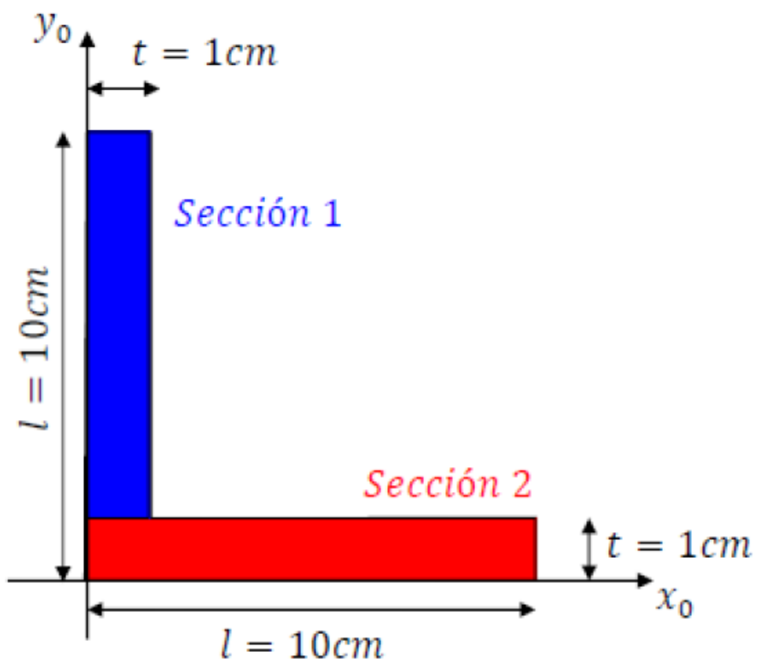
$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4{I_{xy}}^2}$$

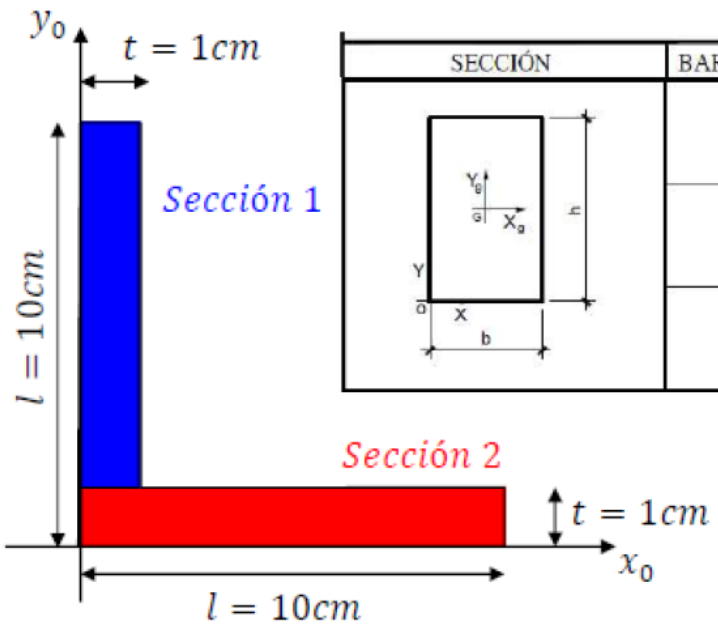
$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4{I_{xy}}^2}$$

$$\boxed{I_{I,II} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4{I_{xy}}^2}}$$

Calcular la posición de baricentro y los ejes y momentos de inercia principales baricéntricos.

