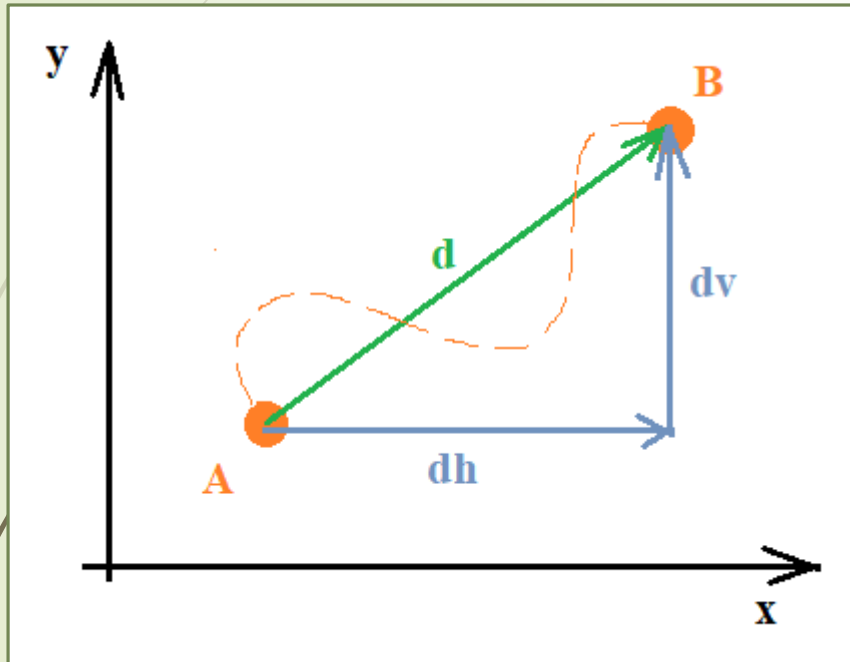




Cuerpos rígidos vinculados

Movimiento del punto

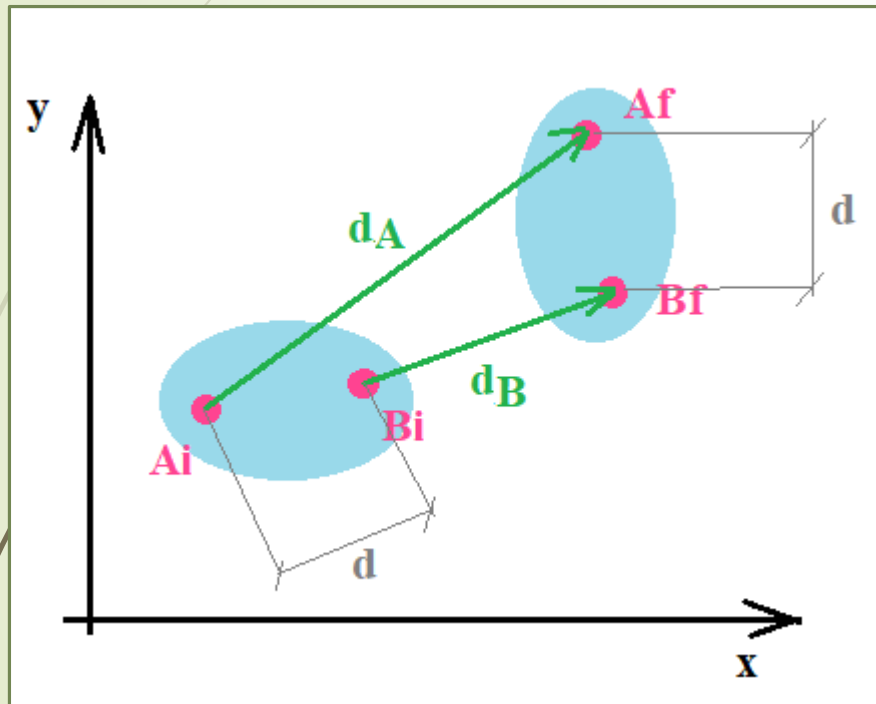


Una partícula, en el plano, puede experimentar un desplazamiento \mathbf{d} . Es posible descomponer a \mathbf{d} en dos direcciones según los ejes coordenados x - y .

Se dice que una partícula tiene dos grados de libertad en el plano, coincidente con las dos componentes del desplazamiento d_h y d_v .

Del mismo modo, una partícula en el espacio tendrá tres grados de libertad.

Condición de rigidez

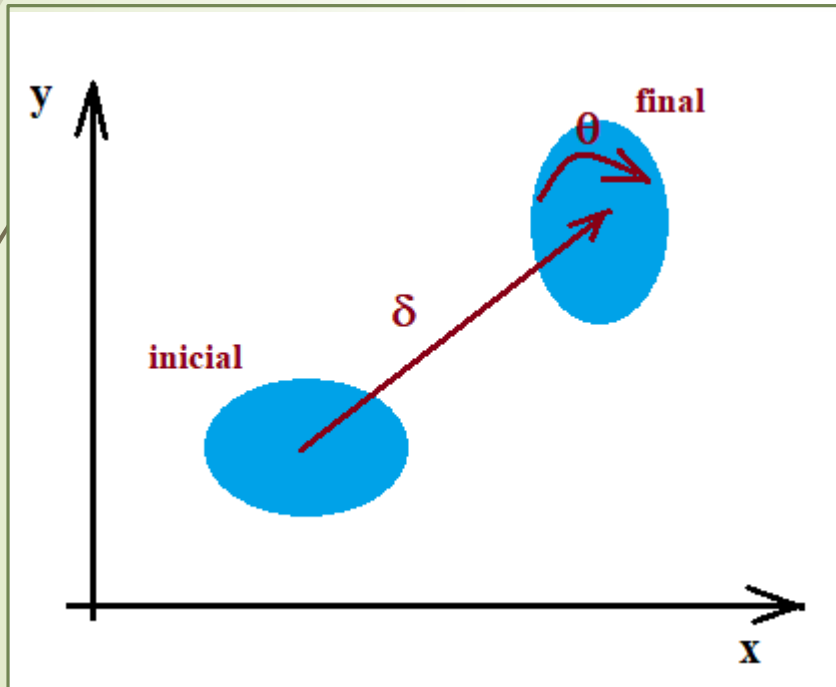
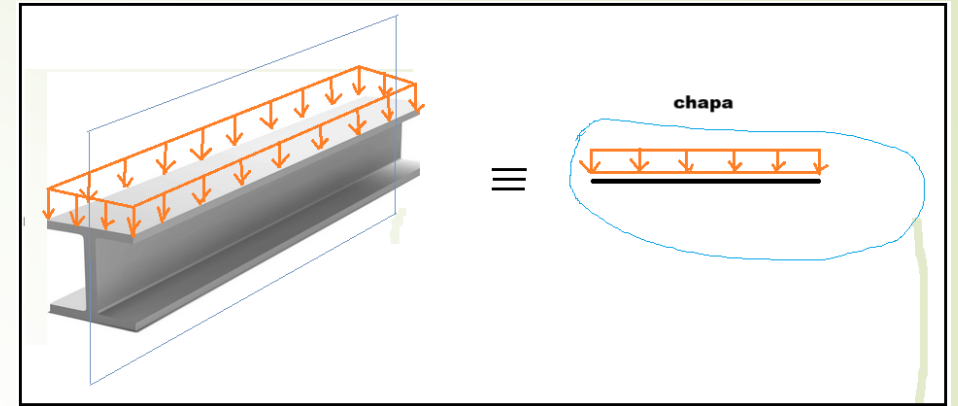


La distancia entre dos puntos cualesquiera de un cuerpo permanece constante para cualquier desplazamiento que experimente.

Que el cuerpo sea indeformable es una hipótesis ya que en la realidad tales cuerpos no existen.

Chapas – Grados de libertad

Elemento estructural que por geometría puede ser modelado en un plano, con vinculación y cargas pertenecientes al mismo plano.

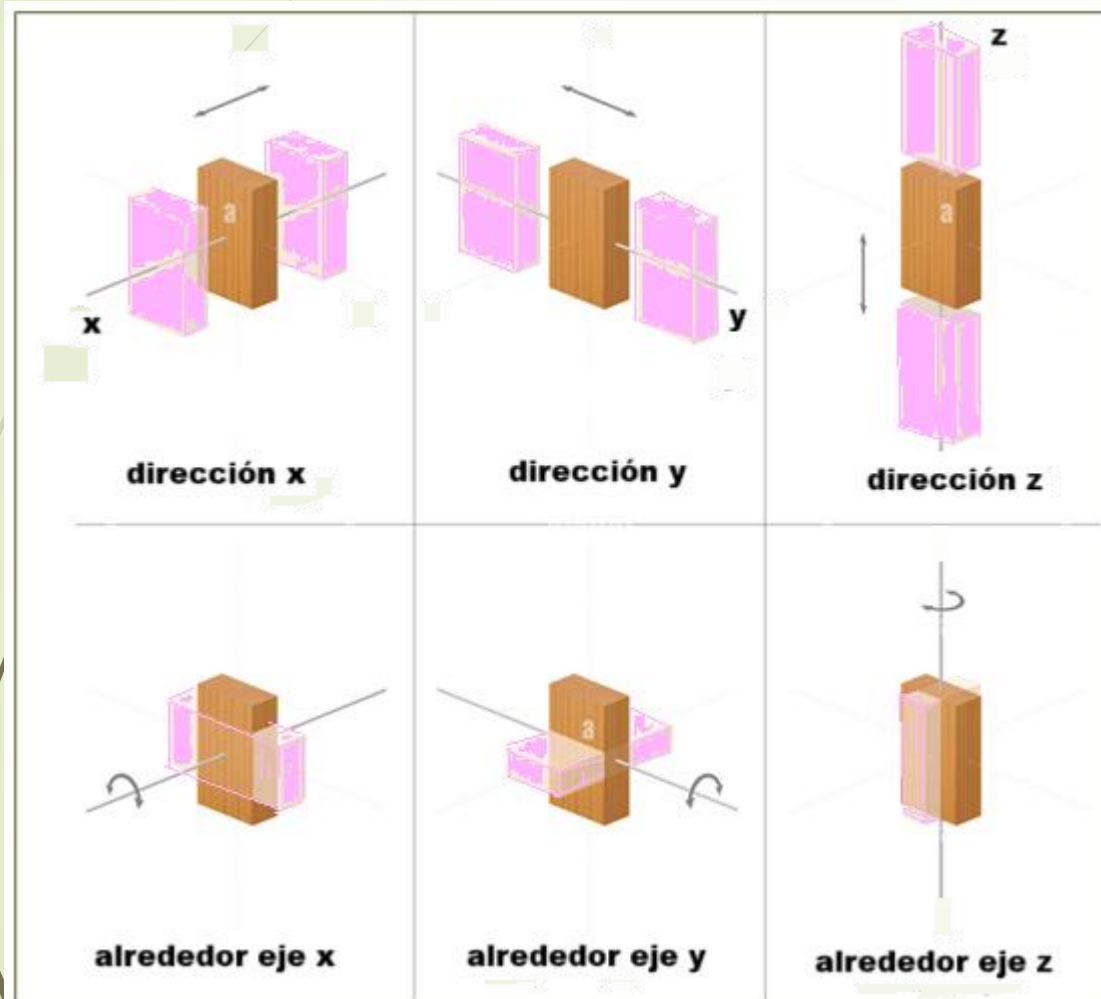


Chapa: sistema plano sujeto a la condición de rigidez.

El movimiento que puede experimentar una chapa en el plano es de rotación y translación. La translación se puede descomponer según la dirección de los ejes que forman el plano al que pertenece la chapa y la rotación alrededor del eje ortogonal al dicho plano.

Una chapa tiene 3 grados de libertad en el plano.

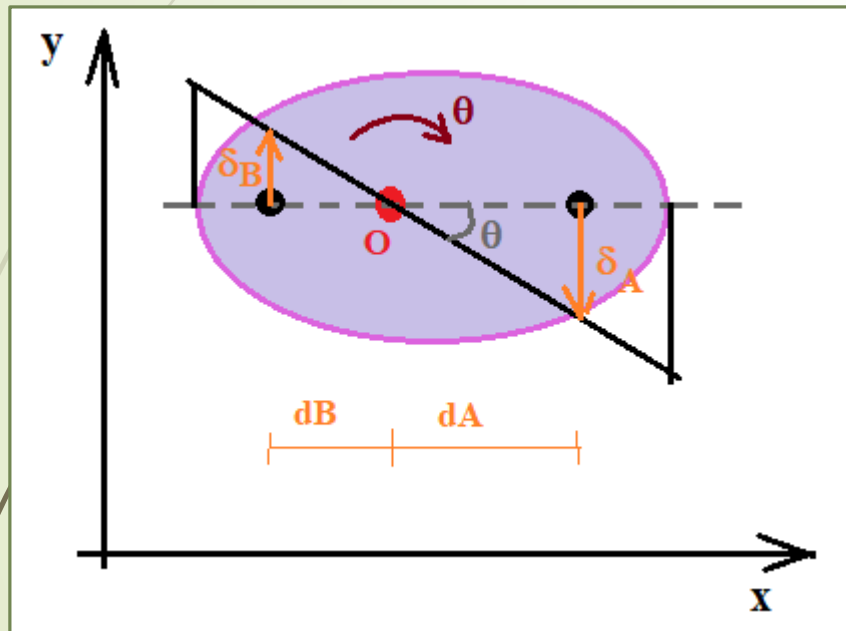
Grados de libertad en el espacio



En el espacio, un cuerpo puede experimentar traslación y rotación según los tres ejes coordenados.

Un cuerpo en el espacio tiene seis grados de libertad: tres rotaciones y tres desplazamientos.

Relación entre giro y desplazamiento



Polo de rotación: es un punto material o no, propio o impropio alrededor del cual gira la chapa.

El polo no tiene desplazamiento, es un punto fijo.

$$\delta_A = dA \cdot \tan \theta$$

$$\delta_B = dB \cdot \tan \theta$$

$$\theta \approx 0 \rightarrow \sin \theta \cong \tan \theta \cong \theta$$

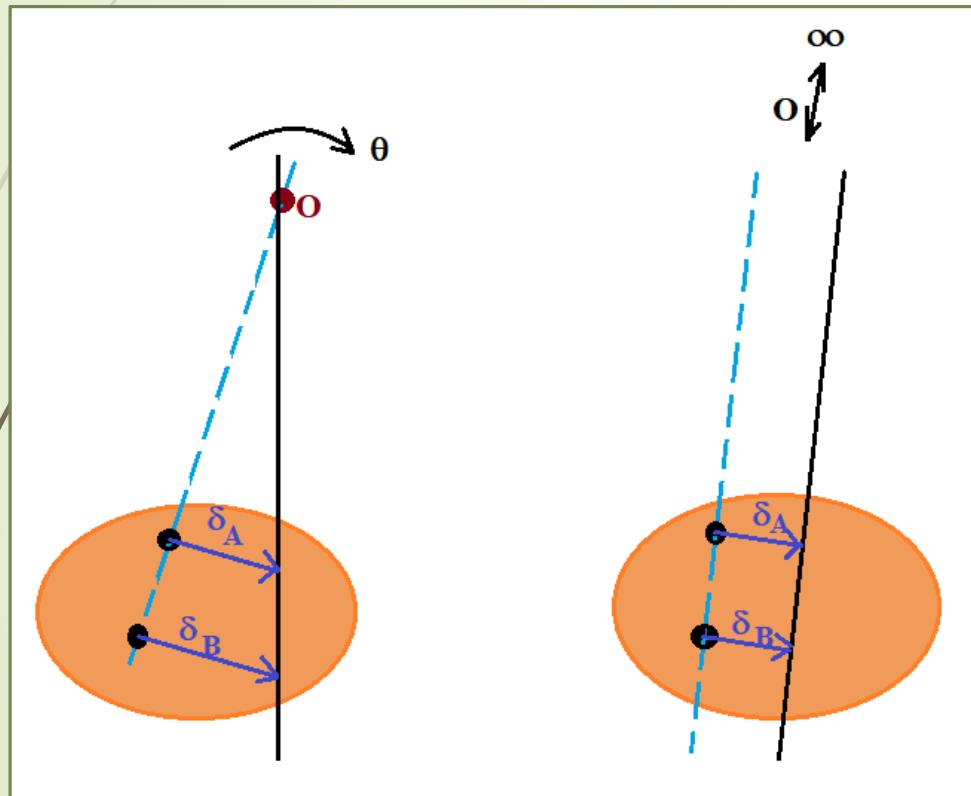
Corrimientos infinitesimales

$$\delta_A = dA \cdot \theta$$

$$\delta_B = dB \cdot \theta$$

Relación entre giro y desplazamiento

Polo propio
No material



Una rotación de la chapa alrededor de un polo impropio es un desplazamiento.

