SISTEMAS DE FUERZAS EN EL PLANO Y EL ESPACIO

ESTABILIDAD I

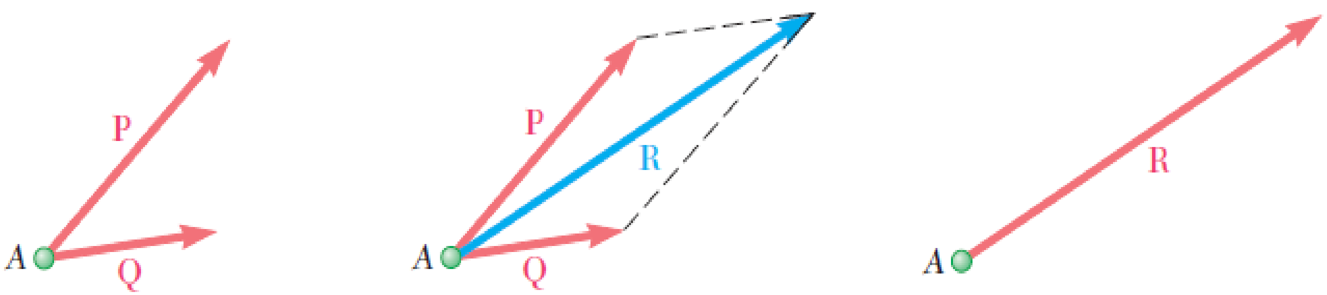
FACULTAD DE INGENIERÍA

UNCUYO

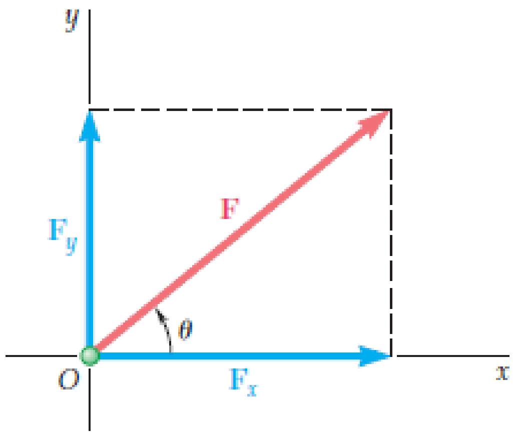
SISTEMAS DE FUERZAS CONCURRENTES EN EL PLANO

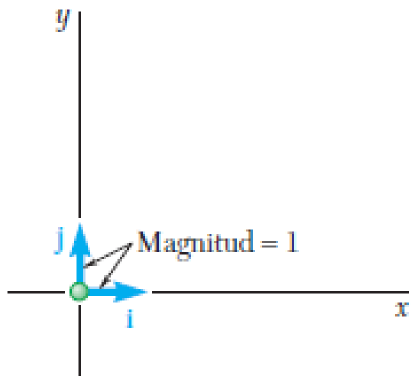
Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro y se caracteriza por su *punto de aplicación, magnitud o módulo y dirección.*

Si dos fuerzas P y Q actúan sobre una partícula A pueden sustituirse por una única fuerza R que produce el mismo efecto sobre la partícula y se denomina **Resultante**.



