Análisis Matemático I
Clase 6: asíntotas verticales y oblicuas. Introducción a derivadas

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2025

Objetivo de la clase:
se espera que el estudiante complete la comprensión de las propiedades básicas de límites y continuidad y las aplique al análisis de algunos aspectos de las funciones.
También, se espera que el estudiante comience a familiarizarse con el concepto de derivada de una función.

Asíntotas verticales

Evalúe los siguientes límites dándole valores a x:

- $$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} =$$

Asíntotas verticales

Evalúe los siguientes límites dándole valores a x:

- $$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Asíntotas verticales

Evalúe los siguientes límites dándole valores a x:

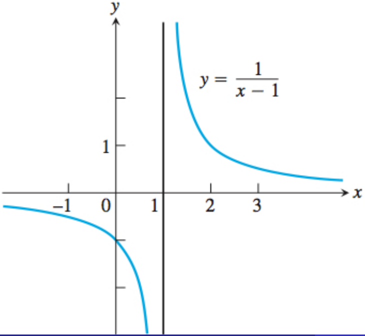
- $$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

- $$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} =$$

Evalúe los siguientes límites dándole valores a x:

- $$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

- $$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$



Asíntotas verticales

Definición de Asíntota Vertical

Decimos que $x = a$ es una asíntota vertical de la función $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty (\text{ o } -\infty)$$

o:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty (\text{ o } -\infty).$$

Así, la función:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

tiene una asíntota vertical de ecuación $x = 1$.

Ejemplo. Encontrar las asíntotas verticales de:

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 3x + 2}.$$

Solución. Primero buscamos los puntos de discontinuidad de la función. Como f es una función racional, los puntos de discontinuidad se dan donde el denominador en la expresión de f se anula. En este caso:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

Ahora vamos a estudiar que pasa con los límites laterales en $x = 1$ y $x = 2$. Comenzamos con $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2}{(x-1)(x-2)}.$$

Cuando $x \to 1^-$, el producto $(x-1)(x-2)$ es positivo y tiende a cero. Luego, si dividimos 2 por $(x-1)(x-2)$, el resultado es positivo pero cada vez más grande.

Asíntota vertical

Así:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{(x-1)(x-2)} = +\infty.$$

Por lo tanto, $x = 1$ es una asíntota vertical. No es necesario ver que el otro límite lateral cuando $x \to 1^+$ tambien es infinito, ya que en la definición de asíntota vertical tenemos disyunciones.
Para $x = 2$ tenemos:

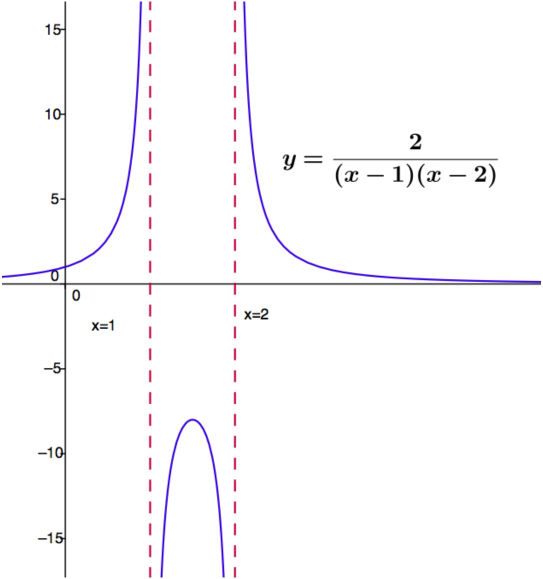
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2}{(x-1)(x-2)}.$$

Razonando como en el caso anterior, se concluye que:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2}{x^2-3x+2} = -\infty.$$

Así, $x = 2$ es asíntota vertical de f.

Asíntota vertical



Asíntota oblicua

Asíntota oblicua

Una recta $y = ax + b$, con $a \neq 0$, es una asíntota oblicua de la función $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

o:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Ejemplo: determine la asíntota oblicua de:

$$y = \frac{x^2 - 3}{2x - 4} \qquad \text{(aplicar división de polinomios)}$$

Asíntota oblicua

Para determinar la asíntota oblicua de:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

aplicamos división de polinomios.

