Análisis Matemático I
Clase 5: Continuidad y clasificación de discontinuidades. Teorema del valor intermedio. Introducción a asíntotas

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2025

Propiedades de las funciones continuas

Teorema

Supongamos que f y g son funciones definidas en un intervalo abierto I que contiene a c y que son continuas en $x = c$. Entonces las siguientes funciones son continuas en $x = c$:

- las funciones suma $f + g$ y diferencia $f - g$;
- las funciones multiplicación por constante $k.f$ $(k \in \mathbb{R})$ y producto $f.g$;
- la función cociente f/g, siempre que $g(c) \neq 0$;
- la función potencia f^n, donde $n \in \mathbb{N}$,
- la función raíz $\sqrt[n]{f}$, siempre que esté definida en un intervalo que contiene a c.

No demostrar

Ejemplos. Polinomios. Funciones racionales. Funciones trigonométricas.

Continuidad y discontinuidad

Concepto de discontinuidad

Si una función f no es continua en un punto c, entonces decimos que f es discontinua en c y que c es un punto de discontinuidad de f.

Observemos que c no pertenece necesariamente al dominio de f. En este curso, analizaremos la discontinuidad de functiones en puntos de su dominio y en puntos que se encuentran en el *borde o frontera* del dominio. Ejemplificaremos esto en la próxima diapositiva.

Continuidad y discontinuidad

Ejemplo: diga dónde es continua y dónde discontinua la siguiente función:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x(x-2)}.$$

Continuidad y discontinuidad

Ejemplo: diga dónde es continua y dónde discontinua la siguiente función:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x(x-2)}.$$

Solución: observar que la función g no asigna imagen a $x = 0$ y $x = 2$ (en esos puntos se anula el denominador). Luego, g no es continua en dichos puntos.
Además, dado que g es un cociente de funciones continuas (ambas son polinomios), la propiedad 3 del teorema de la diapositiva 14 nos dice que g es continua en todo punto que no anule el denominador. En conclusión, g es continua en:

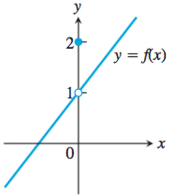
$$\mathbb{R} - \{0, 2\}.$$

Observación: si bien $x = 0$ y $x = 2$ no pertenecen al dominio de g, analizamos la discontinuidad de g allí porque son puntos **borde o frontera** del dominio de g.

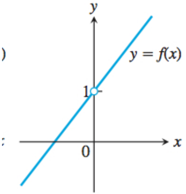
Clasificación de discontinuidades

- **Discontinuidad Evitable (se puede salvar la discontinuidad)**
  - $f(c)$ y $\lim_{x \to c} f(x)$ existen pero:

$$f(c) \neq \lim_{x \to c} f(x).$$



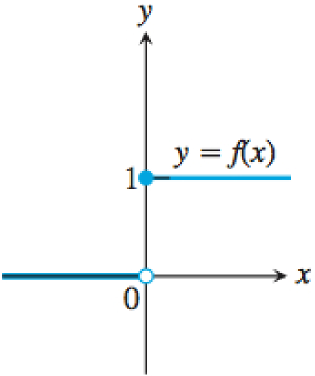
  - $f(c)$ no existe (es decir, c no pertenece al dominio de f), pero $\lim_{x \to c} f(x)$ sí existe:



Clasificación de discontinuidades

- **Discontinuidad de Salto (NO se puede salvar la discontinuidad)**
  - $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe pero:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \text{ y } \lim_{x\to c^+} f(x) \text{ existen.}$$

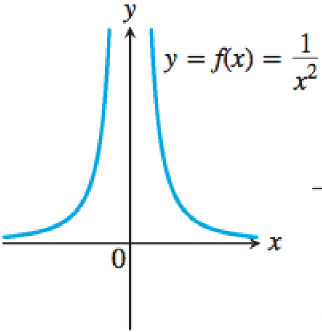


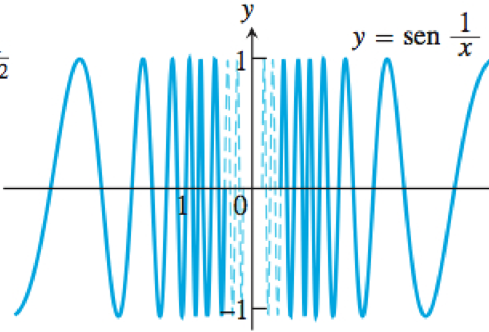
Observación: no interesa si f está o no definida en c.

Clasificación de discontinuidades

- **Discontinuidad esencial (NO se puede salvar la discontinuidad)**
  - Al menos uno de los límites laterales no existe. Es decir:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \text{ o } \lim_{x \to c^+} f(x) \text{ no existe.}$$





Observación: no interesa si f está o no definida en c.