Descomposición de una fuerza en sus componentes rectangulares





$\mathbf{F_x} = F_x\,\mathbf{i}$ $\mathbf{F_y} = F_y\,\mathbf{j}$

$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j}$

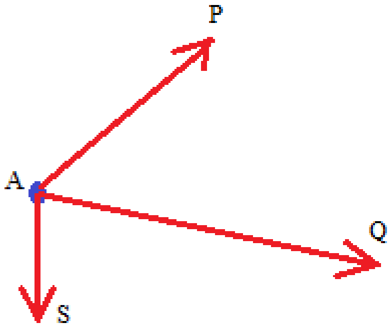
Representación vectorial

$F_x = F\ \cos\theta$ $F_y = F\ \sin\theta$

$\sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2}}$

Representación escalar

Resultante de varias fuerzas concurrentes



$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S}$$

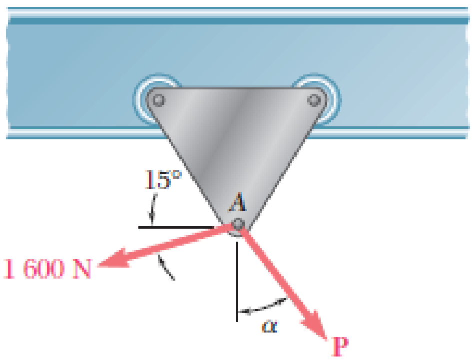
$$\mathbf{R} = R_x\,\mathbf{i} + R_y\,\mathbf{j} = (P_x + Q_x + S_x)\,\mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y)\,\mathbf{j}$$

$$R_x = P_x + Q_x + S_x \qquad R_y = P_y + Q_y + S_y$$

$$R_x = \sum F_x \qquad R_y = \sum F_y$$

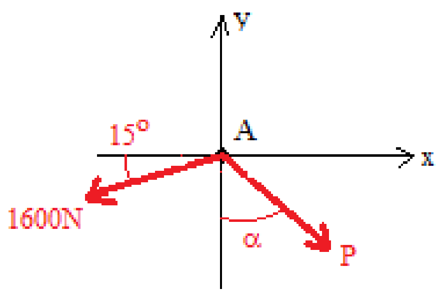
Magnitud o intensidad de cada componente de la resultante

EJEMPLO



Un carrito que se mueve a lo largo de una viga horizontal está sometido a dos fuerzas, como se muestra en la figura. *a*) Si se sabe que $\alpha = 25°$, determine por trigonometría la magnitud de la fuerza **P** tal que la fuerza resultante ejercida sobre el carrito sea vertical. *b*) ¿Cuál es la magnitud correspondiente de la resultante?

Diagrama de cuerpo libre (dcl)



$$\sum F_x = R_x = 0$$

$$P \sin 25 - 1600N \ \cos 15 \ = 0$$

$$P \ = 1600 \ \frac{\cos 15}{\sin 25} \ = 3657N$$

$$\boxed{P \ = 3657 \ N}$$

$$\sum F_y = R_y \ = 1600 \ \sin 15 \ + 3657 \ \cos 25$$

$$\boxed{R_y \ = 3728{,}5 \ N}$$

Equilibrio de una partícula en el plano. Sistema de fuerzas concurrentes.

Una partícula, sobre la que actúa un sistema de fuerzas concurrentes, estará en equilibrio cuando la resultante de las fuerzas actuantes en la misma es nula.

$$R_x = \sum F_x = 0 \qquad R_y = \sum F_y = 0$$

Ejemplo

Una conexión soldada está en equilibrio bajo la acción de la cuatro fuerzas que se muestran en la figura. Si se sabe que F_A = 8kN y que F_B = 16 kN determine la magnitud de las fuerzas restantes.

