FENÓMENOS DE ONDAS

Introducción

En este capítulo se describieran y analizaran distintos fenómenos ondulatorios que se presentan con frecuencia en la naturaleza, la reflexión y la transmisión de ondas, los fenómenos de superposición de ondas y en particular la interferencia. También se analizarán las características de las ondas estacionarias en cuerdas y en tubos y su importancia en los instrumentos musicales.

Finalmente se presentará el efecto Doppler ampliamente usado en dispositivos tecnológicos de aplicación industrial y médico como los medidores de velocidad o los ecógrafos coronarios (ecodoppler)

Reflexión y transmisión de ondas

En el capítulo anterior, se consideró que las cuerdas eran extremadamente largas para no tener en cuenta los fenómenos que ocurren en los extremos. En este capítulo comenzaremos a analizar fenómenos que ocurren en los confines del medio de propagación, reconoceremos dos casos básicos:

a) Cuando la onda llega a un límite rígido que no le permite propagarse.

b) Cuando la onda llega a un medio distinto que le permite continuar la propagación aunque con modificaciones en la misma.

Para el primer caso hablaremos de ***reflexión*** ya que en ese punto la onda se refleja, en el segundo caso se trata de ***transmisión***.

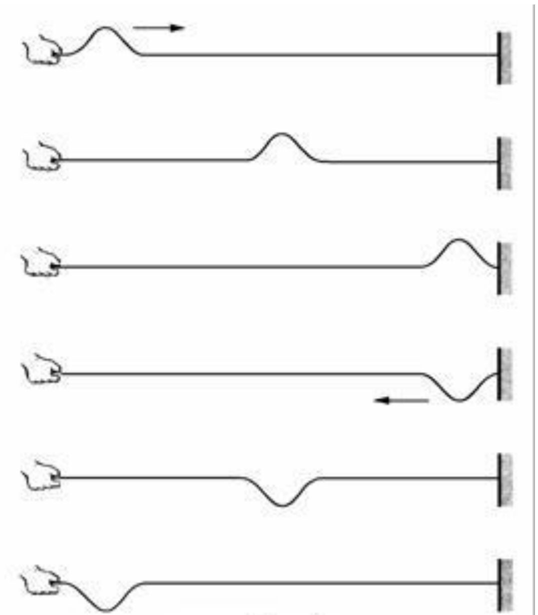

Fig. 1

Como modelo de reflexión consideremos un pulso que viaja sobre una cuerda fija a una pared en uno de sus extremos. Cuando el pulso alcanza la pared, se refleja y vuelve en dirección de la fuente pero invertido. Esto ocurre porque cuando el pulso llega al extremo fijo de la cuerda, ésta produce una fuerza hacia arriba sobre el soporte donde está fijada. De acuerdo con el principio de acción y reacción, el soporte ejerce una fuerza opuesta, es decir hacia abajo, en este caso, sobre la cuerda. Esta fuerza hacia abajo es la causa de que el pulso se invierta en la reflexión.

El eco es el ejemplo clásico de reflexión de una onda, en este caso acústica.

Estamos frente a una situación diferente cuando hay transmisión, esto ocurre cuando la onda cambia de medio. Un ejemplo lo tenemos cuando una onda acústica que se propaga por el aire llega a una superficie de agua, parte de ella incide en el agua y continúa su propagación mientras otra parte se refleja. Esta situación la vamos a modelizar con dos cuerdas de características distintas unidas con continuidad.

En la figura 2 se encuentra el ejemplo de las dos cuerdas unidas, lo que distingue a una cuerda de la otra es su densidad. El comportamiento del sistema variará según la onda incidente se propague por la cuerda de mayor o menor masa por unidad de longitud.

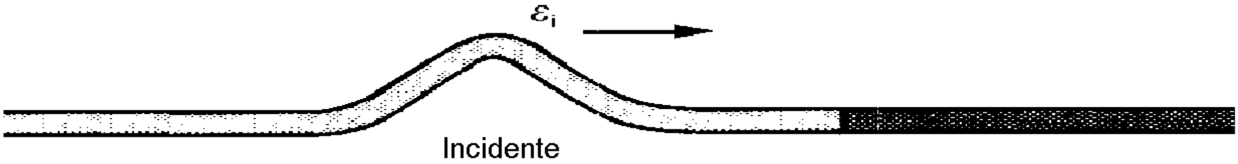

Fig. 2

Si la cuerda portadora del pulso incidente es menos densa, como se observa en el caso (a) de la figura 3, parte del pulso se transmite y parte se refleja pero la parte reflejada en la superficie límite se invierte, la onda reflejada está desfasada 180º con respecto a la onda incidente.

Si, por el contrario, la primera cuerda es más densa que la segunda, como se muestra en la figura 3(b), parte del pulso se transmite, parte se refleja sin invertirse.

Ejercicio
Una onda armónica se propaga por dos cuerdas unidas como se observa en la figura 3 caso a y b. Analiza:

a. Las velocidades de la onda incidente y de la transmitida.
b. La frecuencia de la onda incidente y la de la transmitida.
c. Las longitudes de onda de la onda incidente y de la transmitida.