Vínculos externos o apoyos en el plano

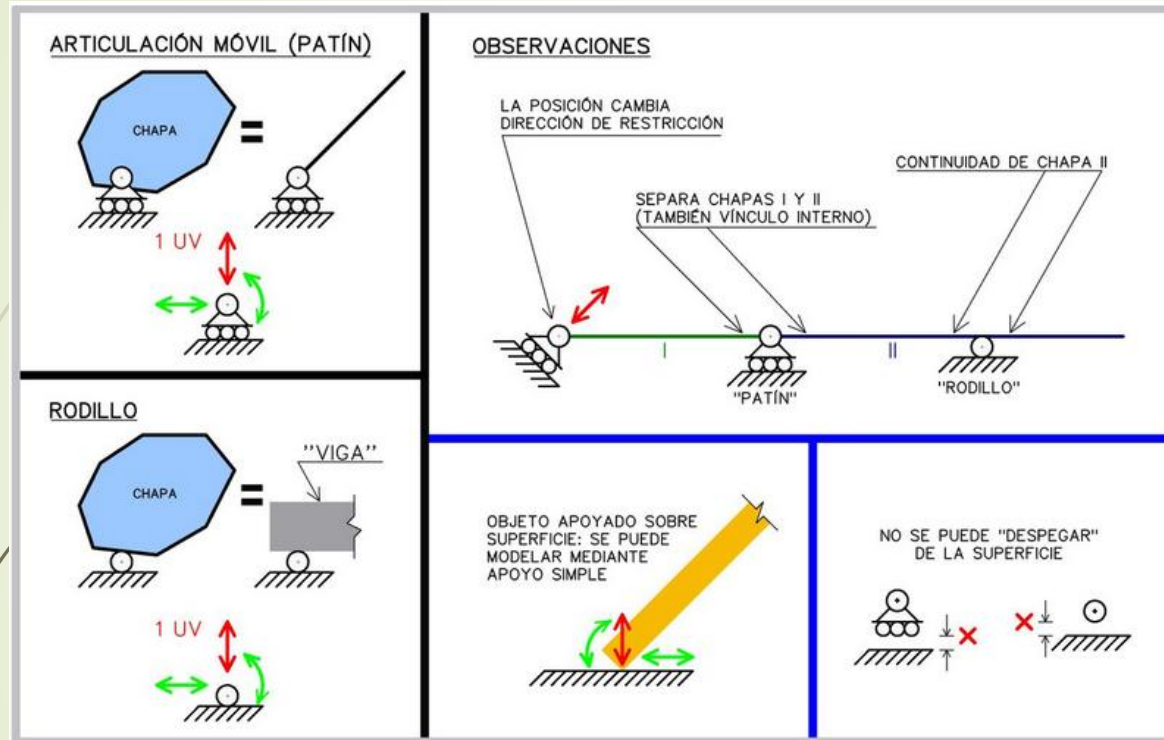
- Un vínculo es una condición geométrica que impide un grado de libertad.
- Se dice que se impone una condición de vínculo (CV) por cada vínculo que restringe un movimiento.
- Si un vínculo restringe un desplazamiento en una determinada dirección se desarrolla una fuerza, actuando sobre el cuerpo, en dicha dirección.



Apoyo simple o de primera especie

Estos vínculos añaden una restricción.

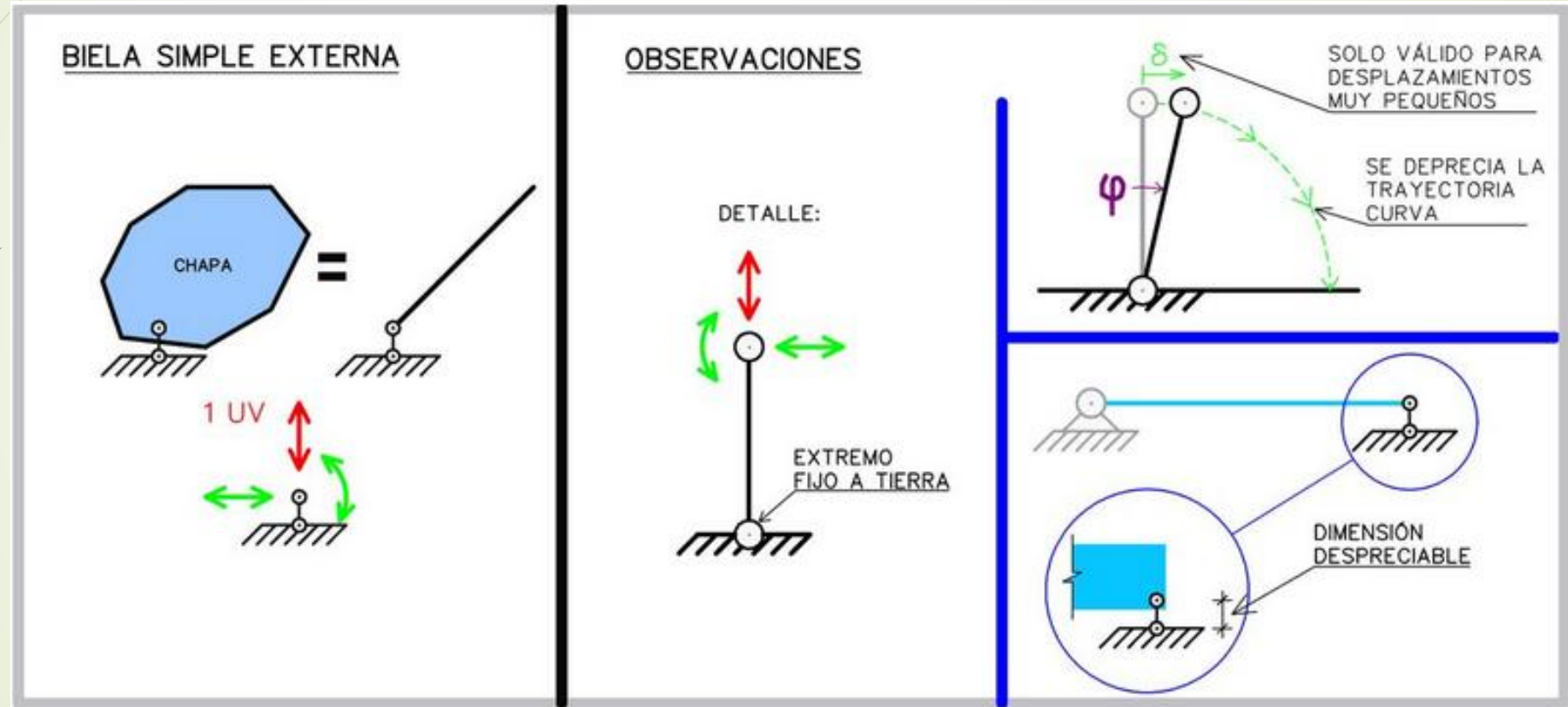
Aparece una reacción en la dirección de la restricción.



Especie	Representación	Nombre	Desplazamientos posibles		
De 1ra especie		Apoyo simple o móvil	No	Si	Si

Apoyo o conexión	Reacción
Rodillos o patines Balancín Superficie sin fricción	Fuerza con línea de acción conocida
Cable corto Eslabón corto	Fuerza con línea de acción conocida
Collarín sobre una barra sin fricción Perno sin fricción en una ranura lisa	Fuerza con línea de acción conocida

Biela simple externa: es un modelo de barra rígida de longitud despreciable cuya restricción es el desplazamiento en dirección del eje de la misma, su efecto es idéntico al de un apoyo simple.





Balancín



Rodillo

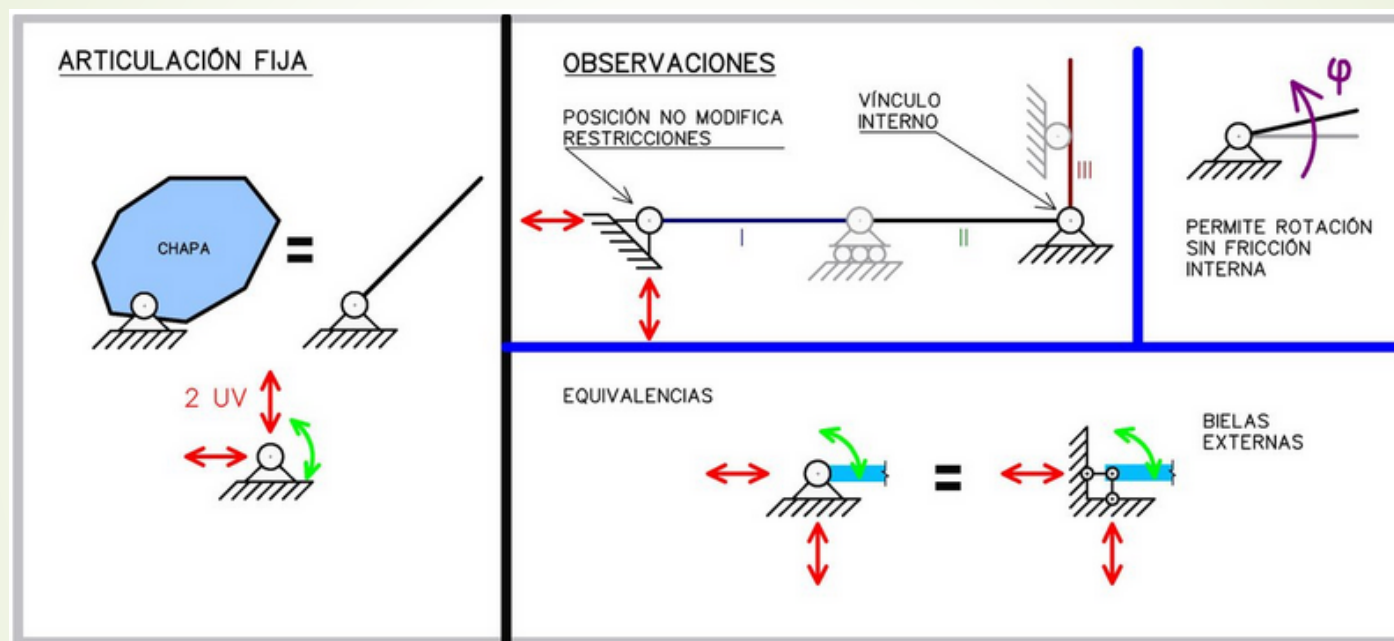


Patín



Apoyos dobles o de segunda especie.

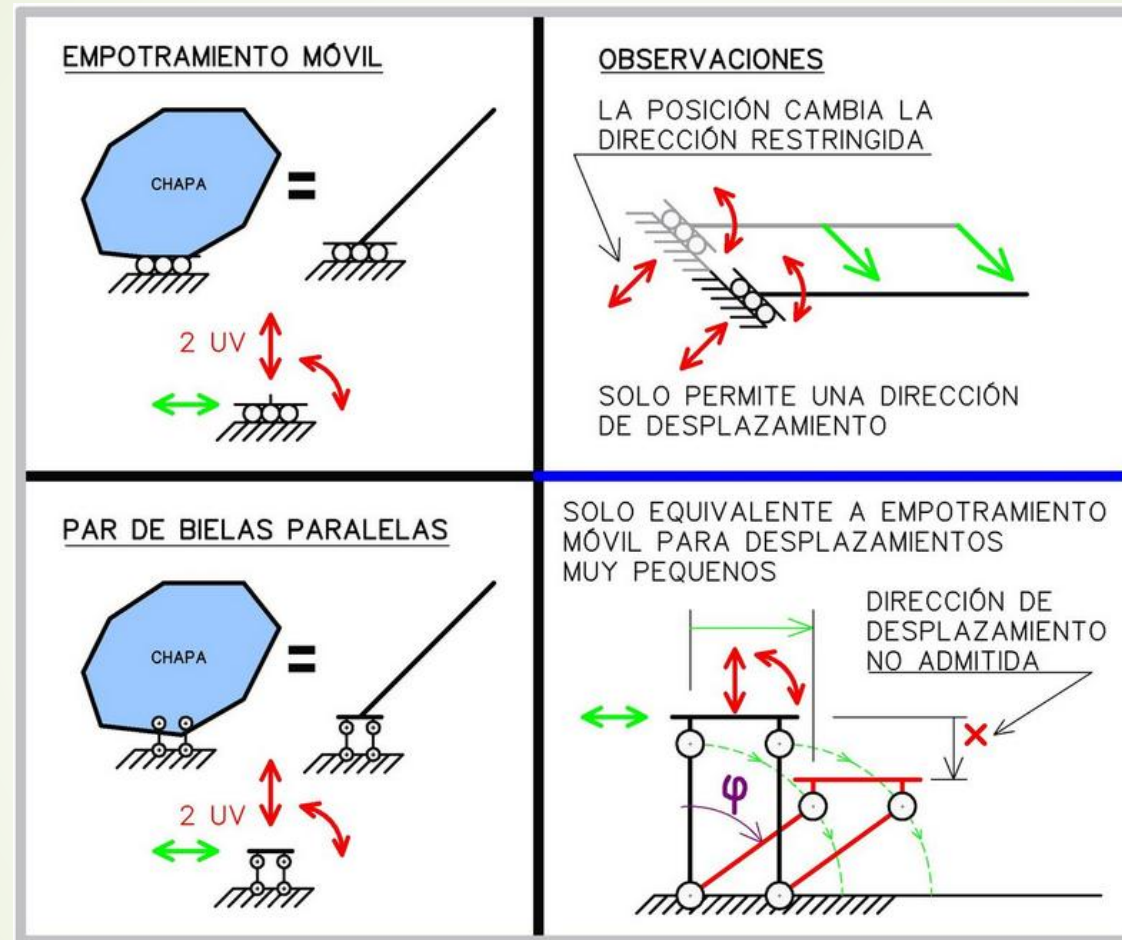
Restringe el desplazamiento en cualquier dirección del plano, permite sólo la rotación.



Especie	Representación	Nombre	Desplazamientos posibles <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 10px;">\updownarrow</div> <div style="margin-right: 10px;">\longleftrightarrow</div> <div>\curvearrowright</div> </div>		
De 2da especie		Apoyo fijo o articulación	No	No	Si
		Carrito guiado	No	Si	No

Apoyo o conexión	Reacción
<p>Perno sin fricción, articulación o bisagra</p> <p>Superficie rugosa</p>	<p>Fuerza de dirección desconocida</p>

Empotramiento móvil o carrito guiado.

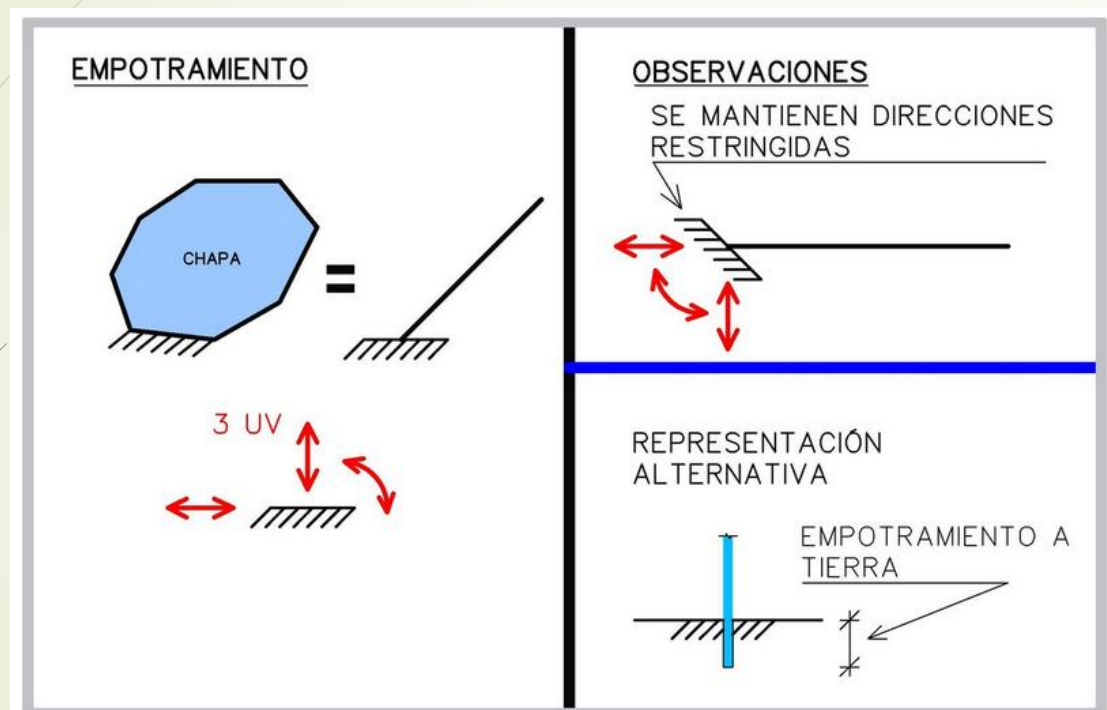


Restringe un desplazamiento y la rotación.



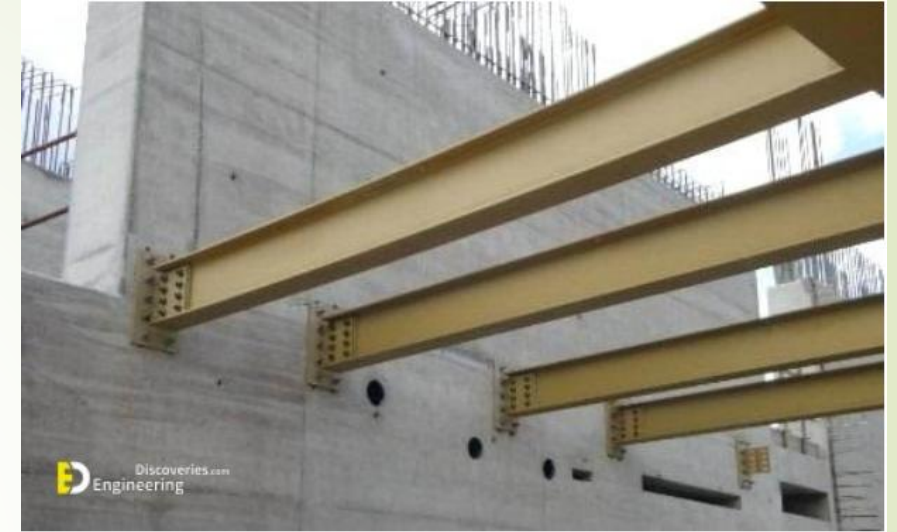
Apoyos de tercera especie o empotramiento

Se restringe tanto el desplazamiento en cualquier dirección como la rotación.