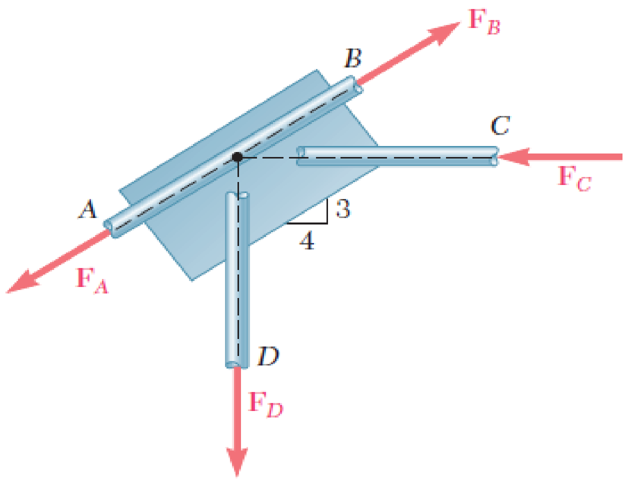
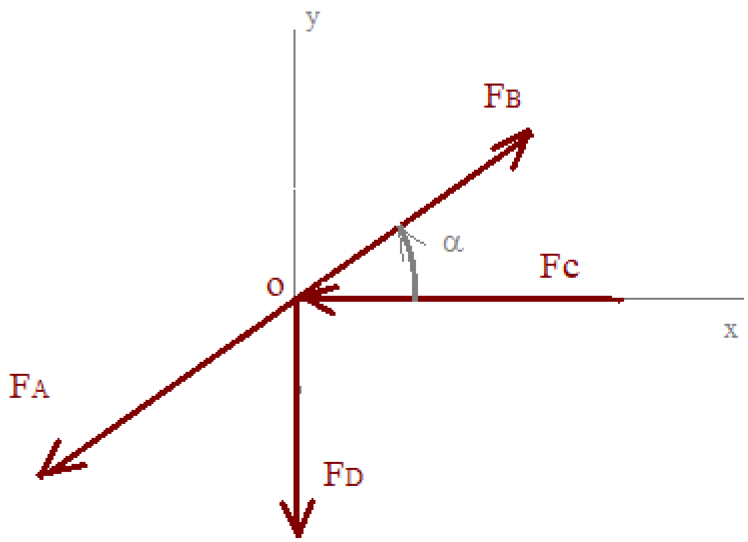


Diagrama de cuerpo libre

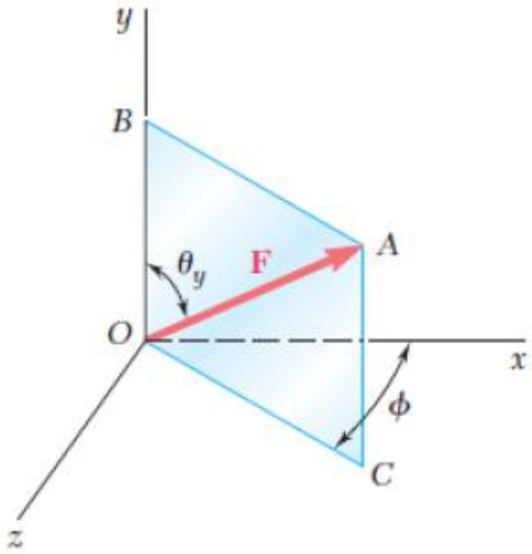


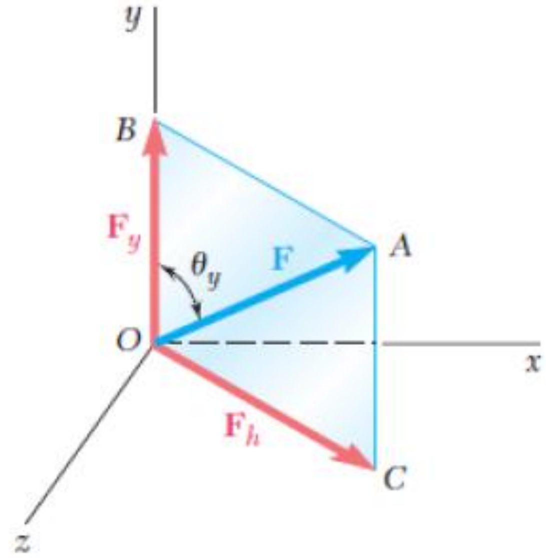
$$\tan\alpha = \frac{3}{4} \qquad \sin\alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sum F_x = 0 \quad -F_A\cos\alpha + F_B\cos\alpha - F_C = 0 \qquad \therefore \boxed{F_C = 6.4\,kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad -F_D - F_A\sin\alpha + F_B\sin\alpha = 0 \qquad \therefore \boxed{F_D = 4.8\,kN}$$

SISTEMAS DE FUERZAS CONCURRENTES EN EL ESPACIO





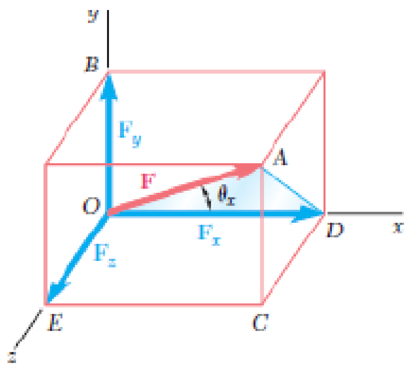
$$F_y = F\ \cos\theta_y \qquad F_h = F\ \sin\theta_y$$