Asíntota oblicua

Para determinar la asíntota oblicua de:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

aplicamos división de polinomios.
Recordar que si P y Q son polinomios, entonces:

$$P(x) = C(x)Q(x) + R(x),$$

donde R es el resto y C el cociente de la división. Dividiendo por $Q(x)$, se obtiene:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Asíntota oblicua

Volviendo a:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4},$$

tenemos:

$$R(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad C(x) = \frac{1}{2}x + 1.$$

Por lo tanto:

$$\frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

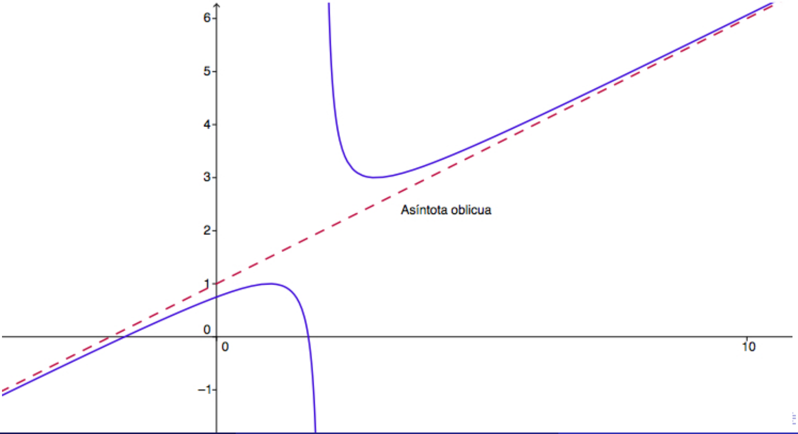
$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{2x - 4}.$$

Asíntota oblicua

Entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x - 4} = 0$$

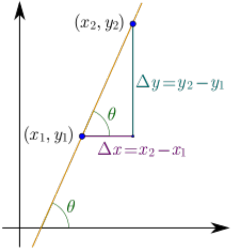
por lo que la recta $y = 1/2x + 1$ cumple la definición de asíntota oblicua.



Introducción a Derivadas

Motivación: pendiente de una recta

Recordar:



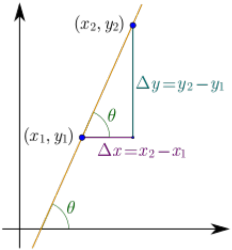
Pendiente de la recta:

$$m = \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Observar que la pendiente de una recta es la misma en cada punto de la misma.

Motivación: pendiente de una recta

Recordar:



Pendiente de la recta:

$$m = \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Observar que la pendiente de una recta es la misma en cada punto de la misma.

Ahora, ¿cómo se determina la pendiente de una curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ de dicha curva? Antes de responder esta pregunta, veamos algunas aplicaciones.

Aplicaciones del concepto de pendiente a fenómenos no lineales

En ingeniería de materiales, la pendiente también juega un papel importante en el **análisis de la relación esfuerzo-deformación** de un material bajo carga.

En **ingeniería ambiental**, la pendiente también puede aplicarse a la **distribución de contaminantes** en un terreno o río. Si se estudia la propagación de un contaminante en el aire o en el agua, la pendiente puede representar la tasa de cambio de la concentración de contaminantes a lo largo del tiempo o de la distancia.

En ingeniería mecánica, el concepto de pendiente se utiliza en el **análisis de estructuras**, el **cálculo de fuerzas** y **momentos** que actúan sobre componentes, como vigas, columnas y otros elementos de una estructura.

Aplicaciones del concepto de pendiente

En la ingeniería hidráulica, la pendiente es un concepto crucial para el **diseño de canales**, **drenajes** y **tuberías**, ya que controla la **velocidad** del flujo de agua y su capacidad para transportar materiales (como sedimentos o residuos) o para el drenaje eficiente.

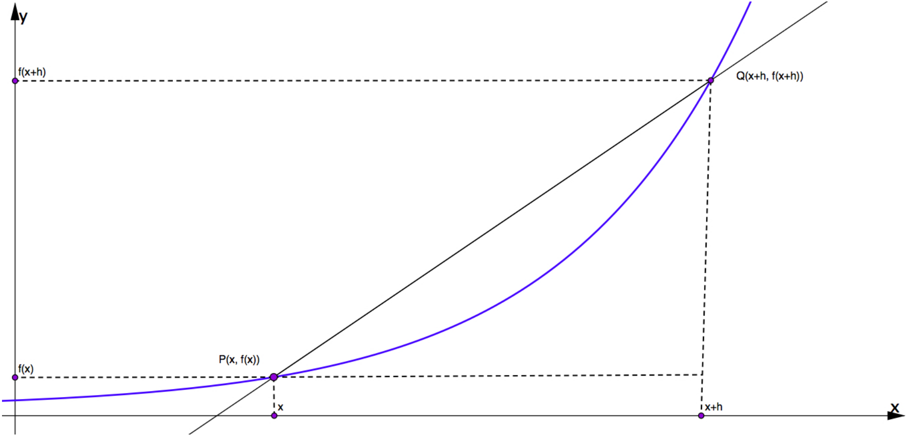
En **aprendizaje automático** (machine learning), la pendiente juega un papel crucial en los **algoritmos de optimización**, especialmente en el proceso de **descenso por gradiente**. El **gradiente** de una función es la **pendiente** de la función en un punto específico, y se utiliza para minimizar o maximizar una función objetivo.