Apoyo o conexión	Reacción

Especie	Representación	Nombre	Desplazamientos posibles		
De 3ra especie		Empotramiento	No	No	No

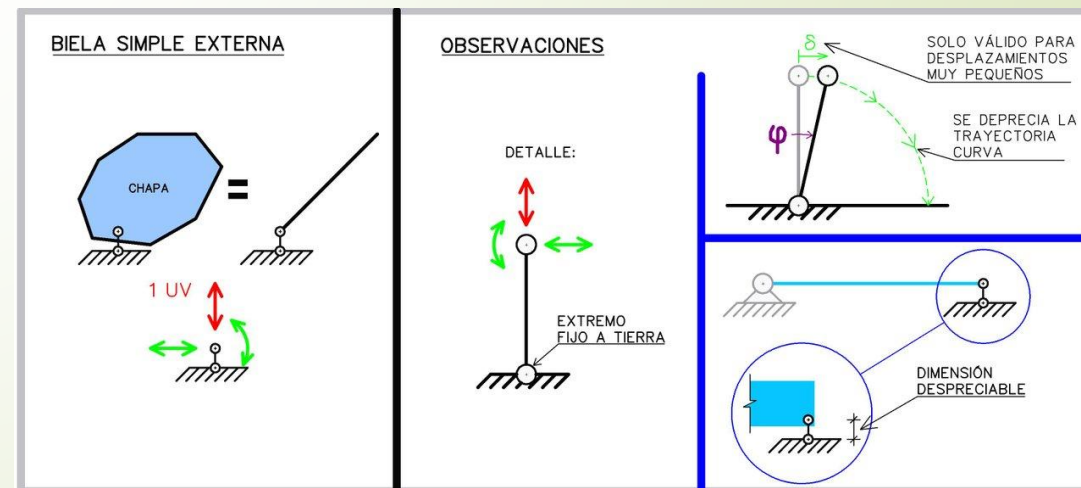


Las bielas

- Son barras infinitamente rígidas en la dirección de su eje con sus extremos articulados. Impone una condición de vínculo en la dirección de su eje.

Biela simple externa equivale a un apoyo simple.

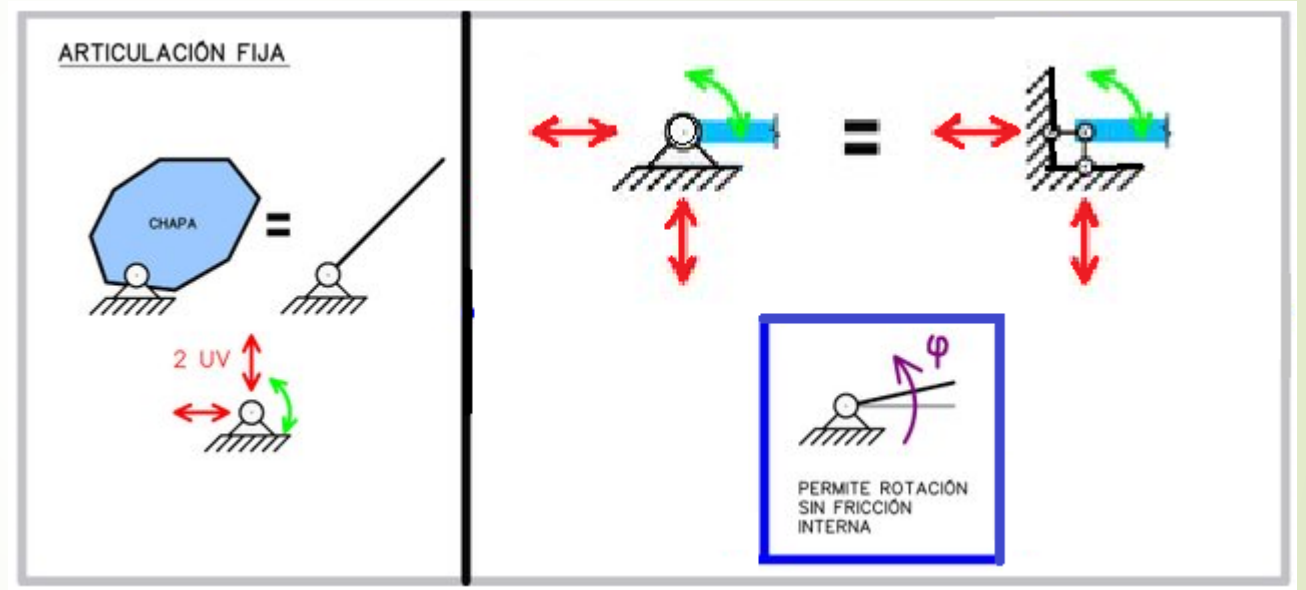
Cuando un extremo de la biela está vinculado a tierra constituye un vínculo externo de primera especie.



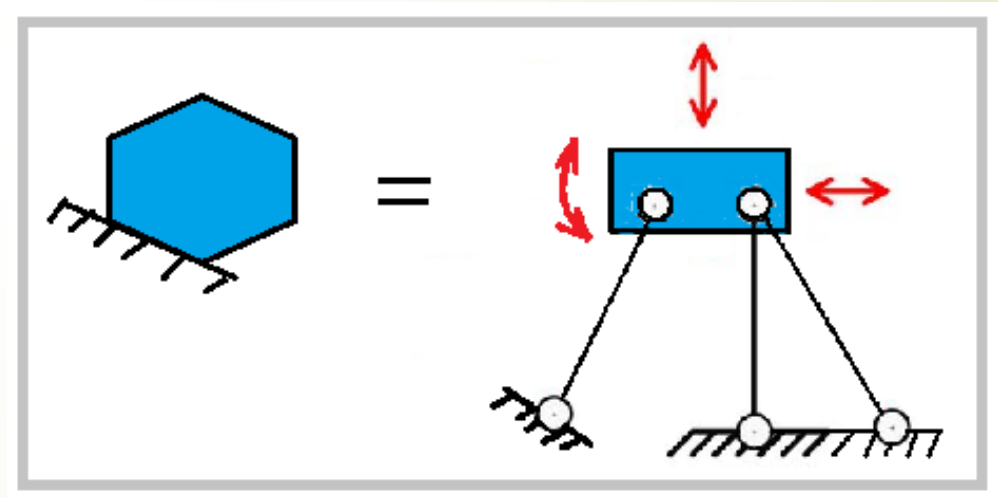
Bielas dobles no paralelas equivalen a un apoyo doble



≡



Bielas triples convenientemente dispuestas restringen tres grados de libertad



Sustentación de sistemas

Según el tipo de sustentación los sistemas se clasifican en :

Isostáticos: Cuando los grados de libertad (GDL) son iguales a las condiciones de vínculos (CV).

Hiperestáticos: Cuando los grados de libertad (GDL) son menores que las condiciones de vínculos (CV).

Hipostáticos: Cuando los grados de libertad (GDL) son mayores que las condiciones de vínculos (CV).

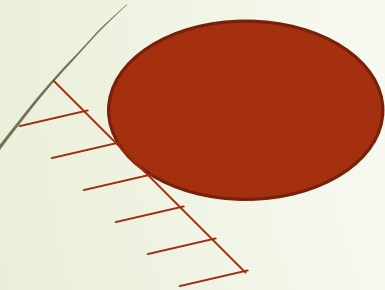
- Para que un sistema sea cinemáticamente estable se debe cumplir:
- Que tenga la cantidad de vínculos necesarios para restringir los grados de libertad de la estructura.
- Que no exista vinculación aparente (cuando la condición geométrica impuesta a un cuerpo no altera la posibilidad de desplazamiento del mismo).
- Cuando esto se cumple se pueden plantear las ecuaciones de equilibrio.

Sistema de una chapa.

- Una chapa tiene 3 GDL entonces, para que el sistema sea isostático, las CV deben ser 3.
 $GDL = CV = 3$

Caso 1: Empotrado.

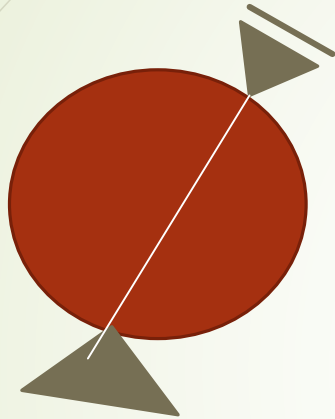
Restringen 3 GDL por lo tanto es un sistema cinemáticamente estable.



$$GDL = CV = 3$$

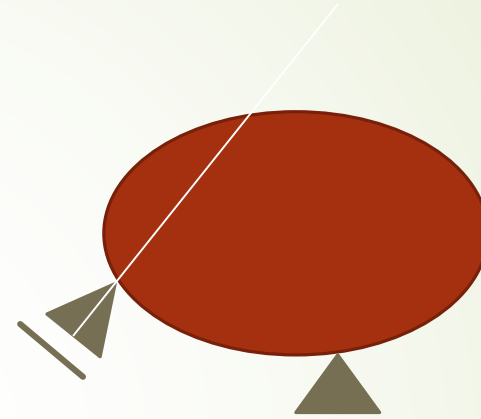
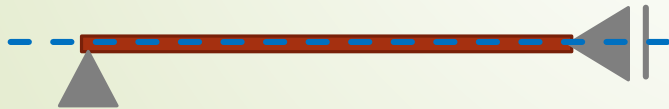
➤ Caso B: Un apoyo doble y uno simple.

$GDL = 3$ $CV = 2+1=3$ **Verificar VINCULACIÓN APARENTE.**



Vinculación aparente

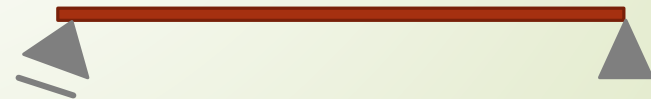
La recta de acción del apoyo móvil pasa por el punto fijo.



Sistema isostático

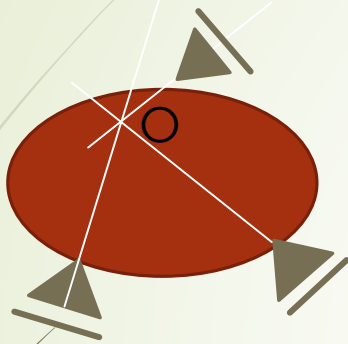
$GDL=CV=3$.

La recta de acción no pasa por el punto fijo, NO hay vinculación aparente.
Sistema cinemáticamente estable.



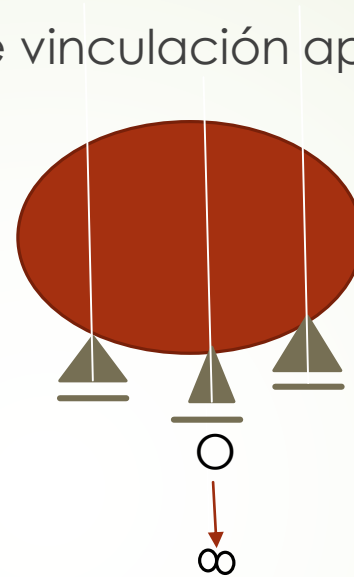
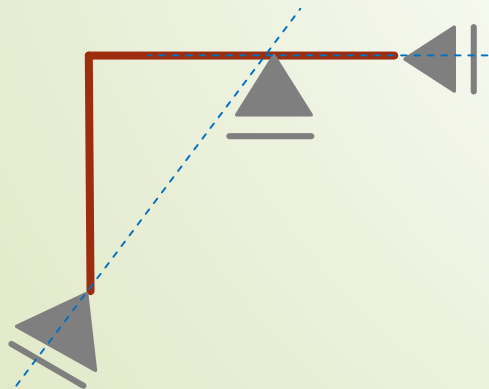
➤ Caso C: 3 apoyo móviles.

$GDL=3$ $CV=3 \times 1$ Verificar se existe vinculación aparente



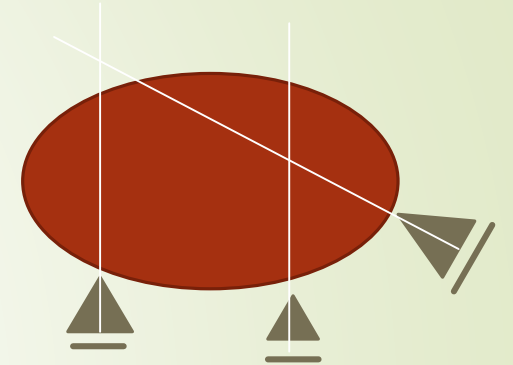
Vinculación aparente

Las rectas de acción de los tres apoyos concurren al mismo punto. La chapa gira alrededor de O.



Vinculación aparente

Las tres rectas de acción son paralelas. El polo O está en el infinito. La chapa se desplaza horizontalmente.

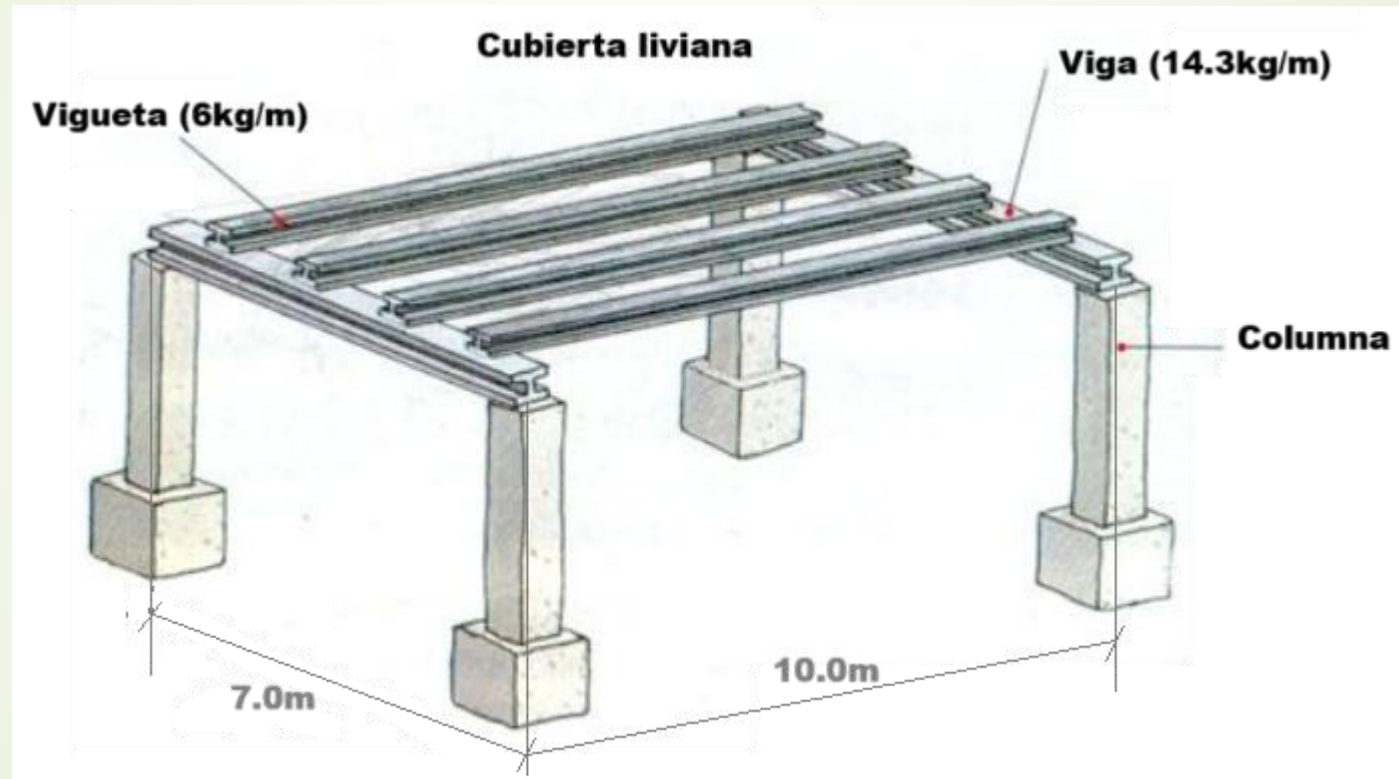


Chapa con 3 GDL y 3 CV. NO hay vinculación aparente porque las rectas de acción de los tres apoyos no concurren a un mismo punto.

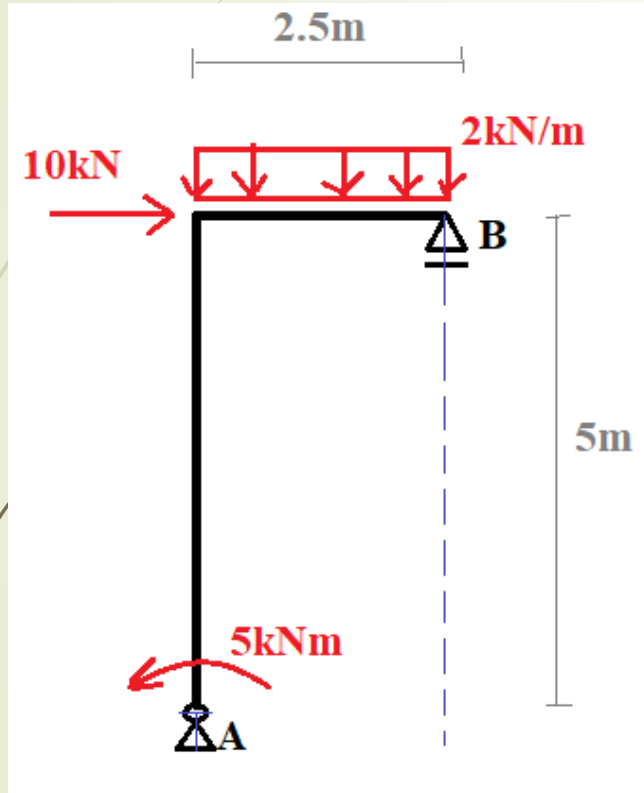


Ejemplo simple

Determinar las reacciones de vínculo de la viga simplemente apoyada de 7,0 m de luz entre ejes.



Ejemplo: para la siguiente estructura se pide realizar el análisis cinemático y calcular las reacciones de vínculos externos.



Análisis cinemático:

La estructura está formada por una sola chapa, por lo tanto tiene 3GDL.

Tiene en A un apoyo doble y en B uno simple, por lo tanto tiene 3 CV.

Es una estructura isostática.

Como la recta de acción de la reacción en B no pasa por A, no hay vinculación aparente.

Es cinemáticamente estable

Cálculo de reacciones de vínculos externos.