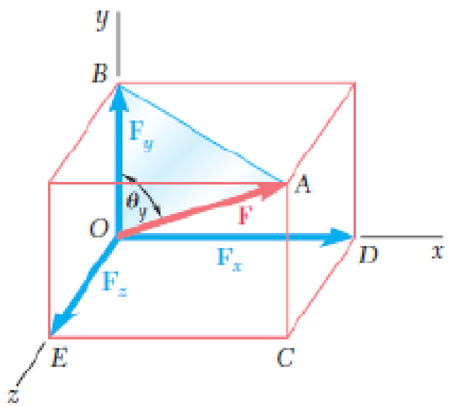
$$F_x = F_h \cos\emptyset\ = F\ \sin\theta_y\ \cos\emptyset$$

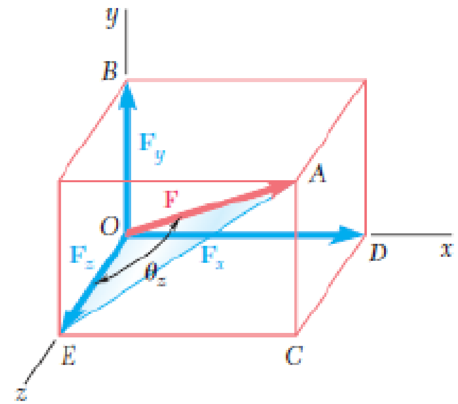
$$F_z = F_h \sin\emptyset\ = F\ \sin\theta_y\ \sin\emptyset$$

$$F = \sqrt{F^2{}_x + F^2{}_y + F^2{}_z}$$

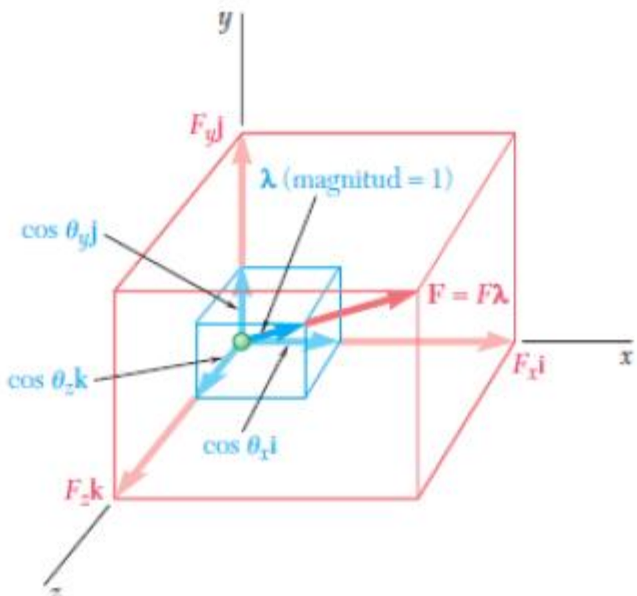
Relación de **F** con los ejes *x,y,z*







$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F_y = F\cos\theta_y \qquad F_z = F\ \cos\theta_z$$



$$\mathbf{F} = \mathrm{F_x}\,\mathbf{i} + \mathrm{F_y}\,\mathbf{j} + \mathrm{F_z}\,\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{F} = F\left(\cos\theta_x\boldsymbol{i}\ +\ \cos\theta_y\boldsymbol{j}\ +\cos\theta_z\boldsymbol{k}\right)$$

$$\cos^2\theta_x\ +\ \cos^2\theta_y\ +\cos^2\theta_z = \mathbf{1}$$

Resultante de un sistema de fuerzas concurrentes en el espacio

$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} = \Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k})$$
$$= (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k}$$