Ejemplo: clasificar las discontinuidades de:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x(x-2)}.$$

Ejemplo: clasificar las discontinuidades de:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x(x-2)}.$$

Solución: anteriormente se obtuvo que g es discontinua en $x = 0$ y $x = 2$. Veamos qué tipo de discontinuidad tenemos en cada caso.
-Para $x = 2$: analizamos los límites laterales

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x+2)}{x} = 2$$

y

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x+2)}{x} = 2.$$

Por lo tanto

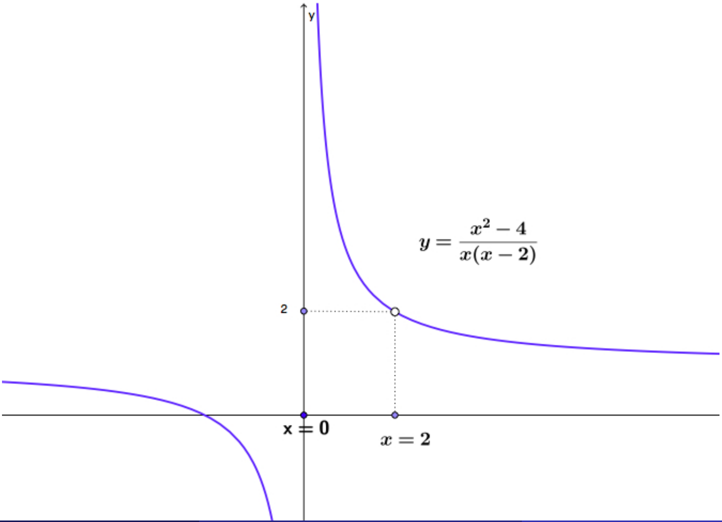
$$\lim_{x \to 2} g(x) = 2$$

y g tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

-Para $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 4}{x(x-2)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x+2)}{x} = +\infty$$

por ende la discontinuidad de g en $x = 0$ es esencial.



Teorema del valor intermedio: motivación

Ejemplo: La ecuación que describe las frecuencias naturales de una estructura con múltiples grados de libertad (por ejemplo, una estructura de varios pisos o un puente con múltiples vigas) puede convertirse en una ecuación de cuarto orden. En este caso, se puede obtener una ecuación del tipo:

$$m_4\omega^4 + m_3\omega^3 + m_2\omega^2 + m_1\omega + m_0 = 0$$

Donde:

- m_4, m_3, m_2, m_1, m_0 son constantes derivadas de las propiedades físicas de la estructura,
- ω es la frecuencia angular de vibración.

Este tipo de ecuación algebraica cuártica es fundamental para el análisis de la dinámica estructural, ya que permite calcular las frecuencias de resonancia que son críticas para evitar fallos estructurales.

Teorema del valor intermedio: motivación

Ejemplo: La ecuación que describe las frecuencias naturales de una estructura con múltiples grados de libertad (por ejemplo, una estructura de varios pisos o un puente con múltiples vigas) puede convertirse en una ecuación de cuarto orden. En este caso, se puede obtener una ecuación del tipo:

$$m_4\omega^4 + m_3\omega^3 + m_2\omega^2 + m_1\omega + m_0 = 0$$

Donde:

- m_4, m_3, m_2, m_1, m_0 son constantes derivadas de las propiedades físicas de la estructura,
- ω es la frecuencia angular de vibración.

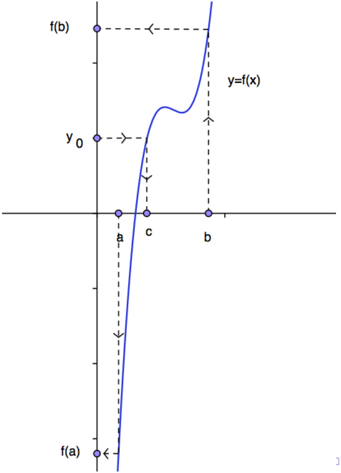
Este tipo de ecuación algebraica cuártica es fundamental para el análisis de la dinámica estructural, ya que permite calcular las frecuencias de resonancia que son críticas para evitar fallos estructurales.

Resolver ecuaciones complejas puede no ser una tarea fácil. Sin embargo, utilizando el teorema del valor intermedio y herramientas numéricas, se puede dar con la solución o una aproximación a ella.

Teorema del valor intermedio

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Sea y_0 un número real entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que:

$$f(c) = y_0.$$



Teorema del valor intermedio

Ahora podemos aplicar el Teorema del Valor Intemedio para la resolución de las preguntas de motivación. Más adelante veremos otras aplicaciones del teorema.