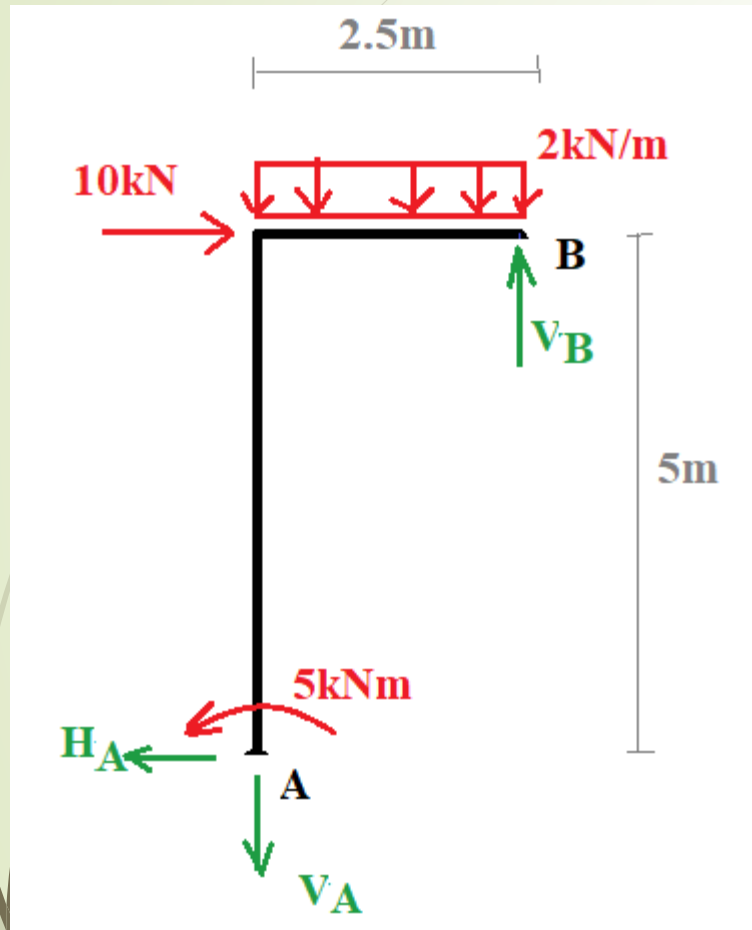


Diagrama de cuerpo libre

Como es un sistema de fuerzas no concurrentes plano, se pueden plantear tres ecuaciones de equilibrio.

$$\sum F_x = 0 \quad 10kN - H_A = 0 \quad H_A = 10kN \quad \leftarrow$$

$$\sum M_A = 0 \quad 5kNm - 10kN \cdot 5m - \frac{2kN}{m} \cdot 2,5m \cdot 1,25m + V_B \cdot 2,5m = 0$$
$$V_B = 20,5kN \quad \uparrow$$

$$\sum M_B = 0 \quad 5kNm + \frac{2kN}{m} \cdot 2,5m \cdot 1,25m - V_A \cdot 2,5m - H_A \cdot 5m = 0$$
$$V_A = 15,5kN \quad \downarrow$$

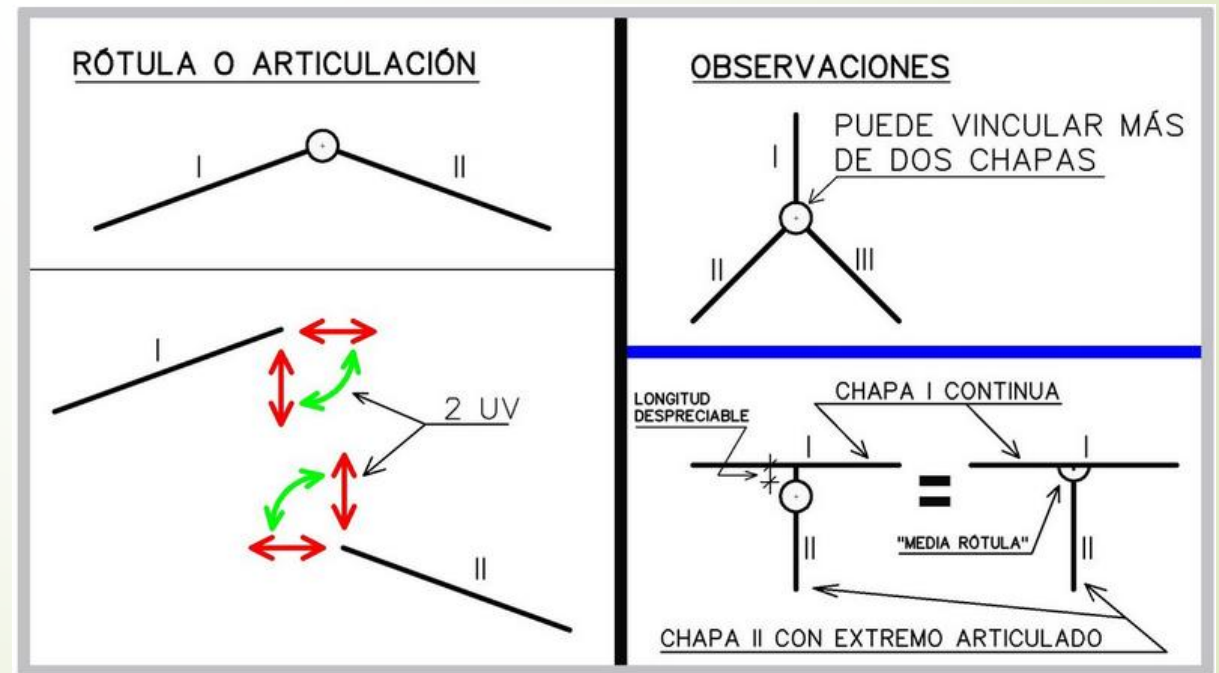
$$\sum F_y = 0 \quad -15,5kN - \frac{2kN}{m} \cdot 2m + 20,5kN = 0 \quad \text{verificación}$$

Vínculos internos

En los vínculos internos las restricciones son de movimientos relativos de una chapa respecto de otra.

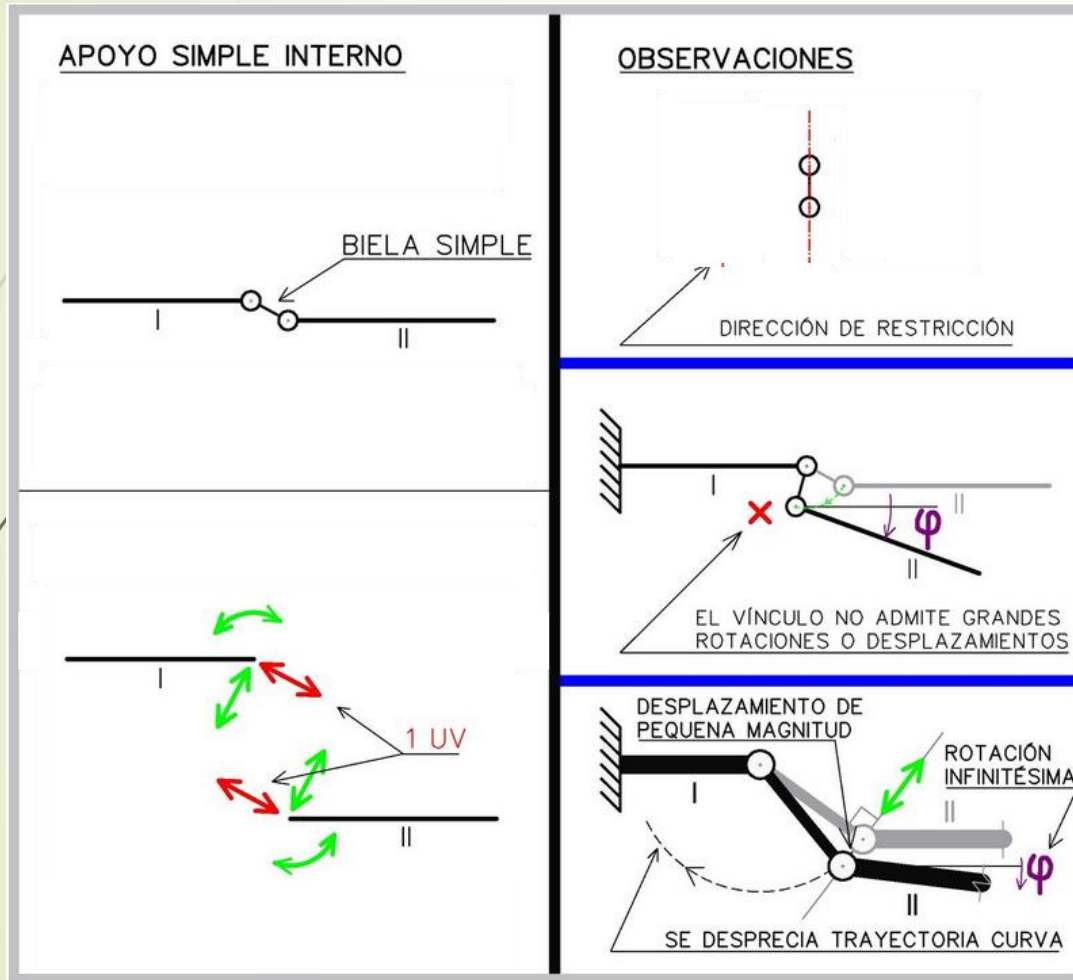
- **Articulaciones**

Mecanismo que permite rotaciones relativas de una chapa respecto de otra y restringe los desplazamientos.



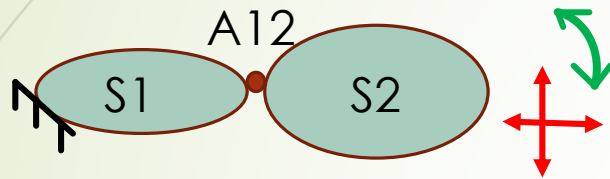
• Bielas

Restringen el desplazamiento en la dirección de su eje



Vínculos internos

Articulación propia



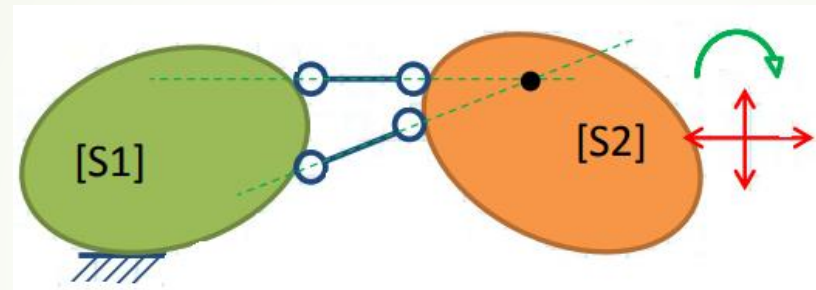
Cadena cinemática de dos chapas



Nombre	Tipo	CVI	Símbolo	Movimientos permitidos	Movimientos impedidos	Reacciones internas	Ecuación de equilibrio
ARTICULACIÓN PROPIA ROTULA	Propia	2					$\sum M^{A12} = 0$

Vínculos internos

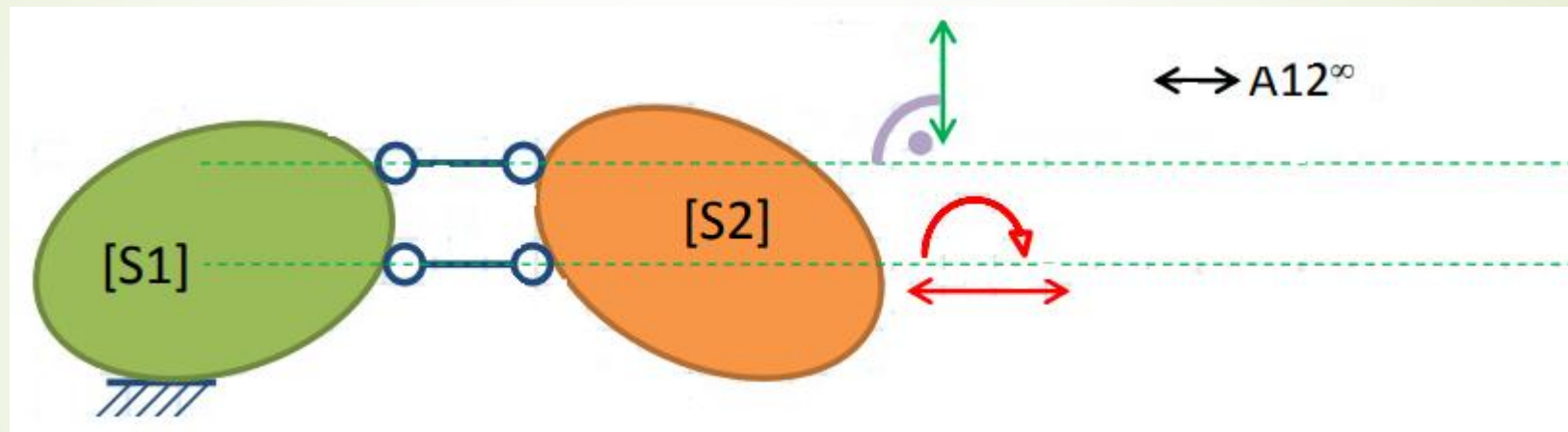
- Articulación propia formada por bielas concurrentes a un punto



Nombre	Tipo	CV I	Símbolo	Movimientos permitidos	Movimientos impedidos	Reacciones internas	Ecuación de equilibrio
ARTICULACIÓN PROPIA ROTULA	Propia	2					$\sum M^{A12} = 0$

Vínculos internos

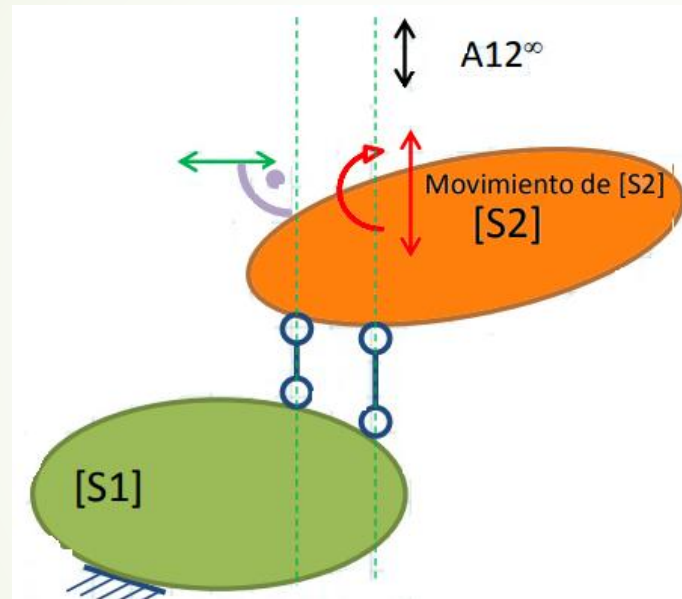
- Articulación impropia formada por bielas paralelas horizontales



Nombre	Tipo	CVI	Símbolo	Movimientos permitidos	Movimientos impedidos	Reacciones internas	Ecuación de equilibrio
ARTICULACIÓN IMPROPIA BIELAS PARALELAS HORIZONTAL	Impropia	2					$\sum F_V^{A12} = 0$

Vínculos internos

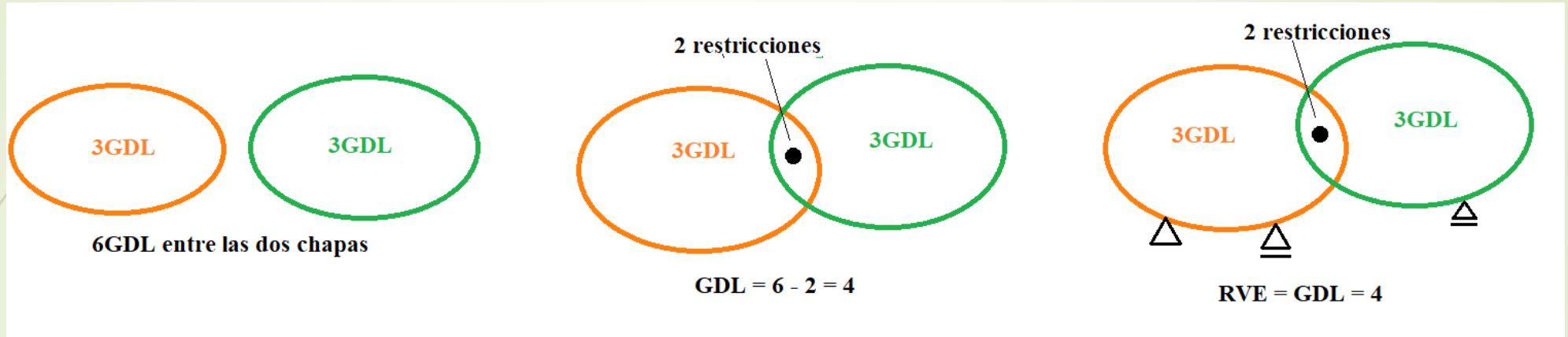
- Articulación impropia formada por bielas verticales paralelas



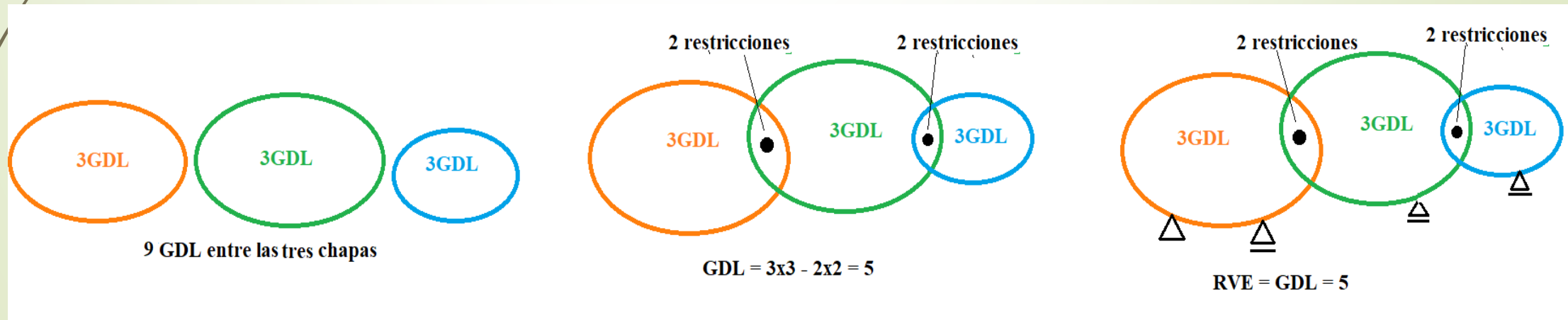
Nombre	Tipo	CVI	Símbolo	Movimientos permitidos	Movimientos impedidos	Reacciones internas	Ecuación de equilibrio
ARTICULACIÓN IMPROPIA BIELAS PARALELAS VERTICALES	Impropia	2					$\sum F_H^{A12} = 0$

Cadena cinemática de n chapas

➡ n=2



➡ n = 3



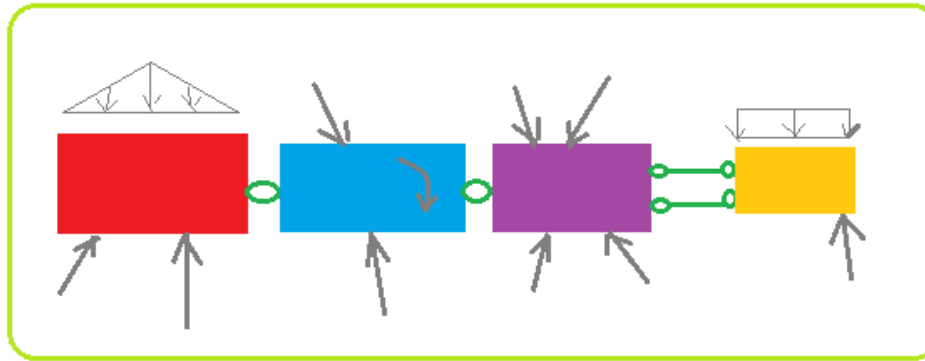
$$GDL = n + 2$$

Para cadena cinemática abierta de n chapas

Equilibrio

- Si un sistema está en equilibrio también lo estarán cada una de sus partes.