$$R_x = \sum F_x \qquad R_y = \sum F_y \qquad R_z = \sum F_z$$

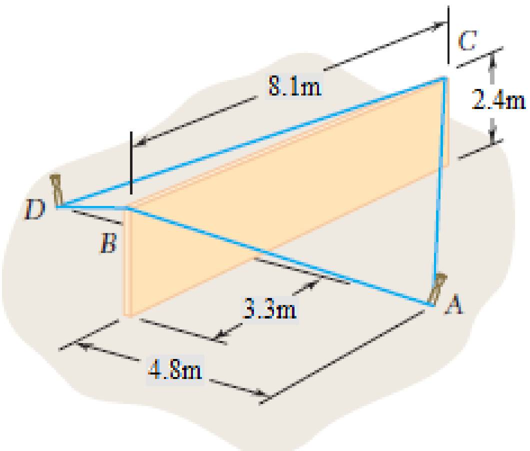
$$R = \sqrt{R^2{}_x + R^2{}_y + R^2{}_z}$$

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} \qquad \cos\theta_z = \frac{R_z}{R}$$

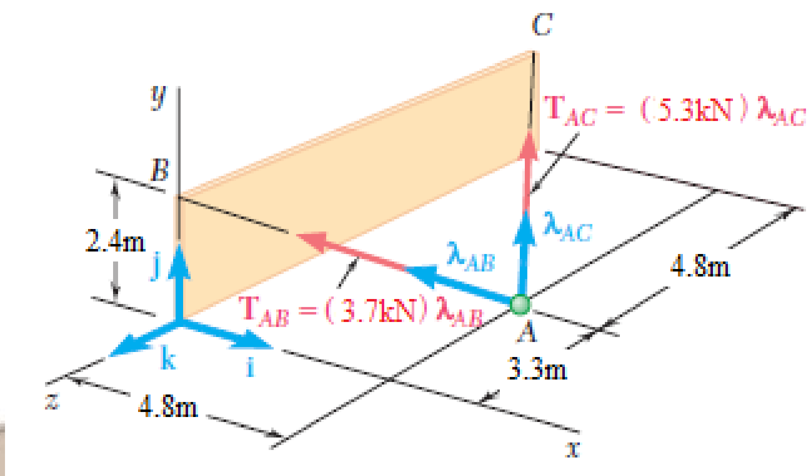
Para garantizar el equilibrio de una partícula, bajo la acción de un sistema espacial de fuerzas concurrentes, se debe cumplir:

$$\boxed{\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0}$$

Ejemplo



Un muro de hormigón prefabricado se sostiene temporalmente por los cables mostrados en la figura. Se sabe que la fuerza en el cable **AB** es de 3.7kN y en el cable **AC** es de 5.3kN. Determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables **AB** y **AC** sobre la estaca A.



Se determinarás primero las componentes y la magnitud de los vectores **AB** y **AC** midiéndolos desde A hacia la pared

AB = -4.8m **i** + 2.4 **j** + 3.3m **k** AB=6.3m

AC = -4.8m **i** + 2.4 **j** - 4.8m **k** AC=7.2m

Las fuerzas en los cables será:

$$\boldsymbol{T_{AB}} = \frac{3.7kN}{6.3m}\,[-4.8m\,\mathbf{i} + 2.4m\,\mathbf{j} + 3.3m\,\mathbf{k}]$$

$$\boldsymbol{T_{AB}} = -2.82kN\,\mathbf{i} + 1.41\,kN\,\mathbf{j} + 1.94kN\,\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{T_{AC}} = \frac{5.3kN}{7.2m}\,[-4.8m\,\mathbf{i} + 2.4m\,\mathbf{j} - 4.8m\,\mathbf{k}]$$

$$\boldsymbol{T_{AC}} = -3.53kN\,\mathbf{i} + 1.77\,kN\,\mathbf{j} - 3.53kN\,\mathbf{k}$$