Ejemplo:

- En el **entrenamiento de redes neuronales**, el algoritmo de **descenso de gradiente** ajusta los pesos de la red para minimizar la **función de pérdida**. Este proceso se realiza calculando la derivada (pendiente) de la función de pérdida con respecto a los parámetros del modelo (como los pesos de la red neuronal). En cada iteración, la pendiente indica la dirección en la que los parámetros deben ajustarse.

Ahora bien, dada una curva suave $y = f(x)$, queremos definir el concepto de pendiente en cualquier punto $P(x, f(x))$ de dicha curva. Para ello, realizamos el siguiente procedimiento.

Primer paso: se escoge un punto $Q(x + h, f(x + h))$ cercano a $P(x, f(x))$ y se traza la recta que une a dichos puntos. Esta recta se llama recta secante.



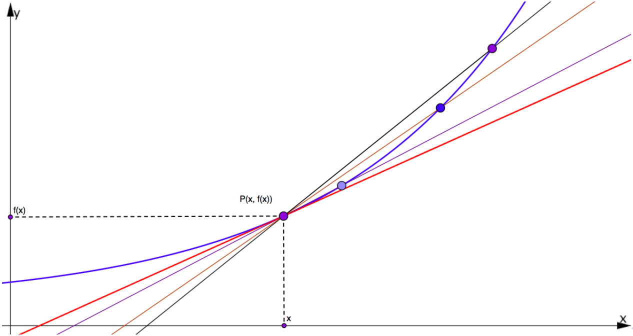
Segundo paso: calcular la pendiente de la recta secante. Dicha pendiente m es:

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Segundo paso: calcular la pendiente de la recta secante. Dicha pendiente m es:

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

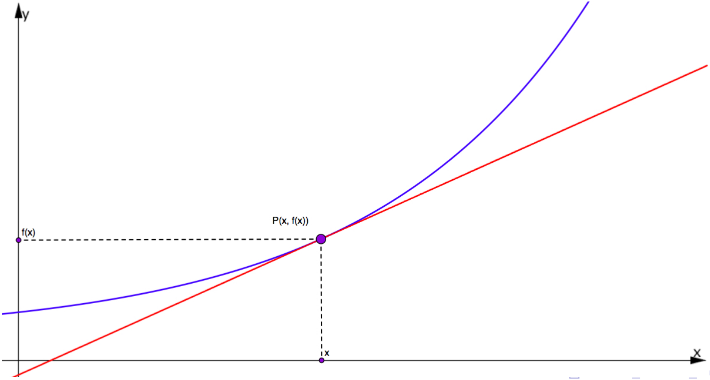
Tercer paso: como lo indica la siguiente figura, a medida que el punto Q se acerca al punto P, es decir, cuando $h \to 0$, las rectas secantes parecen tender a la recta roja (recta tangente).



La pendiente m de la recta roja será el límite de las pendientes de las rectas secantes cuando $h \to 0$, siempre y cuando dicho límite exista. Es decir:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

En el siguiente gráfico se ilustra sólo la recta roja:



Pendiente de una curva en un punto

Pendiente de una curva en un punto

La pendiente de una curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ se define como sigue:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Pendiente de una curva en un punto

Pendiente de una curva en un punto

La pendiente de una curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ se define como sigue:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Observar que el cociente:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

es la pendiente de la recta secante que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ **y** $(x_0 + h, f(x_0 + h))$**.**

Pendiente de la recta tangente

Definición de recta tangente

La recta tangente a la curva $y = f(x)$ **en el punto** $(x_0, f(x_0))$ **es aquella recta que tiene pendiente:**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(siempre que el límite exista)}$$

y pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$.

Pendiente de la recta tangente

Definición de recta tangente

La recta tangente a la curva $y = f(x)$ **en el punto** $(x_0, f(x_0))$ **es aquella recta que tiene pendiente:**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(siempre que el límite exista)}$$

y pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$.

Dado que el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

aparece con mucha frecuencia, recibe un nombre especial.

Derivada de una función

La derivada de una función f en un punto $x = x_0$ se simboliza como $f'(x_0)$ y se obtiene como:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Derivada de una función

Derivada de una función

La derivada de una función f en un punto $x = x_0$ se simboliza como $f'(x_0)$ y se obtiene como:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Así:

En resumen

[Derivada de f en x_0]= [Pendiente de la curva $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$]= [Pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$] = [Tasa de cambio instantánea de f en x_0]

En la próxima clase ejemplificaremos estas definiciones.