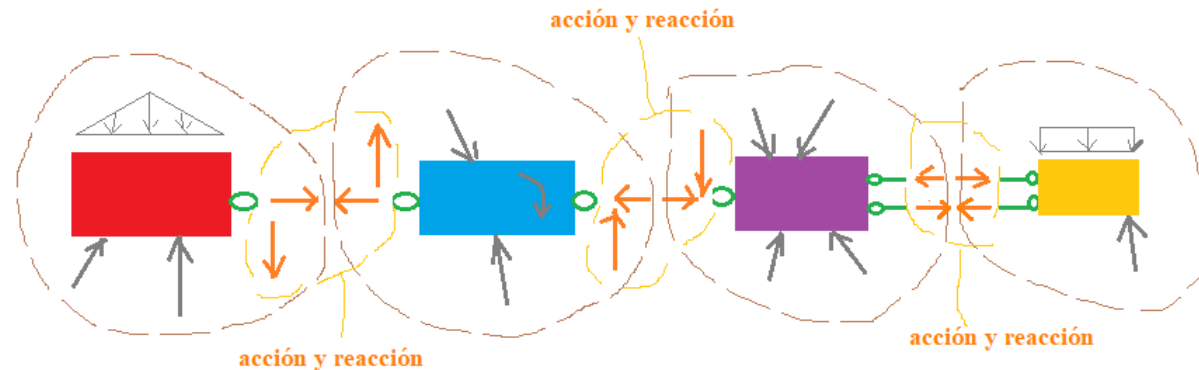
Sistema en equilibrio



En equilibrio

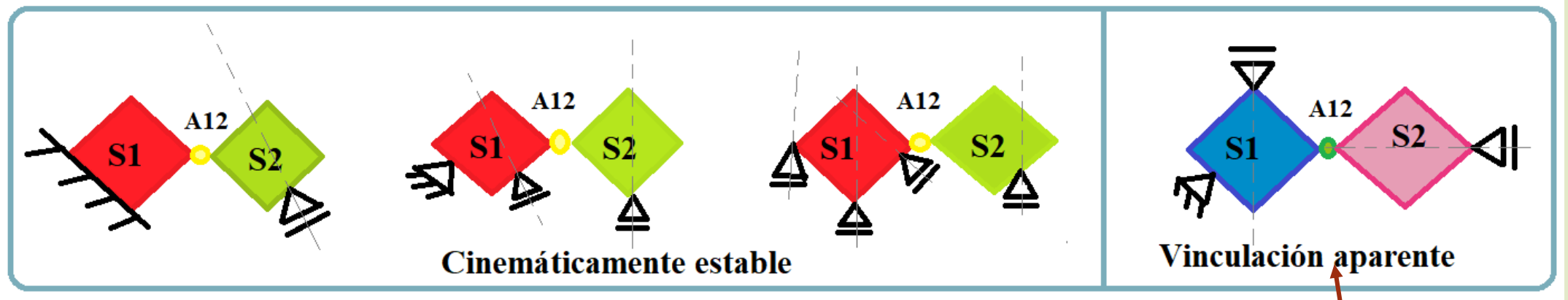
Partes en equilibrio

Diagrama de cuerpo libre

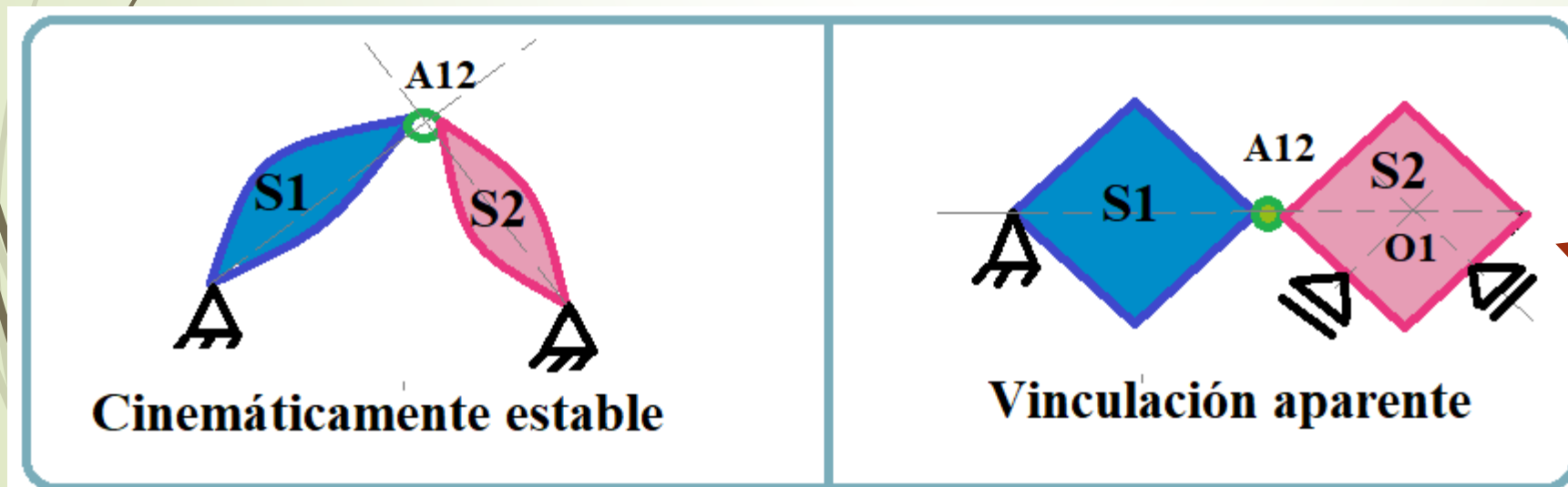


En equilibrio cada una de sus partes

Cadena cinemática abierta de 2 chapas

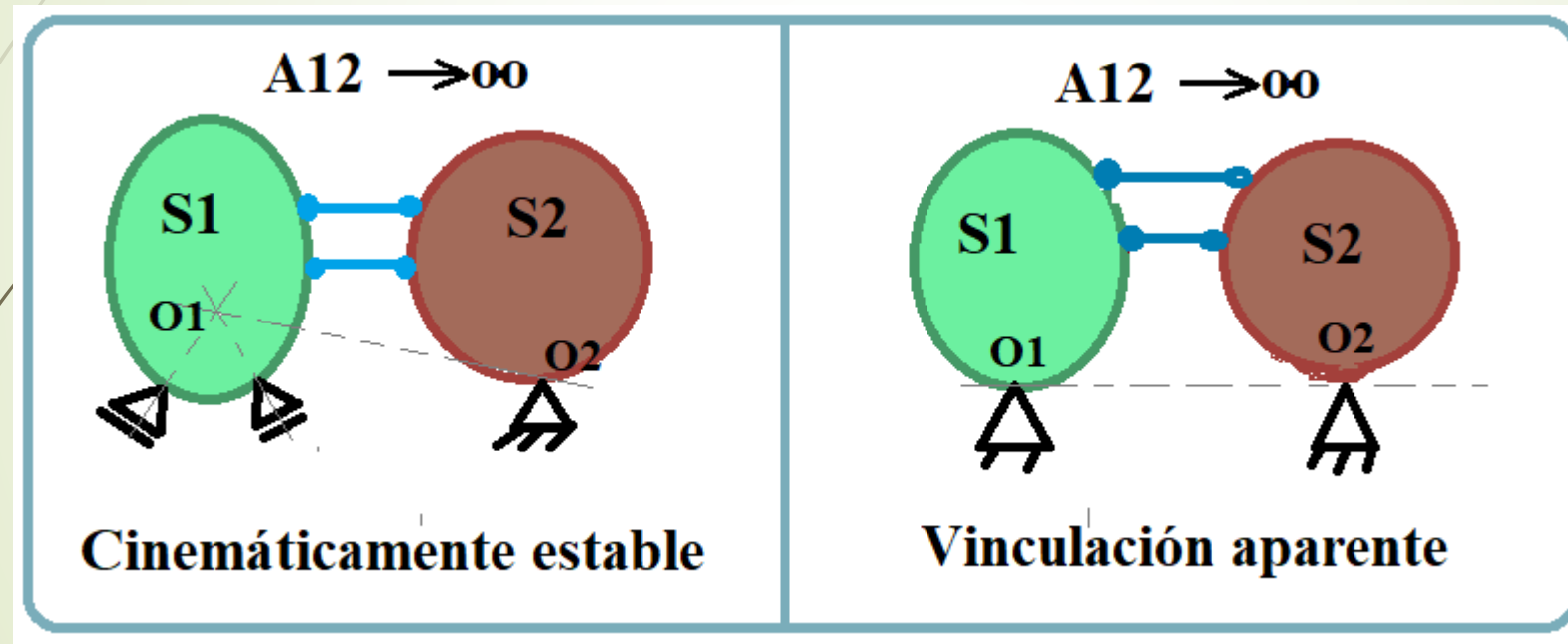


Si **S1** está fija, **A12** es un PF de **S2**, como la recta de acción del móvil pasa por el punto fijo de **S2** (**A12**), hay **vinculación aparente**



Si una cadena cinemática abierta de dos chapas conectadas con una articulación (propia o impropia) tiene en cada chapa, dos condiciones de vínculo (un punto fijo o polo), la condición para que no exista vinculación aparente es que las articulaciones (polos + articulación) **NO ESTEN ALINEADAS**.

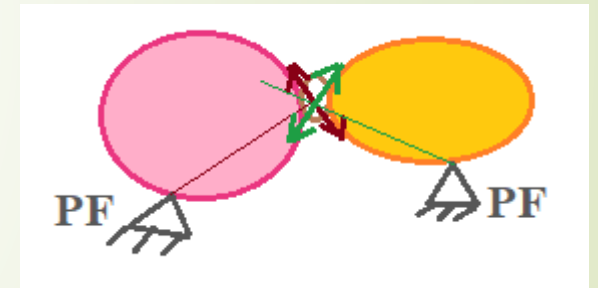
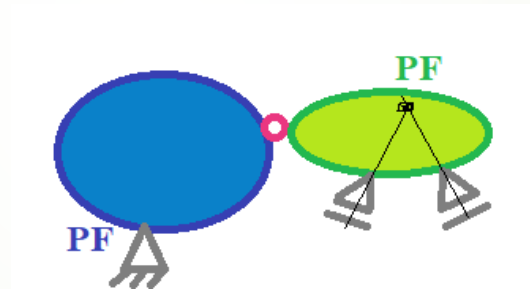
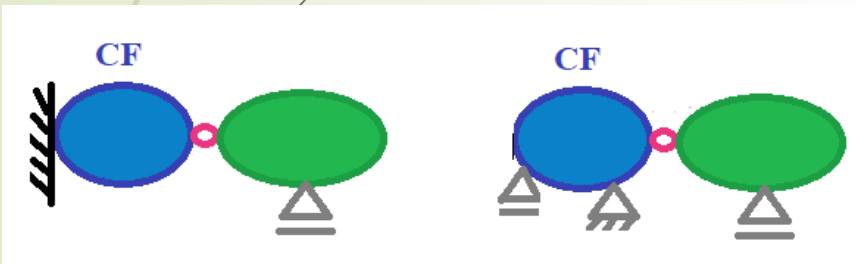
Cadena cinemática abierta de 2 chapas



Articulaciones alineadas.
Hay vinculación aparente

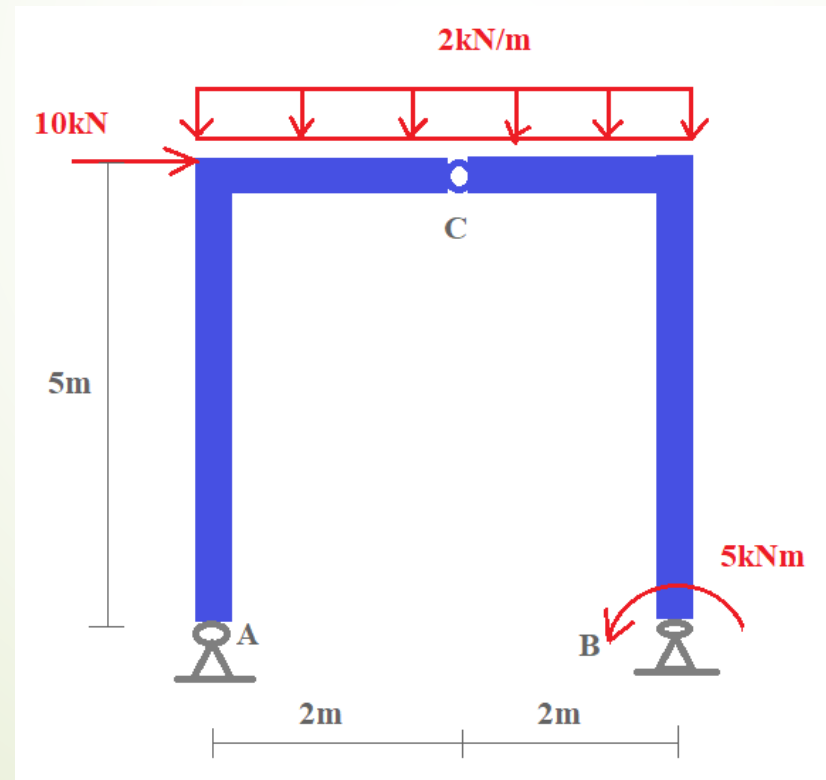
Resumen

- **Buscar Cuerpos Fijos** (chapa con un empotramiento o chapa con un apoyo fijo y uno móvil cuya dirección no pase por el fijo).
- **Buscar Puntos Fijos** (apoyo fijo o punto donde se cortan las direcciones de 2 móviles)
- **Unir Puntos Fijos a Articulaciones Relativas** para ver qué restricción le hace una chapa a la otra. (Un cuerpo fijo le dará un punto fijo a la chapa vinculada. Un punto fijo le dará un punto móvil a la chapa adyacente.)



Ejemplo: cadena cinemática abierta de dos chapas.