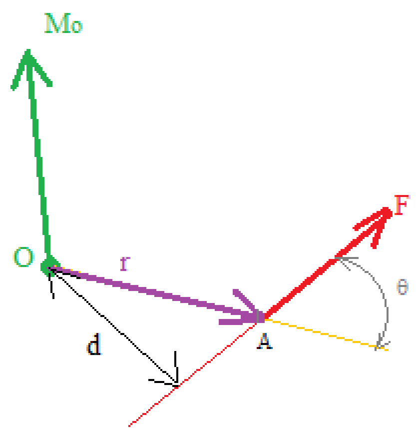
La resultante sobre la estaca A será:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{T_{AB}} + \boldsymbol{T_{AC}} = -6.35\,kN\,\mathbf{i} + 3.18\,kN\,\mathbf{j} - 1.59\,kN\,\mathbf{k}$$

$$R = \sqrt{6.35^2 + 3.18^2 + 1.59^2} = 7.28\,kN$$

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} \qquad \cos\theta_z = \frac{R_z}{R}$$

Momento de una fuerza



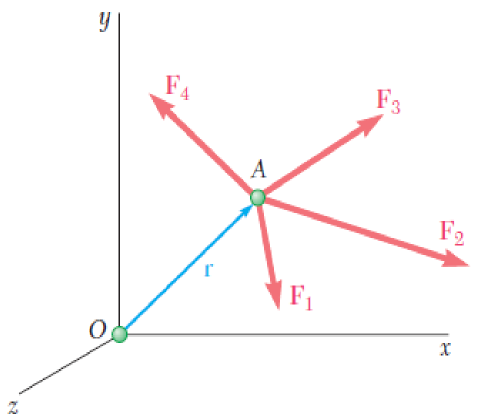
La fuerza **F** actúa en un punto A de un cuerpo rígido, la posición de A se define con el vector **r** que une el punto de referencia O con A. Ambos vectores **F** y **r** definen un plano.

Se define al momento de **F** respecto de O como:

$$\mathbf{Mo} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$M_O = r.F \, sen\,\theta = F.d$$

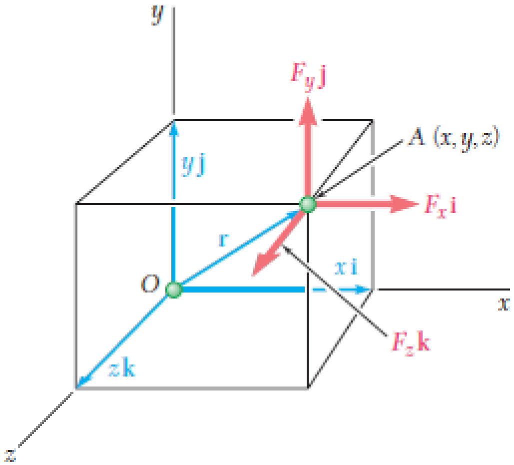
Teorema de Varignon



$$\boldsymbol{M^R}_{\boldsymbol{O}} = \boldsymbol{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F_3} + \boldsymbol{F_4})$$
$$= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F_3} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F_4}$$

«el momento con respecto a un punto O de la resultante de las fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de cada fuerza con respecto a O».

Componentes rectangulares del momento de una fuerza.

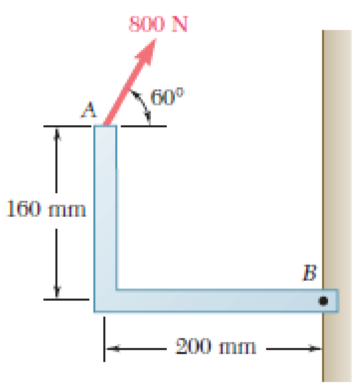


$$\boldsymbol{Mo} = M_x\,\mathbf{i} + M_y\,\mathbf{j} + M_z\,\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{M}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Una fuerza de 800 N actúa sobre una ménsula, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza con respecto a B.