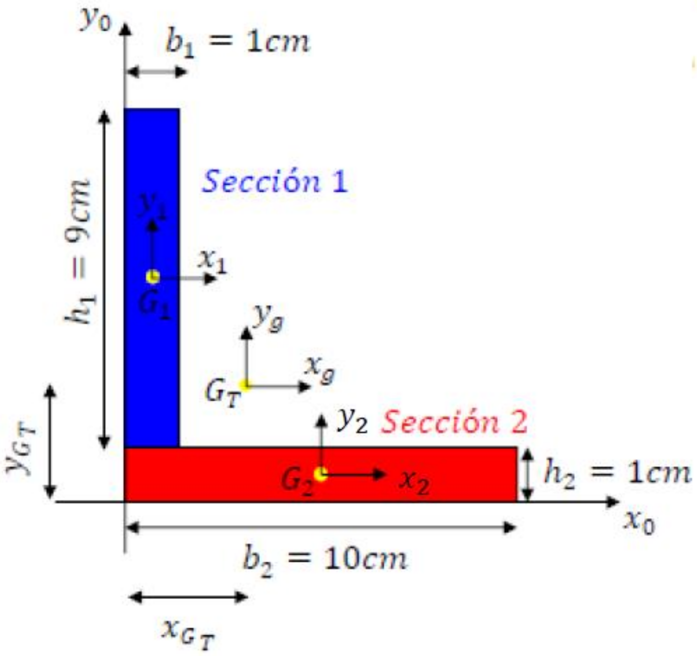






SECCIÓN	BARICENTRO / ÁREA	MOMENTOS DE INERCIA Y MOMENTOS CENTRIFUGOS	
	$x_g = \frac{b}{2}$	$J_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$	$J_{xg} = \frac{b \cdot h^3}{12}$
	$y_g = \frac{h}{2}$	$J_y = \frac{b^3 \cdot h}{3}$	$J_{yg} = \frac{b^3 \cdot h}{12}$
	$F = b \cdot h$	$J_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$	$J_{xyg} = 0$

Calculo el Baricentro de la Sección Compuesta:



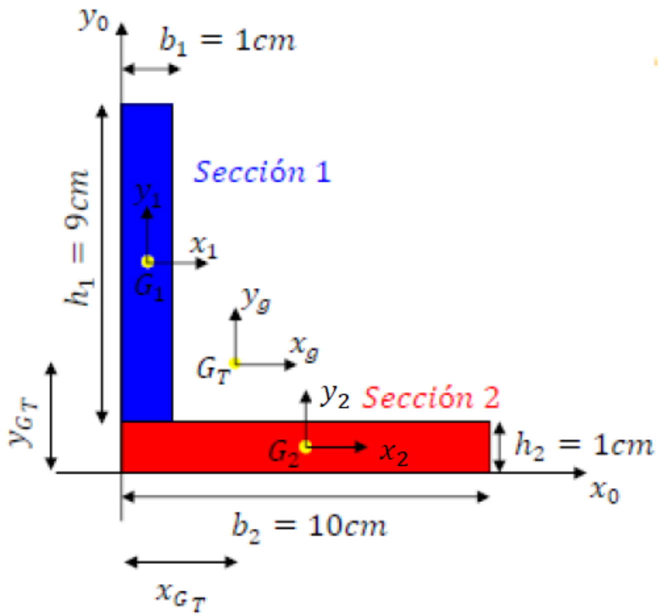
$$x_{G_T} = \frac{\sum x_{G_i} A_i}{\sum A_i} \qquad y_{G_T} = \frac{\sum y_{G_i} A_i}{\sum A_i}$$

$$x_{G_T} = \frac{0{,}5cm * 9cm^2 + 5cm * 10cm^2}{9cm^2 + 10cm^2} = 2{,}868cm$$

$$y_{G_T} = \frac{5{,}5cm * 9cm^2 + 0{,}5cm * 10cm^2}{9cm^2 + 10cm^2} = 2{,}868cm$$

$$\boxed{G_T = (2{,}868cm; 2{,}868cm)}$$

Calculo los Momentos de Inercia de cada Sección:



$$I_x = \frac{b * h^3}{12} \qquad I_y = \frac{h * b^3}{12}$$

$$I_{x_1} = \frac{1cm * (9cm)^3}{12} = 60{,}75cm^4$$

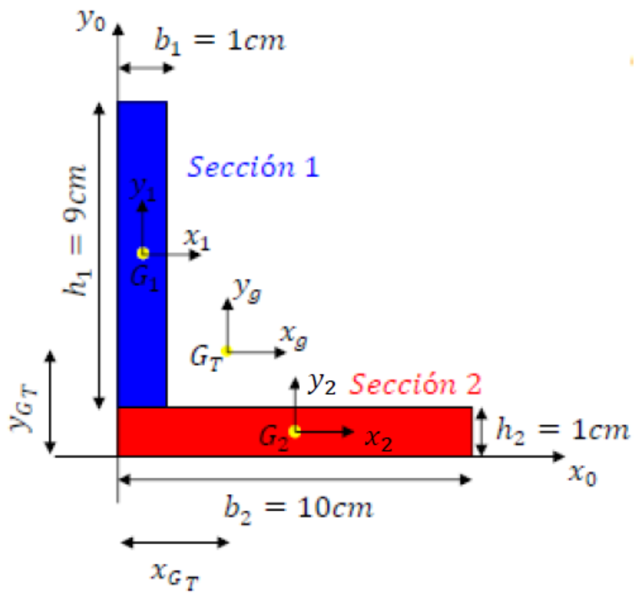
$$I_{y_1} = \frac{9cm * (1cm)^3}{12} = 0{,}75cm^4$$

$$I_{x_2} = \frac{10cm * (1cm)^3}{12} = 0{,}833cm^4$$

$$I_{y_2} = \frac{1cm * (10cm)^3}{12} = 83{,}333cm^4$$

$$I_{x_1 y_1} = 0 \qquad I_{x_2 y_2} = 0$$

Uso el Teorema de Steiner para calcular el Momento de Inercia en X de la Sección Compuesta:



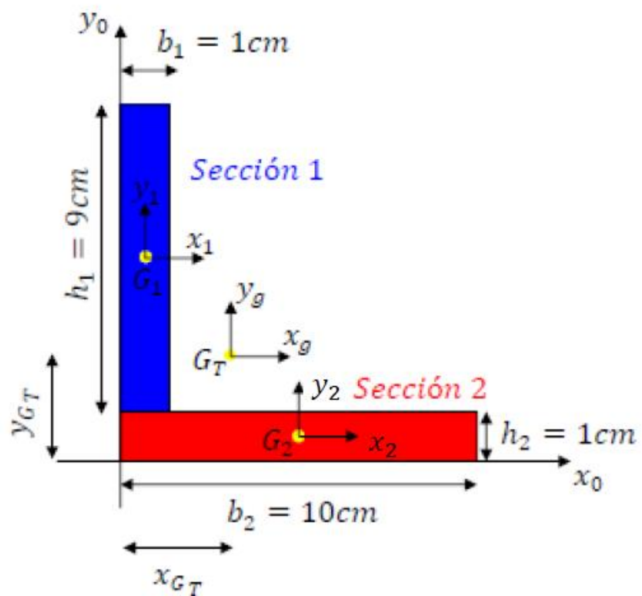
$$I_{x_g} = I_{x_1} + a_1^2 A_1 + I_{x_2} + a_2^2 A_2$$

$$a_1 = y_{G_T} - y_{G_1} = 2{,}868\text{cm} - 5{,}5\text{cm} = -2{,}632\text{cm}$$

$$a_2 = y_{G_T} - y_{G_2} = 2{,}868\text{cm} - 0{,}5\text{cm} = 2{,}368\text{cm}$$

$$I_{x_g} = 60{,}75cm^4 + (-2{,}632)^2 * 9cm^2 + 0{,}833cm^4 + (2{,}368)^2 * 10cm^2 = 180cm^4$$

Uso el Teorema de Steiner para calcular el Momento de Inercia en Y de la Sección Compuesta :



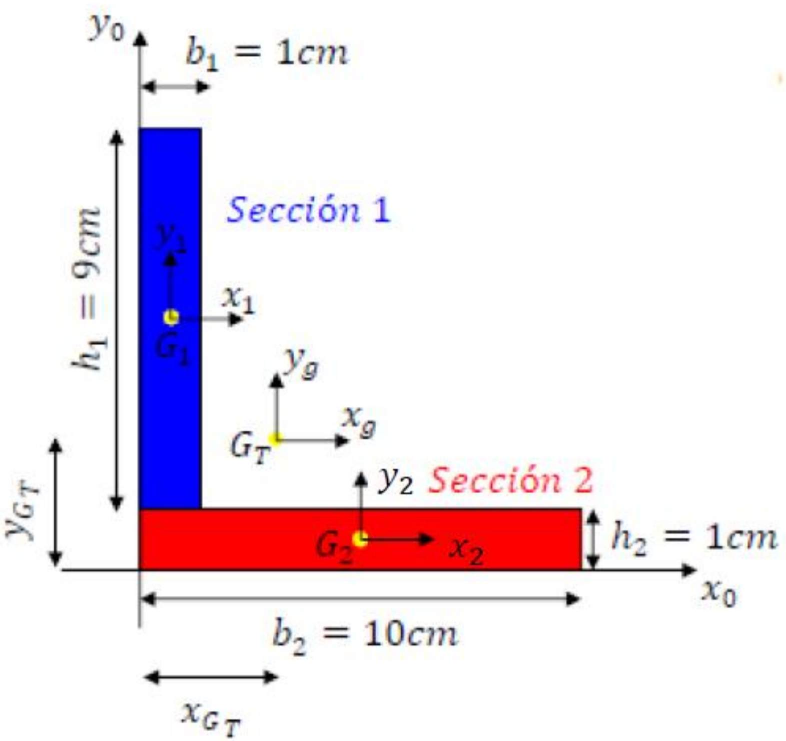
$$I_{y_g} = I_{y_1} + b_1^2 A_1 + I_{y_2} + b_2^2 A_2$$

$$b_1 = x_{G_T} - x_{G_1} = 2{,}868\text{cm} - 0{,}5\text{cm} = 2{,}368\text{cm}$$

$$b_2 = x_{G_T} - x_{G_2} = 2{,}868\text{cm} - 5\text{cm} = -2{,}132\text{cm}$$

$$I_{y_g} = 0{,}75cm^4 + (2{,}368)^2 * 9cm^2 + 83{,}333cm^4 + (-2{,}132)^2 * 10cm^2 = 180cm^4$$