- Análisis cinemático
- Diagrama de cuerpo libre
- Reacciones de vínculo externo



► Análisis cinemático

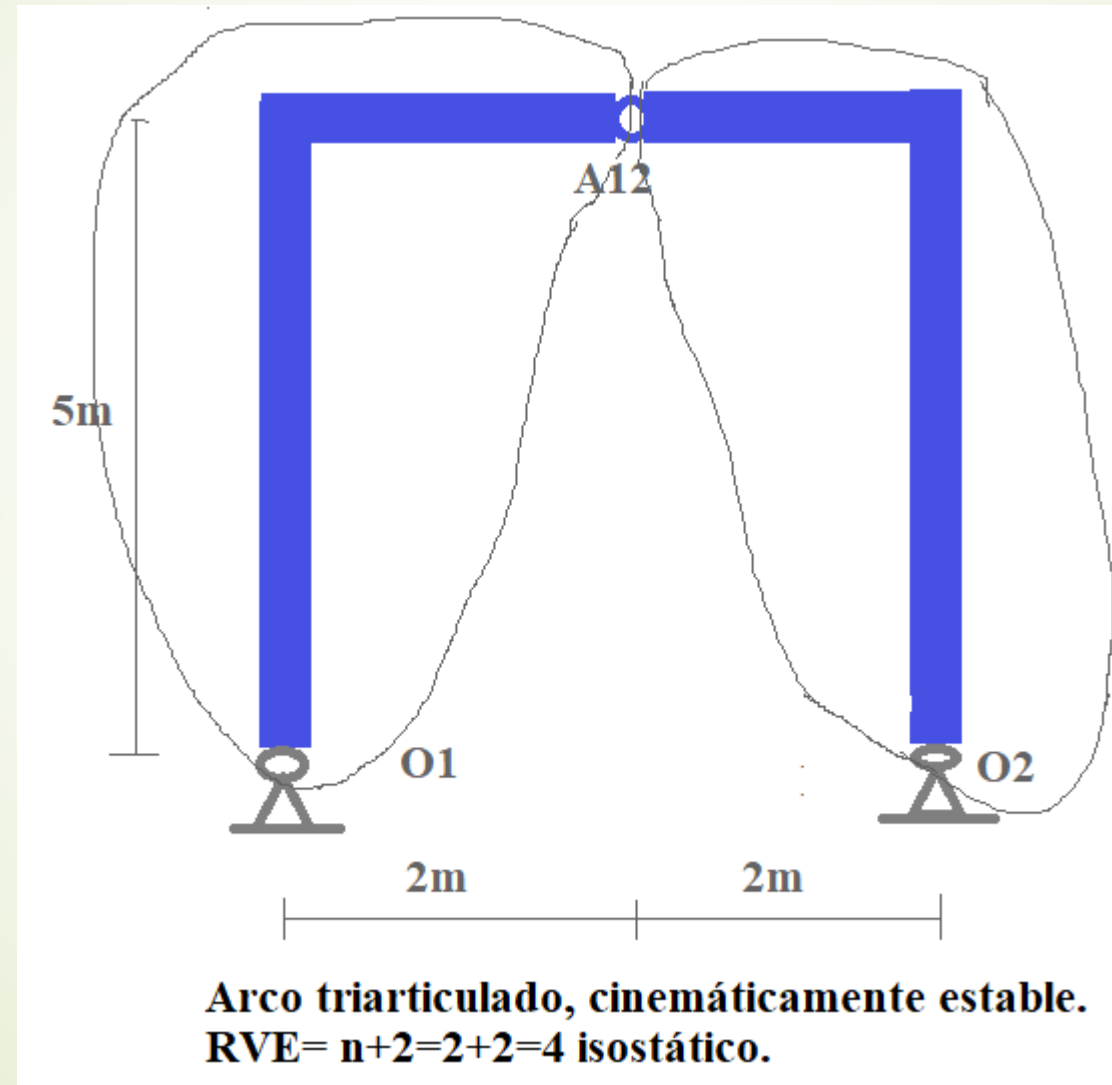
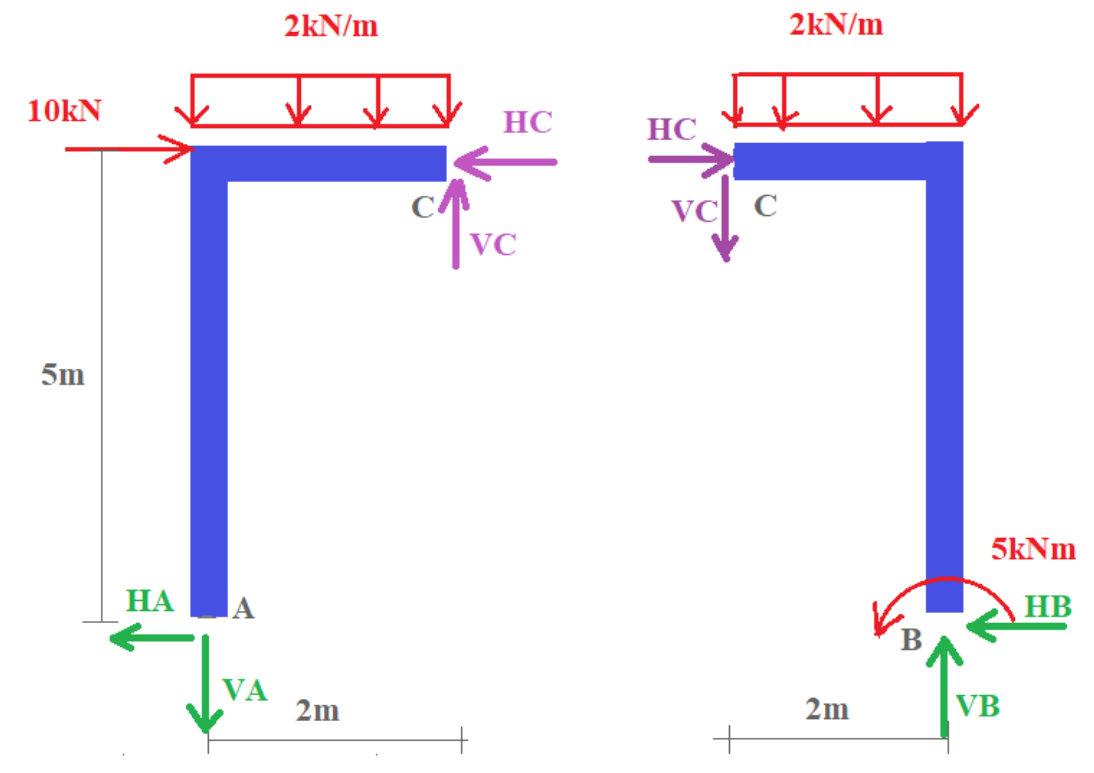
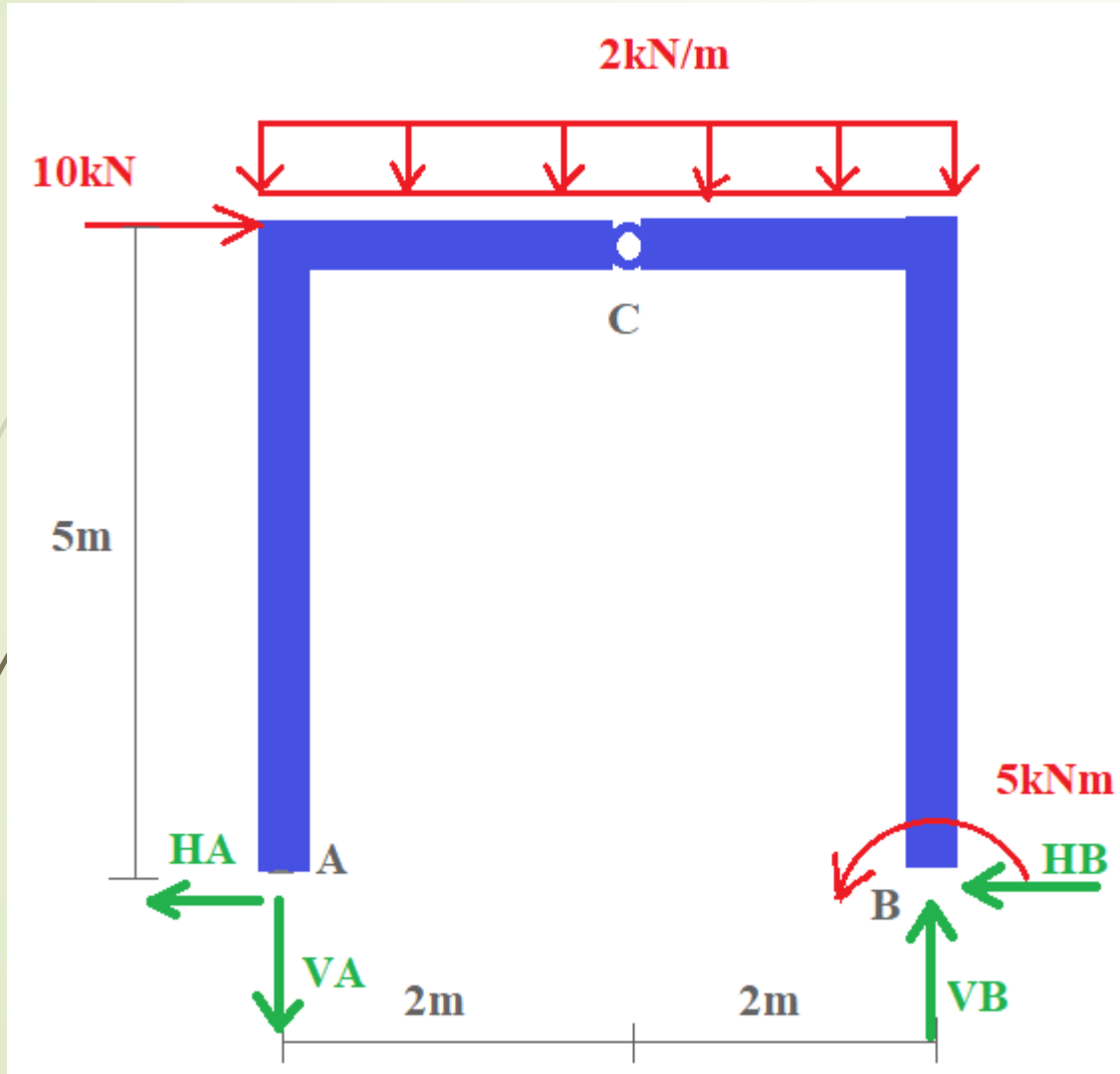
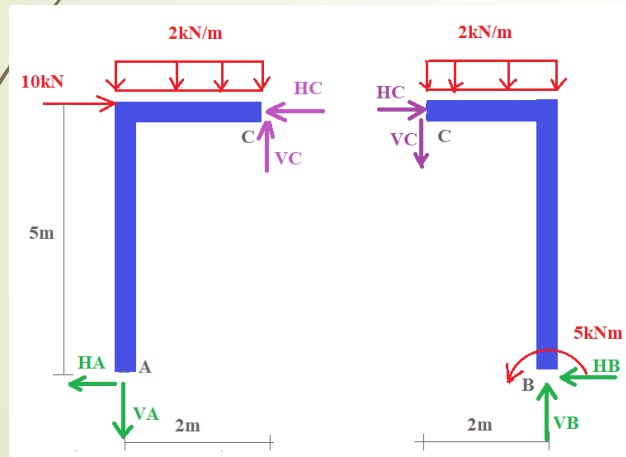
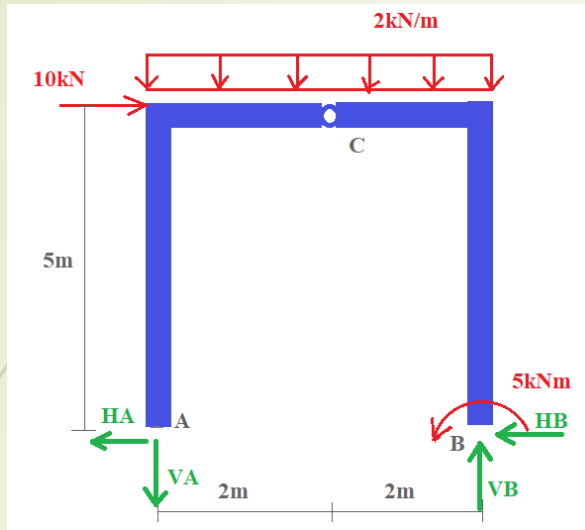


Diagrama de cuerpo libre (DCL)



Si toda la estructura está en equilibrio también lo estarán cada una de sus partes.

Reacciones de vínculos externos



$$\sum M_A = 0 \quad \frac{2kN}{m} \cdot 4m \cdot 2m + 10kN \cdot 5m - 5kNm - V_B \cdot 4m = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad -\frac{2kN}{m} \cdot 4m \cdot 2m + 10kN \cdot 5m - 5kNm - V_A \cdot 4m = 0$$

$$V_A = 7,25kN$$

$$V_B = 15,25kN$$

$$\sum M_C^{izq} = 0 \quad -7,25kN \cdot 2m - \frac{2kN}{m} \cdot 2m \cdot 1m + H_A \cdot 5m = 0$$

$$\sum M_C^{der} = 0 \quad -15,25kN \cdot 2m + \frac{2kN}{m} \cdot 2m \cdot 1m - 5kNm + H_B \cdot 5m = 0$$

$$H_A = 3,7kN$$

$$H_B = 6,3kN$$

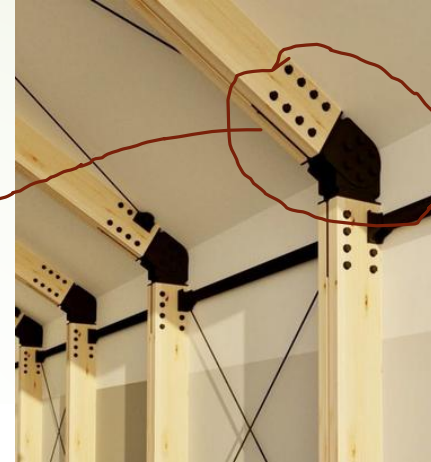
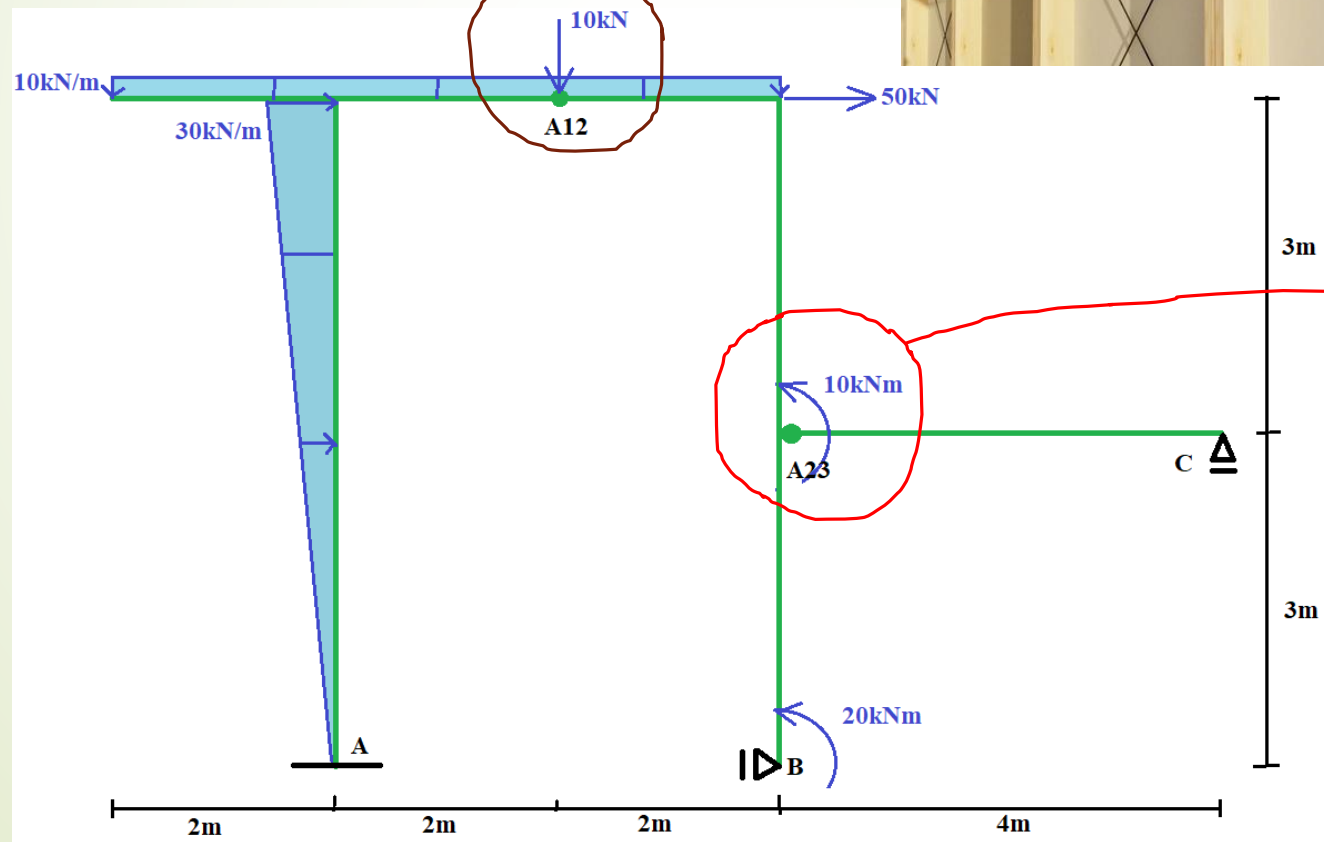
Verificación

$$\sum F_x = 0 \quad 10kN - 3,7kN - 6,3kN = 0$$

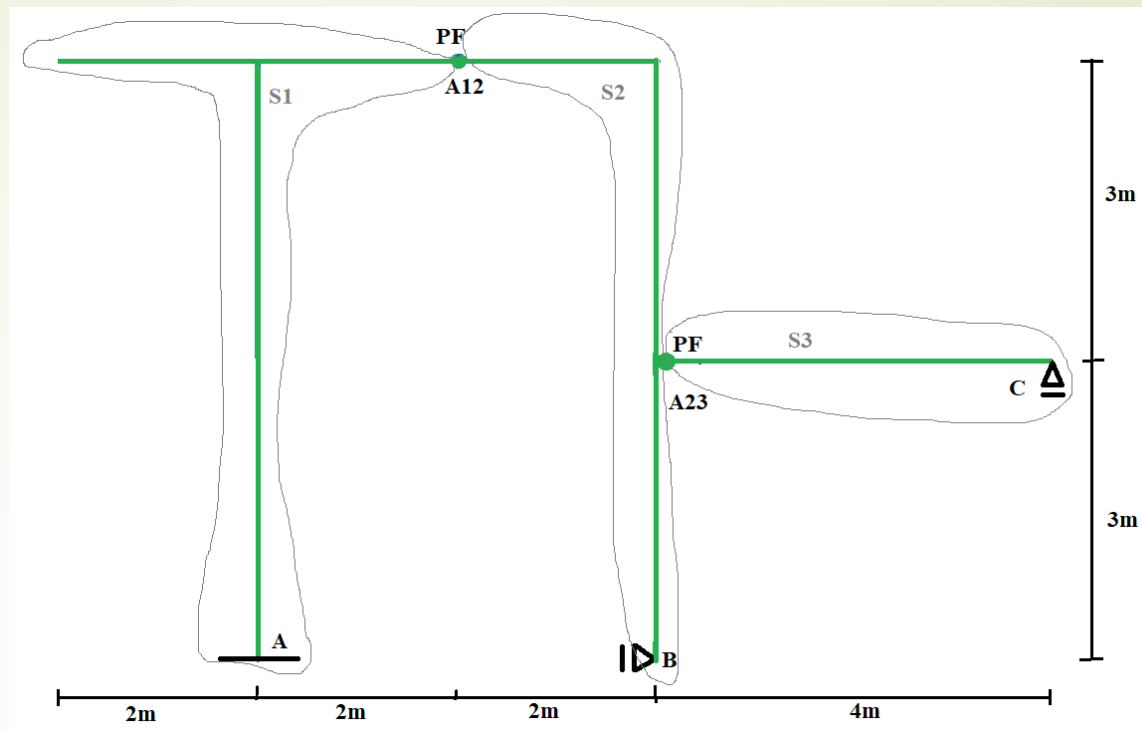
$$\sum F_y = 0 \quad -7,25kN - \frac{2kN}{m} \cdot 4m + 15,25kN = 0$$

Ejemplo: cadena cinemática abierta de tres chapas.