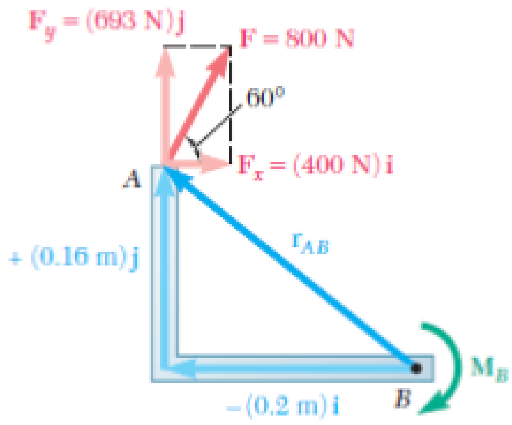


$$\boldsymbol{M_B} = \boldsymbol{r}_{AB} \text{ x } \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{r}_{AB} = -0.20m\,\mathbf{i} + 0.16m\,\mathbf{j}$$

$$\boldsymbol{F} = 800N\ \cos 60\,\mathbf{i} + 800N\ \sin 60\,\mathbf{j}$$

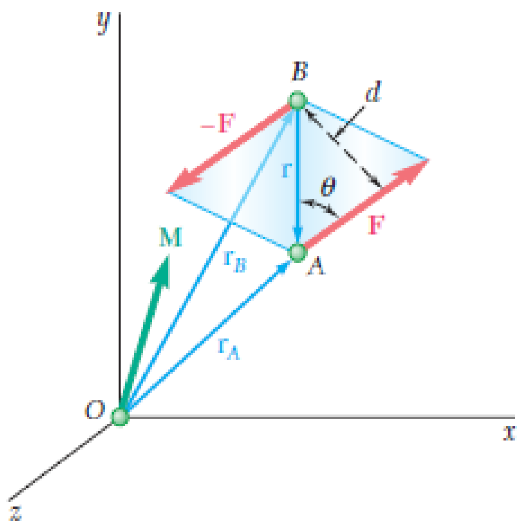
$$\boldsymbol{F} = 400N\,\mathbf{i} + 693N\,\mathbf{j}$$



$$\boldsymbol{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0.2m & 0.16m & 0m \\ 400N & 693N & 0N \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_B = -202.6Nm\,\mathbf{k}$$

Momento de un par



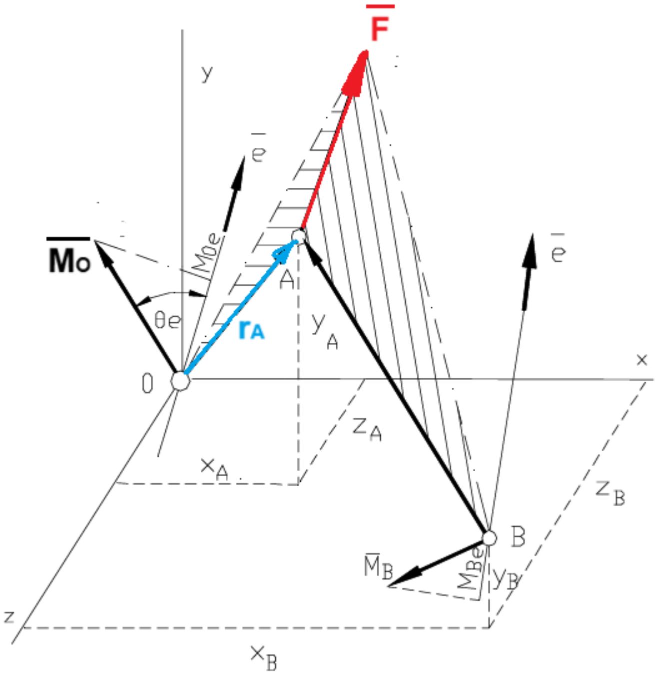
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{r}_B\,(-\boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B) \times \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

$$M = r.F\,sen\theta = F.d$$

Momento de una fuerza respecto de un eje.

Se define como ***momento de la fuerza F respecto al eje Oe*** a la proyección sobre dicho eje, del vector momento de la fuerza respecto a un punto del eje.