- ¿Existe x tal que:

$$x^5 - 10x^2 + 3x - 1 = 0?$$

Introducimos la función:

$$f(x) = x^5 - 10x^2 + 3x - 1$$

que es continua en $\mathbb{R}$. Observar que:

$$f(0) < 0 \quad \text{y} \quad f(3) > 0.$$

Tomando $y_0 = 0$ en el teorema del valor intermedio, se tiene la existencia de $c \in [0, 3]$ tal que:

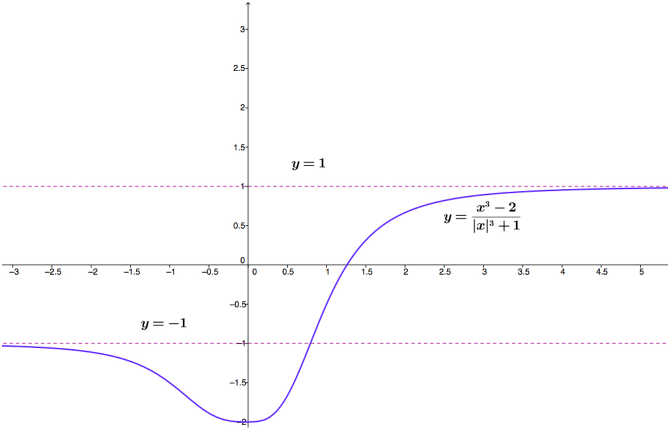
$$f(c) = 0.$$

Así, $x = c$ resuelve la ecuación:

$$x^5 - 10x^2 + 3x - 1 = 0.$$

Asíntotas horizontales

Considere el siguiente gráfico:



La distancia (vertical) entre las imágenes de $y = \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$ **y de la recta** $y = 1$ **tiende a cero a medida que** x **se hace cada vez mayor.**

Asíntotas horizontales

Definición de Asíntota Horizontal

Decimos que la recta horizontal $y = b$ es una asíntota horizontal de la función $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b,$$

o:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Observación: Así, la recta $y = b$ es una asíntota horizontal de $y = f(x)$ si la distancia entre b y los valores de la función $f(x)$ tiende a cero cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$.

Asíntotas horizontales

Ejemplo: determine las asíntotas horizontales de:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}.$$

Solución: cuando se desea obtener un límite de la forma:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios, entonces se divide el numerador y el denominador por x elevada al grado del denominador. Este procedimiento permite eliminar potencias y simplificar los términos. Apliquemos lo anterior para calcular el límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}.$$

Primero observe que como $x \to +\infty$, se tiene que $|x| = x$ y entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{x^3 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3 - 2}{x^3}}{\frac{x^3 + 1}{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3}}.$$

Cuando x tiende a $+\infty$, los cocientes:

$$\frac{1}{x^3} \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{x^3}$$

tienden a cero. Así:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = 1.$$

Por lo tanto, $y = 1$ es una asíntota horizontal de f.

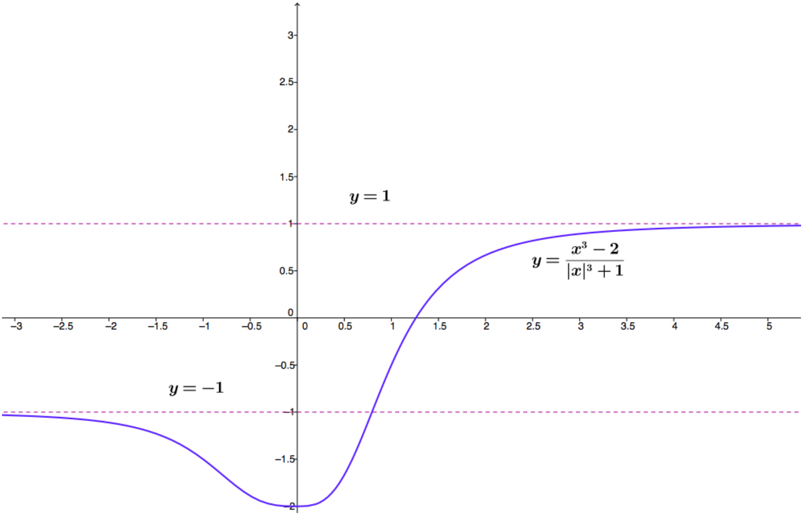
Asíntotas horizontales

En forma similar y observando que cuando $x \to -\infty$ el valor absoluto de x es $-x$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2}{|x|^3+1} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2}{(-x)^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2}{-x^3+1} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\dfrac{2}{x^3}}{-1+\dfrac{1}{x^3}} = \frac{1-0}{-1+0} = -1.\end{aligned}$$

Así, $y=-1$ es otra asíntota horizontal de f.

Asíntotas horizontales



Observar que la gráfica de una función puede cortar a la asíntota.

Eejercicio para hacer en el aula: encuentre y clasifique las discontinuidades de

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Además, compruebe si f tiene asíntotas horizontales.