- Análisis cinemático
- Diagrama de cuerpo libre
- Reacciones de vínculo externo

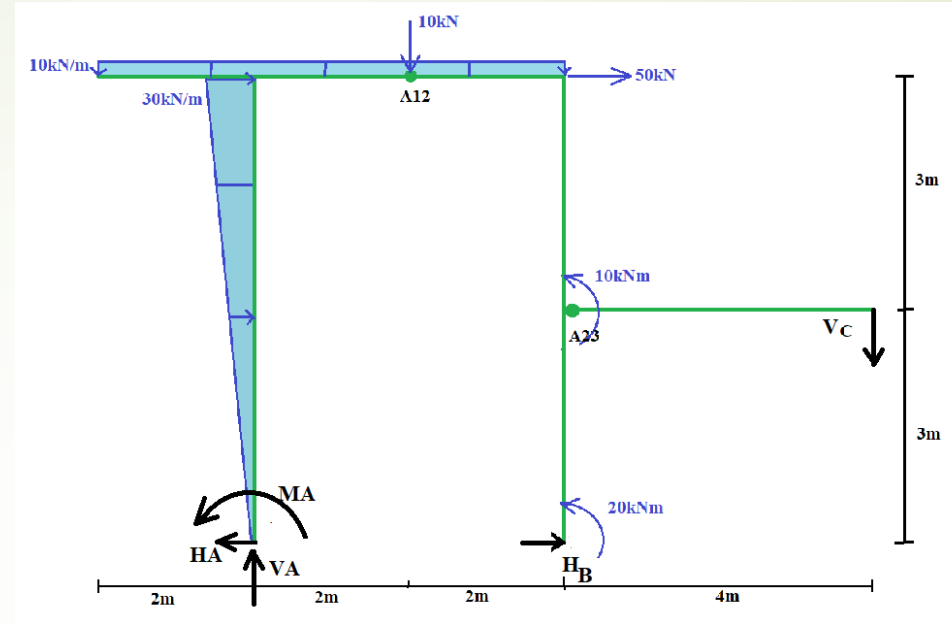


Análisis cinemático.



- a)-**Verificar** $GDL=RVE$. Se cumple, La cadena cinemática presenta 5 grados de libertad y tiene impuestas 5 condiciones de vínculo: 3 en S1 (empotramiento), 1 en S2 (apoyo móvil) y 1 en S3 (apoyo móvil).
- b)-**Comprobar** la eficiencia de la vinculación. Las chapas S1 tiene los tres GDL restringidos por el empotramiento, la articulación A12 es un punto fijo de S2 y como la recta de acción de la reacción en B no pasa por A12 podemos concluir que S2 está fija. La articulación relativa A23 resulta punto fijo de S2 y S3 y finalmente S3 esta fija dado que la dirección del apoyo móvil ubicado en C no pasa por A23.
- Como simultáneamente se cumplen los puntos a y b se puede concluir que la estructura resulta isostáticamente vinculada y cinemáticamente invariable.

Diagrama de cuerpo libre



Reacciones de vínculos externos

$$\sum M_{A23}^{der} = 0 \quad -10kNm + V_C \cdot 4m = 0$$

$$V_C = 2,5kN$$

$$\sum M_{A12}^{der} = 0 \quad -H_B \cdot 6m - 20kNm - 10kNm + 2,5kN \cdot 6m + 20kN \cdot 1m = 0$$

$$H_B = 0,83kN$$

$$\sum M_A = 0 = -M_A - 20kNm - 10kNm + 2,5kN \cdot 8m + 10kN \cdot 2m + 60kN \cdot 1m + 90kN \cdot 4m + 50kN \cdot 6m$$

$$M_A = 730kNm$$

$$\sum F_x = 0 = 0,8kN + 90kN + 50kN - H_A$$

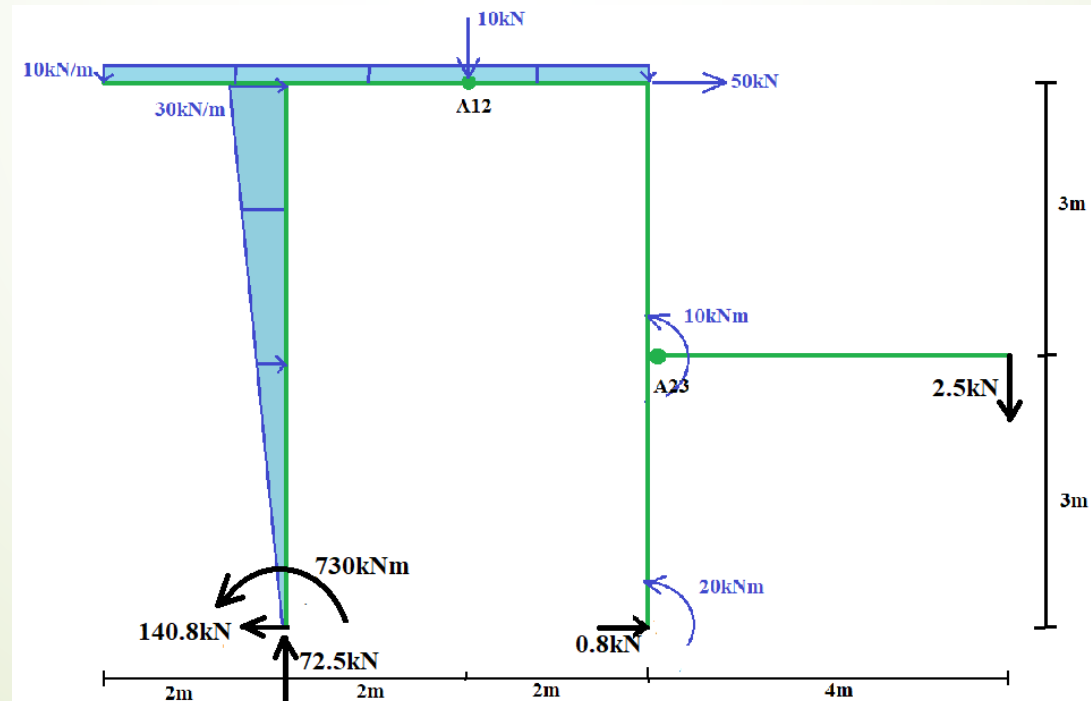
$$H_A = 140,8kN$$

$$\sum F_y = 0 = V_A - 60kN - 10kN - 2,5kN$$

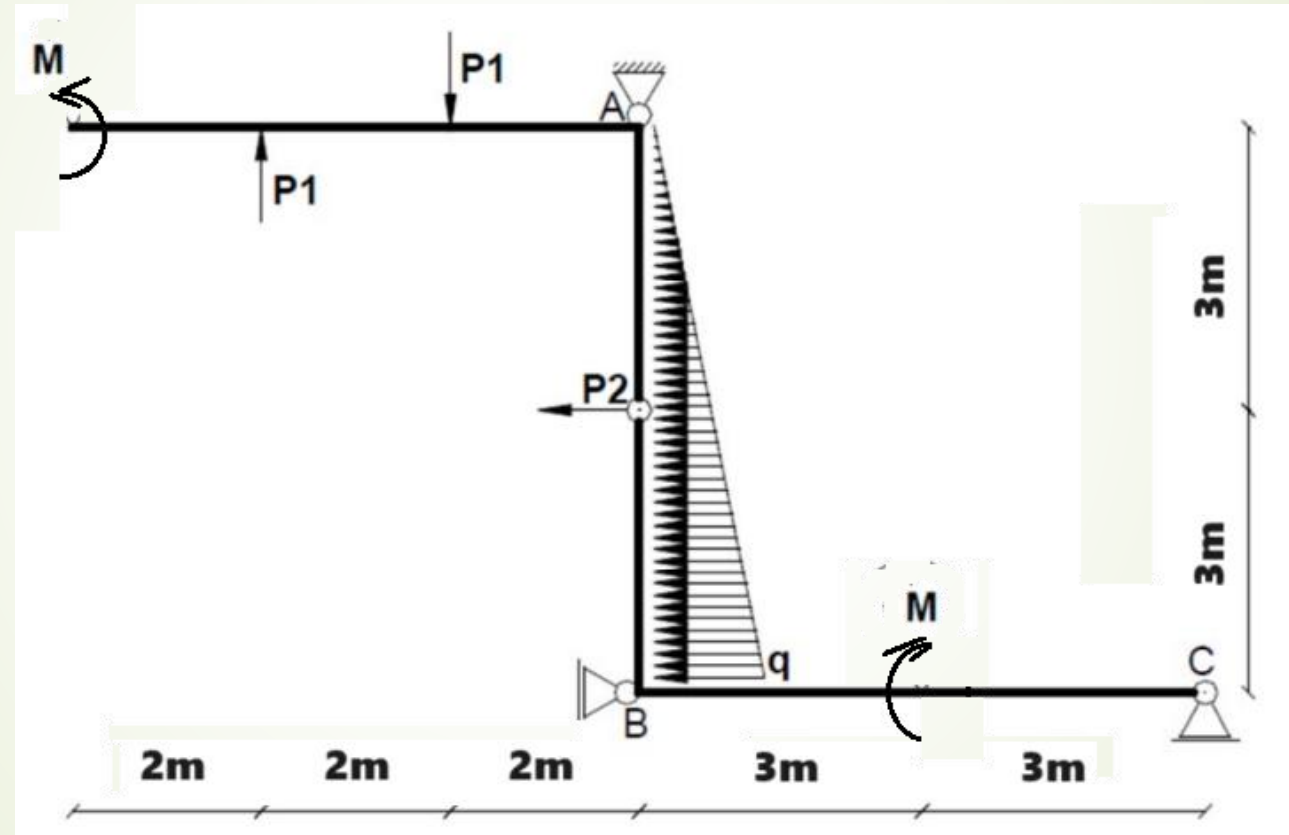
$$V_A = 72,5kN$$

Verificar resultados con otra ecuación de equilibrio. Por ejemplo

$$\sum M_{A12}^{izq} = 0$$

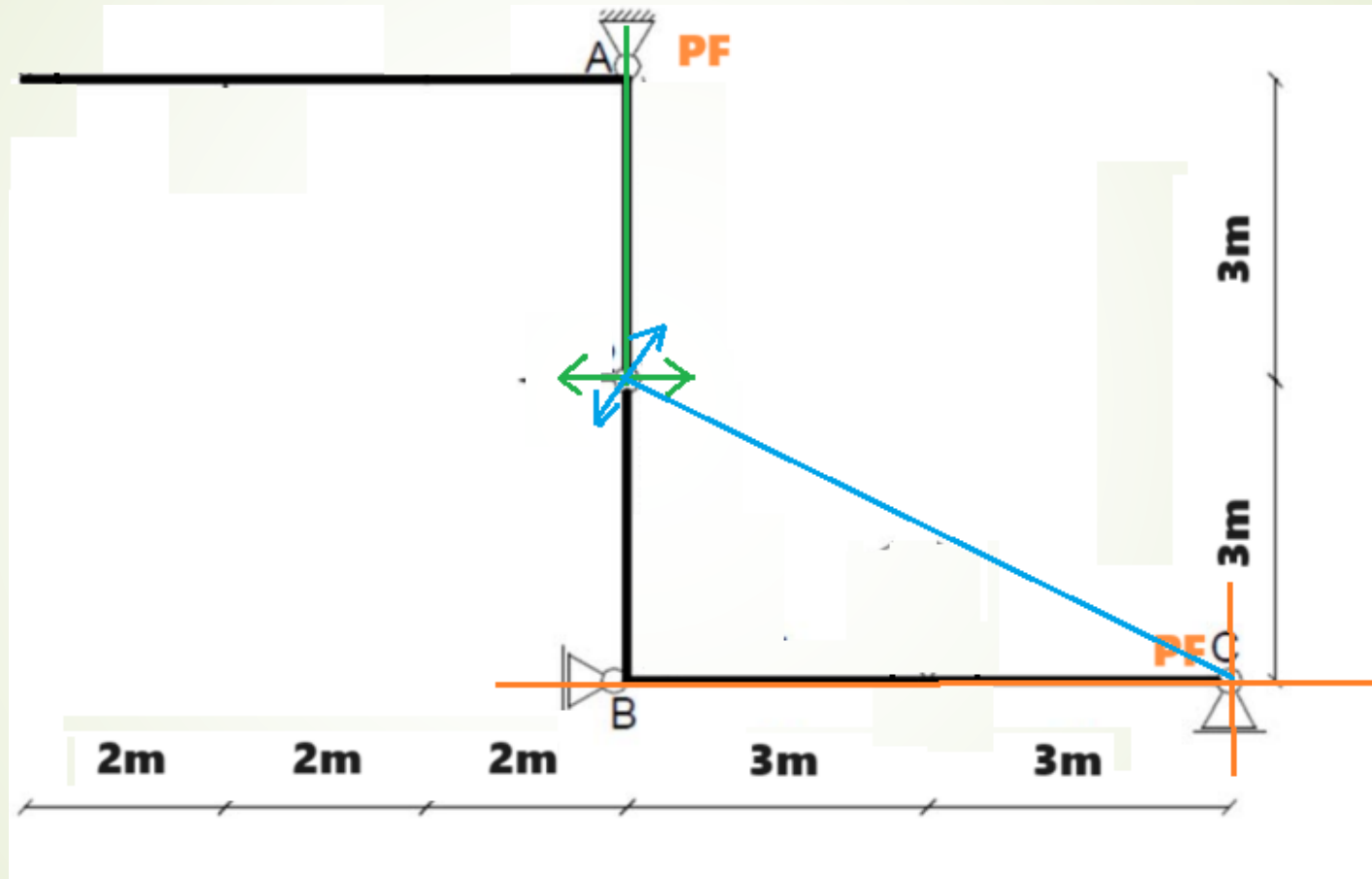


Análisis Cinemático y Cálculo de reacciones de vínculos



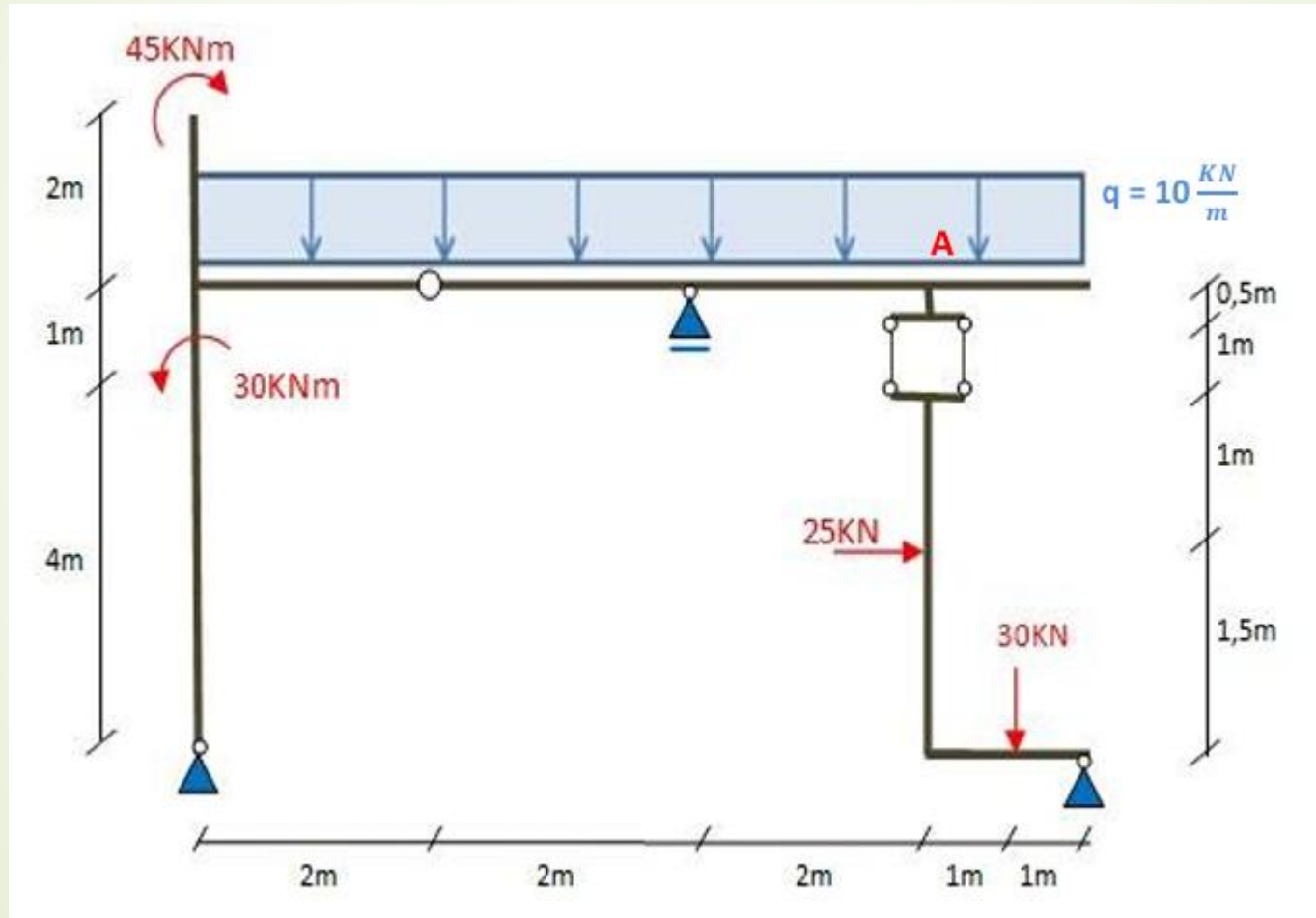
$M=10\text{kNm}$
 $P1=5\text{kN}$
 $P2=8\text{kN}$
 $q=10\text{kN/m}$