Uso el Teorema de Steiner para calcular el Momento Centrífugo de la Sección Compuesta:



$$I_{x_g y_g} = I_{x_1 y_1} + a_1 b_1 A_1 + I_{x_2 y_2} + a_2 b_2 A_2$$

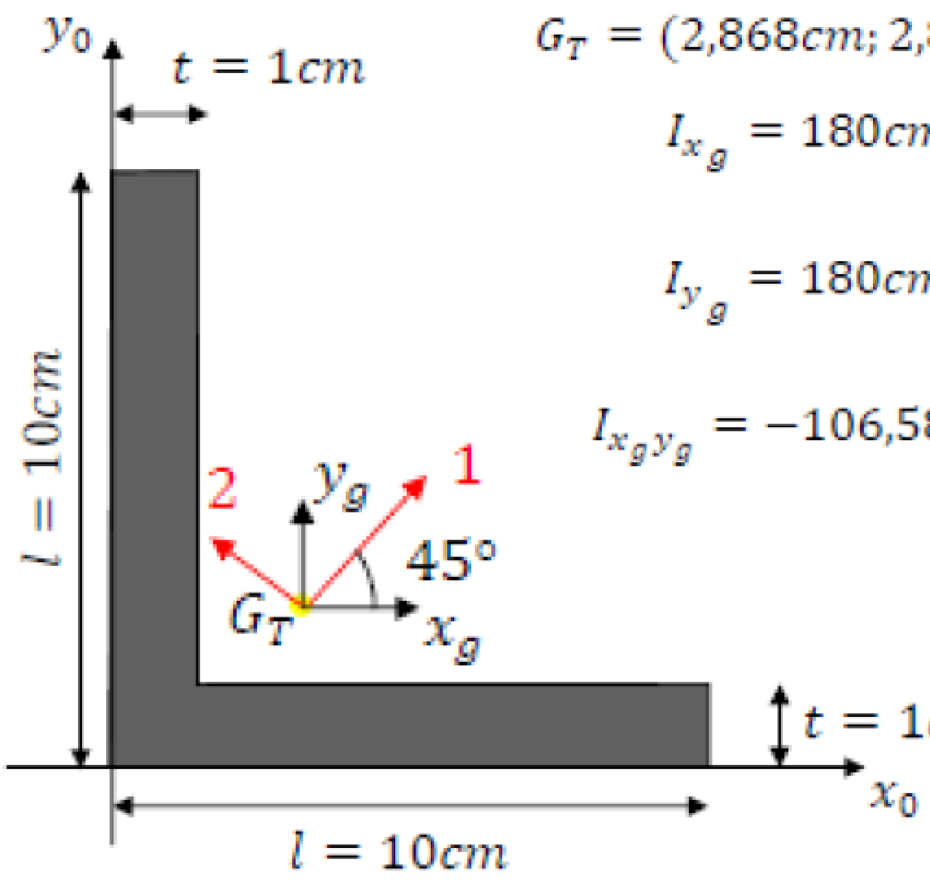
$$a_1 = y_{G_T} - y_{G_1} = 2{,}868\text{cm} - 5{,}5\text{cm} = -2{,}632\text{cm}$$

$$a_2 = y_{G_T} - y_{G_2} = 2{,}868\text{cm} - 0{,}5\text{cm} = 2{,}368\text{cm}$$

$$b_1 = x_{G_T} - x_{G_1} = 2{,}868\text{cm} - 0{,}5\text{cm} = 2{,}368\text{cm}$$

$$b_2 = x_{G_T} - x_{G_2} = 2{,}868\text{cm} - 5\text{cm} = -2{,}132\text{cm}$$

$$I_{x_g y_g} = 0cm^4 + (-2{,}632\text{cm})(2{,}368\text{cm}) * 9cm^2 + 0cm^4 + (2{,}368\text{cm})(-2{,}132\text{cm}) * 10cm^2 = -106{,}58cm^4$$



$G_T = (2{,}868cm; 2{,}868cm)$

$I_{x_g} = 180cm^4$

$I_{y_g} = 180cm^4$

$I_{x_g y_g} = -106{,}58cm^4$

Momentos de Inercia Principales:

$$I_{max-min} = \frac{I_{x_g} + I_{y_g}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_g} - I_{y_g}}{2}\right)^2 + {I_{x_g y_g}}^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_{max} &= 286{,}58cm^4 \\ I_{min} &= 73{,}43cm^4 \end{aligned}}$$

Ejes de Inercia Principales:

$$\tan(2\theta) = \frac{-2I_{x_g y_g}}{I_{x_g} - I_{y_g}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 2\theta &= 90° \\ \theta &= 45° \end{aligned}}$$