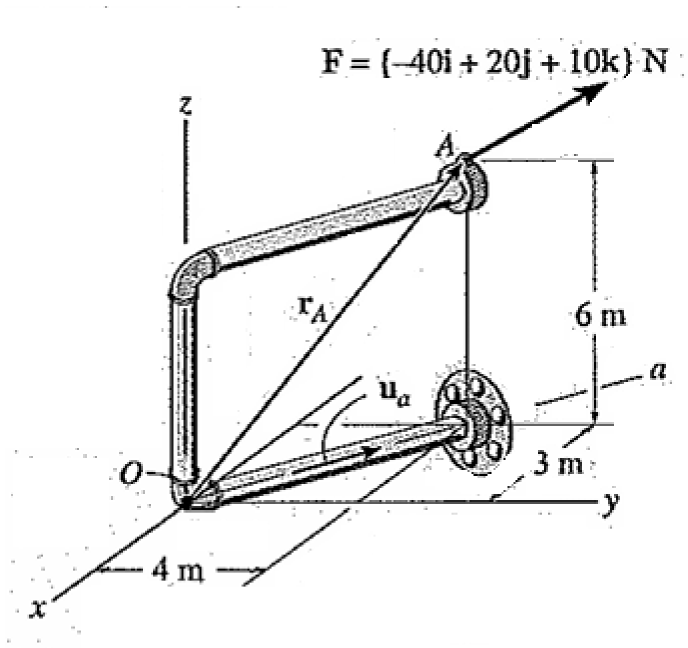


$$M_{Oe} = M_O\ cos\theta_e = \overline{M_O}.\,\bar{e}$$

$$M_{Oe} = \left(e_x\bar{\boldsymbol{\imath}} + e_y\bar{\boldsymbol{\jmath}} + e_k\bar{\boldsymbol{k}}\right).\,\bar{r}_A \wedge \bar{F}$$

$$M_{Oe} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Ejemplo: Calcular el momento de la fuerza F respecto del eje a que pasa por O.



$$r_A = (-3,4,6)$$

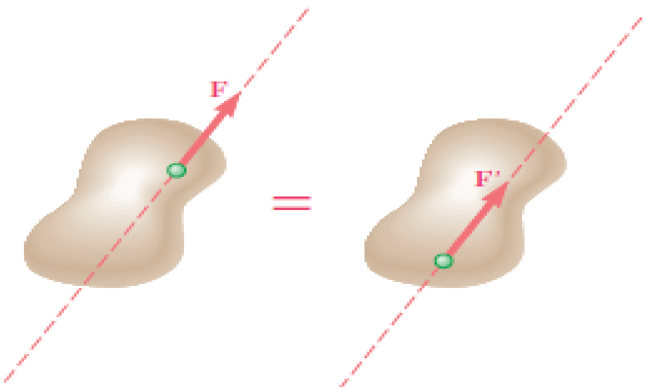
$$u_A = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$$

$$M_a = \begin{vmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \\ -40 & 20 & 10 \end{vmatrix}$$

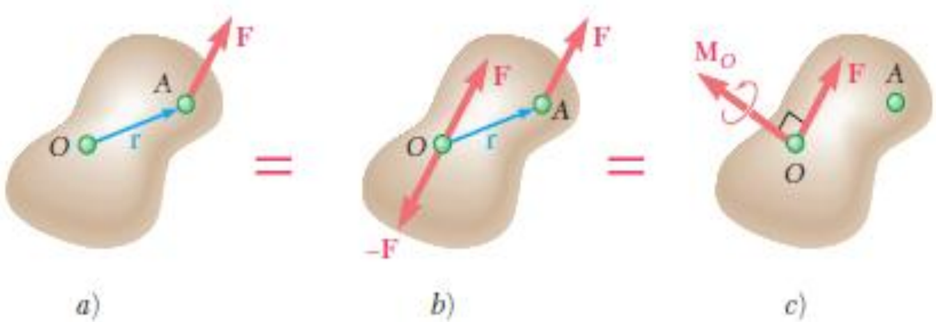
$$M_a = (40 - 120).(-3/5) - (-30 + 240).(4/5)$$

$$\boxed{M_a = -120Nm}$$

Sistema equivalentes de fuerzas



Principio de Transmisibilidad



Transformación de una fuerza en una fuerza y un par