Análisis cinemático

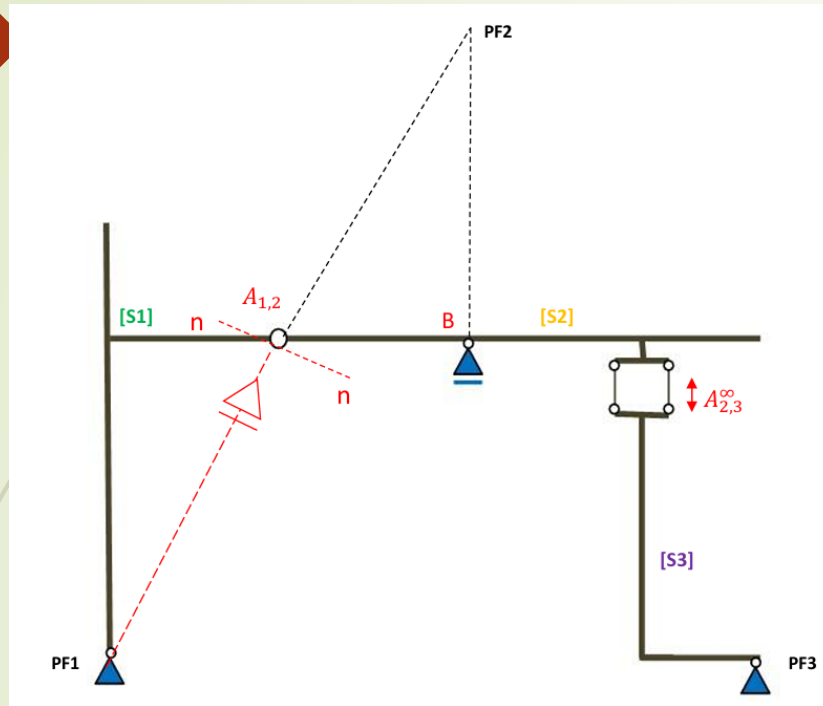


Cinemáticamente estable

Análisis cinemático y cálculo de reacciones de vínculos.



Análisis cinemático



Vinculación Aparente:

La chapa [S1] tiene un punto fijo (PF1) impuesto por el apoyo fijo. El PF1 le cede a la chapa [S2] a través de su articulación propia ($A_{1,2}$) un vínculo ficticio ya que la chapa [S1] solo puede moverse de n-n.

Ahora la chapa [S2] tiene dos apoyos móviles, uno ficticio y otro en B, en la intersección de la dirección de los dos móviles se encuentra un punto fijo (PF2) perteneciente a la chapa [S2].

El punto fijo (PF2) perteneciente a la chapa [S2] y el punto fijo (PF3) perteneciente a la chapa [S3] y la articulación impropia $A_{2,3}^{\infty}$ forma un arco a tres articulaciones. Es decir, como PF1, PF2 y $A_{2,3}^{\infty}$ no son colineales por lo tanto la chapa [S2] y [S3] están fijas.

Como la chapa [S2] está fija entonces $A_{1,2}$ está fija por pertenecer a [S2]. La chapa [S1] está fija por tener dos puntos fijos (PF1 y $A_{1,2}$).

La estructura está cinemáticamente estable o invariable

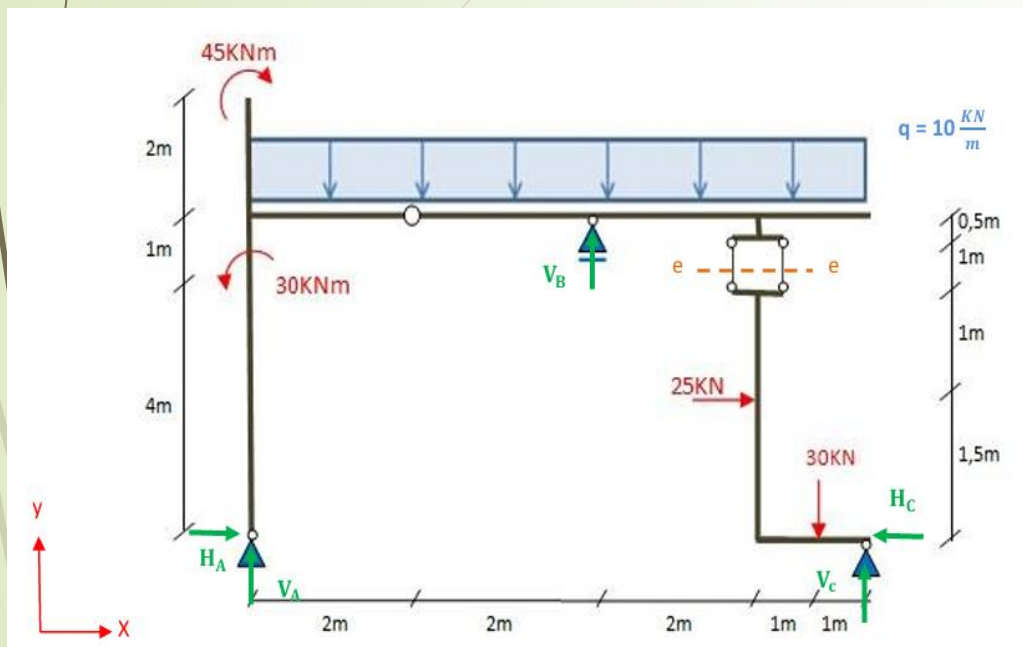
Isostaticidad

$$GL = n + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$Nv = 2 + 1 + 2 = 5$$

$$GL = Nv \longrightarrow \text{Isostáticamente Sustentada}$$

Reacciones de vínculos



Ecuaciones de Equilibrio:

$$1) \sum \text{Proy}_{[S3]}^{e-e} = 0 \rightarrow 25\text{KN} - H_C = 0$$

$$2) \sum \text{Proy}_{[S1]+[S2]}^{e-e} = 0 \rightarrow H_A = 0$$

$$3) \sum M_{[S1]}^{A_{1,2}} = 0 \rightarrow -45\text{KNm} + 30\text{KNm} + \left(10\frac{\text{KN}}{\text{m}} \cdot 2\text{m}\right) \cdot 1\text{m} - V_A \cdot (2\text{m}) + H_A \cdot (5\text{m}) = 0$$

$$4) \sum M^C = 0 \rightarrow -V_A \cdot (8\text{m}) + 30\text{KNm} - 45\text{KNm} + \left(10\frac{\text{KN}}{\text{m}} \cdot 8\text{m}\right) 4\text{m} - V_B \cdot (4\text{m}) - 25\text{KN} \cdot 1,5\text{m} + 30\text{KN} \cdot 1\text{m} = 0$$

$$5) \sum M_{[S2]+[S3]}^{A_{1,2}} = 0 \rightarrow V_B \cdot (2\text{m}) - \left(10\frac{\text{KN}}{\text{m}} \cdot 6\text{m}\right) \cdot 3\text{m} + 25\text{KN} \cdot 2,5\text{m} - 30\text{KN} \cdot 5\text{m} + V_C \cdot (6\text{m}) - H_C \cdot (4\text{m}) = 0$$

$$H_C = 25\text{KN}$$

$$H_A = 0\text{KN}$$

$$V_B = 69,375\text{KN}$$

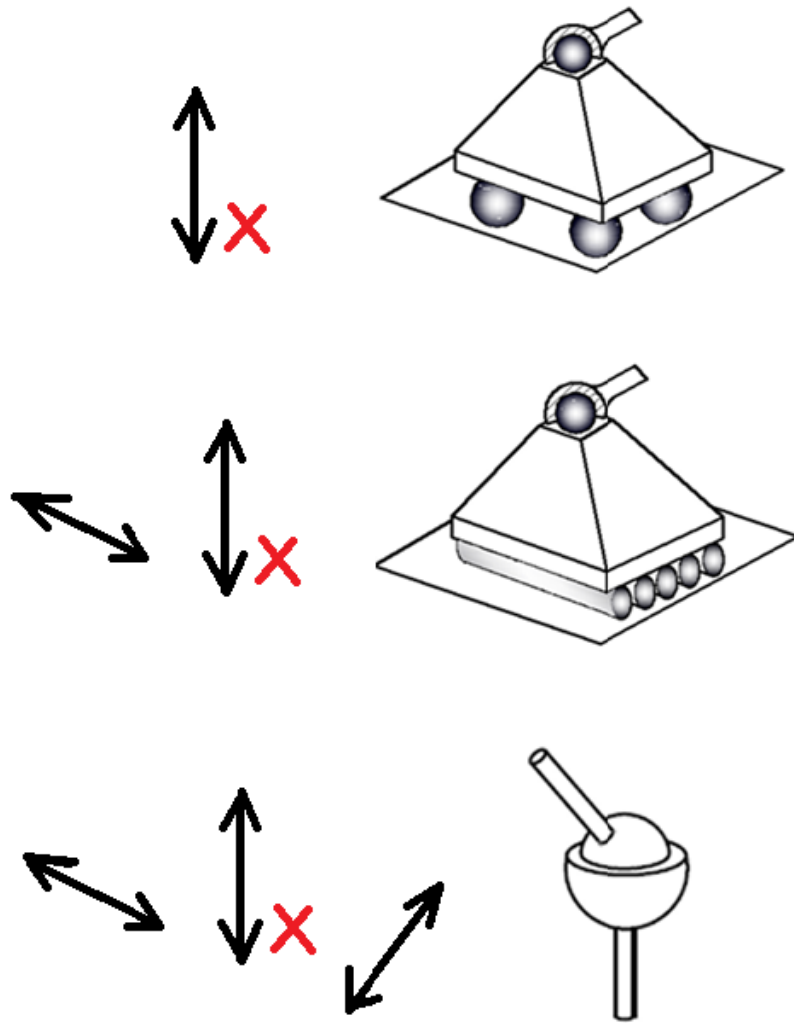
$$V_C = 38,125\text{KN}$$

$$V_A = 2,5\text{KN}$$

Vínculos externos o apoyos en el espacio



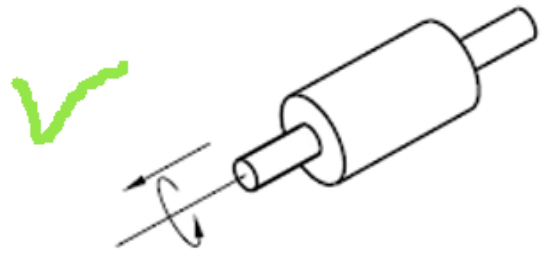
Vínculos en el espacio – Tipos de apoyos.



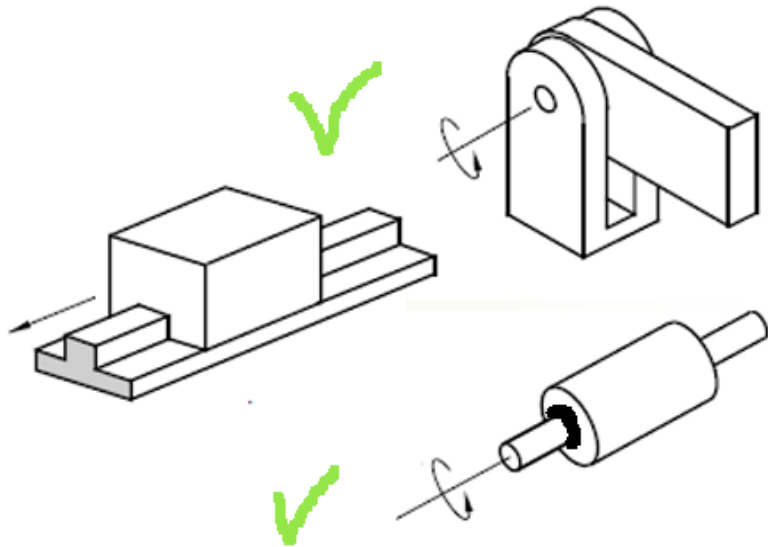
a) **De primera especie o apoyo superficial:** Este vínculo restringe sólo un grado de libertad y puede estar constituido por una biela o bien por un dispositivo de apoyo.

b) **De segunda especie o apoyo lineal:** Este vínculo restringe dos grados de libertad, y puede materializarse sea mediante dos bielas concurrentes a un punto del cuerpo rígido o bien por el dispositivo de apoyo.

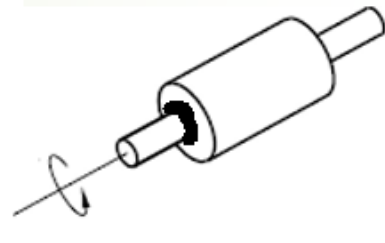
c) **De tercera especie:** Denominado también apoyo fijo espacial o rótula, este tipo de vínculo restringe tres grados de libertad. También puede materializarse por tres bielas no coplanares.



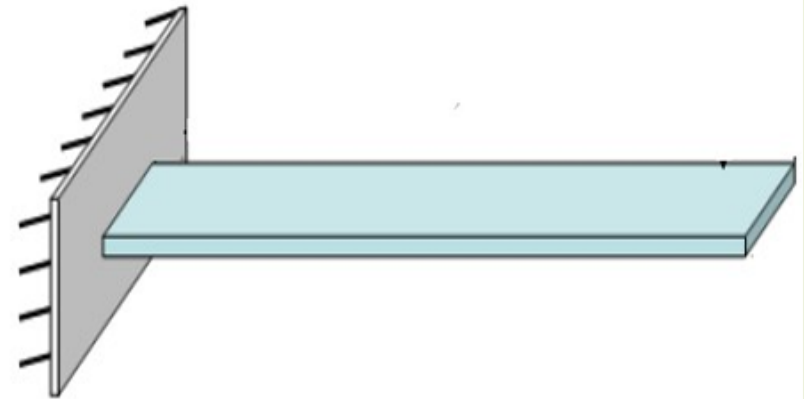
d) De cuarta especie. Esta forma de vinculación restringe cuatro grados de libertad.



e) De quinta especie. Restringe cinco grados de libertad como ejemplo de los mismos aplicada a mecanismos citaremos los cojinetes de empuje, que sólo permiten giros.

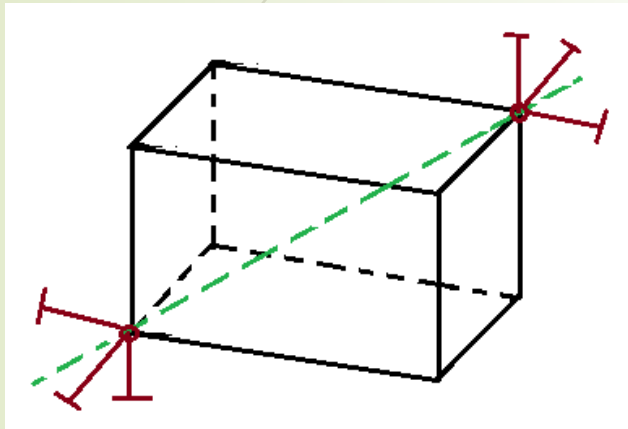


f) De sexta especie o empotramientos espaciales. Restringen seis grados de libertad al impedir todo movimiento al cuerpo rígido al cual se encuentran aplicados.



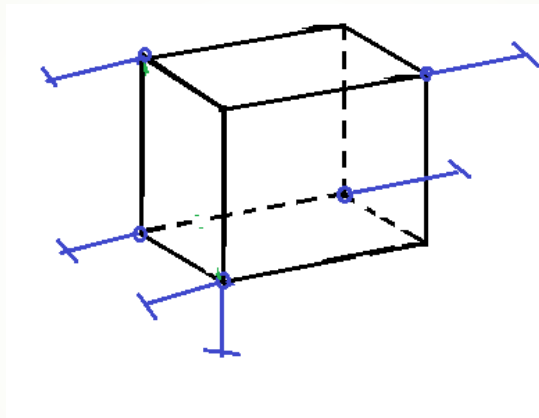
Sistema espacial

Un cuerpo tiene 6 GDL por lo tanto necesita 6 CV para que sea isostático. Hay que verificar que los vínculos no sean aparentes.



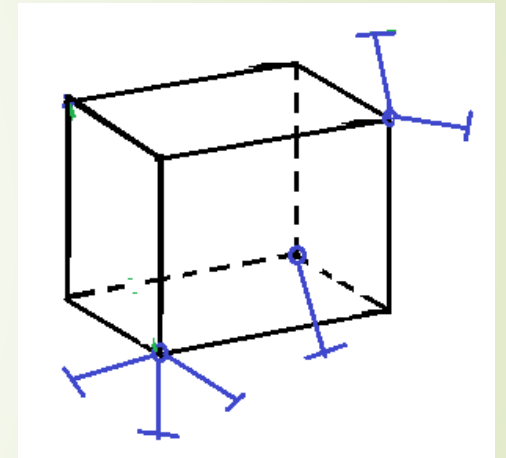
Vínculos aparentes

Las seis bielas concurren a puntos de la misma recta.



Vínculos aparentes

Cuatro o más bielas son paralelas.



No hay vinculación aparente.

Estos son algunos de los ejemplos de vinculación aparente. Existen otras, por ejemplo:

- Seis bielas coplanares.
- Cuatro o más bielas concurren a un punto.

Ejemplo: Determinar reacciones de vínculo de la estructura.