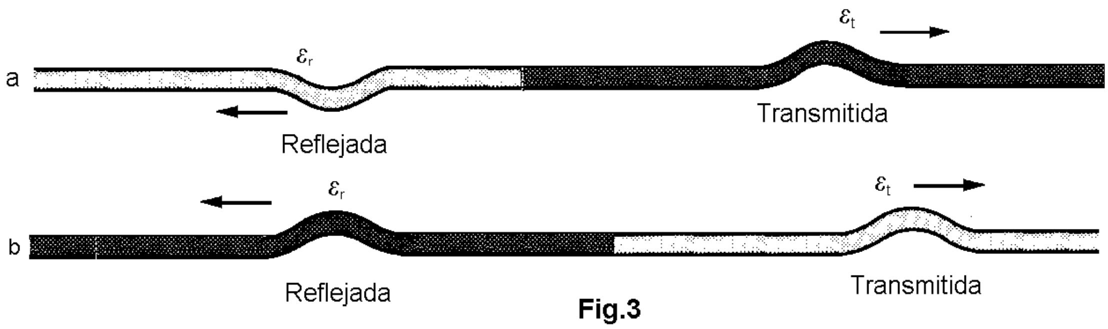

Fig.3

Superposición de ondas

Cuando dos ondas se encuentran en el espacio, sus perturbaciones individuales (representadas matemáticamente por sus funciones de onda) se superponen creando una nueva onda. Este fenómeno es propio de las ondas, no existe una situación análoga en el movimiento de las partículas, es decir, las partículas nunca se solapan.

Esto se resume en el **principio de superposición** del movimiento ondulatorio y se expresa así:

“Si en un medio actúan dos o más ondas la función general de onda resultante es la suma de las funciones de ondas individuales”.

Cuando en un medio se encuentran dos o más ondas la forma resultante de la superposición de esas ondas puede determinarse sumando los desplazamientos producidos por cada onda separadamente.

Un caso especial de superposición se presenta en una cuerda entre dos pulsos idénticos que se mueven en sentidos opuestos, excepto que uno está invertido respecto del otro, como representa la figura 3. En un instante determinado, cuando se encuentran, los pulsos se solapan y su suma es cero. En ese momento la cuerda está horizontal pero no en reposo, justo a la derecha de la región de solapamiento, la cuerda está moviéndose hacia arriba, mientras que a la izquierda lo hace hacia abajo, un instante después los pulsos emergen y siguen su camino

Otro caso es el que se observa en la figura 4 en la que los pulsos tienen el mismo signo y, cuando se encuentran, se suman sus amplitudes

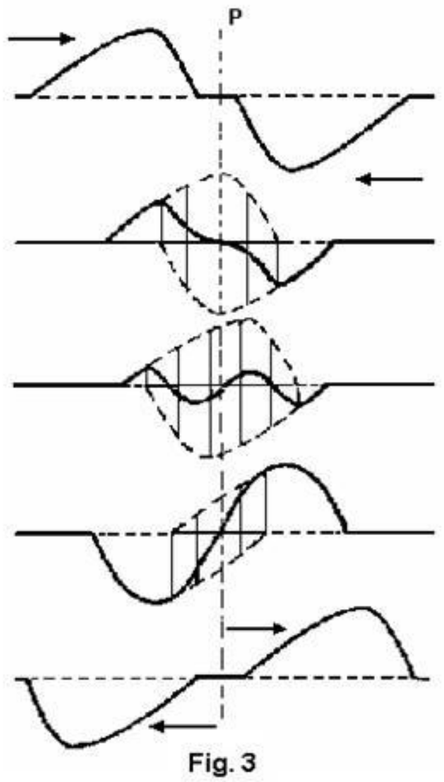

Fig. 3

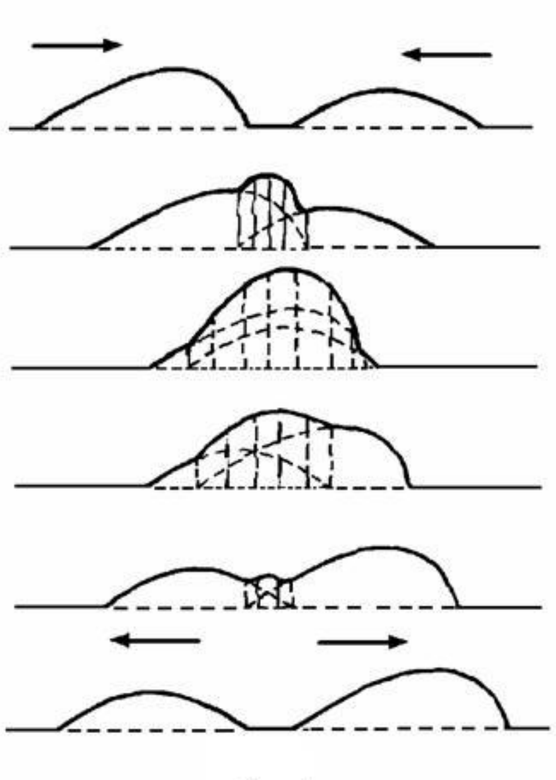

Fig. 4

Fig. 3: Superposición de dos ondas que viajan en sentido contrario como tienen signo opuesto la superposición es sustractiva

Fig. 4: Superposición de dos ondas que viajan en sentido contrario como tienen el mismo signo la superposición es aditiva

Interferencia

La superposición de ondas armónicas de igual frecuencia se llama **interferencia**. La interferencia, es un fenómeno ondulatorio importante, que nos permitirá explicar fenómenos en distintas áreas de la ciencia y tecnología como también en el campo de la música. El resultado de la interferencia de ondas armónicas depende de la diferencia de fase entre ellas. Veamos la onda que resulta de la superposición de dos ondas que se propagan en la misma dirección, tienen la misma frecuencia angular y longitud de onda pero que difieren en fase una cantidad φ como indica la figura.

La función ε_1 de una onda armónica que se propaga a la derecha con una frecuencia angular ω y un número de onda k con amplitud ε_{01} es:

$$\varepsilon_{1(x,\,t)} = \varepsilon_{01}\,\text{sen}\,(kx - \omega t)$$

Para esta función de onda, tomamos t = 0 cuando el desplazamiento es nulo en x=0.

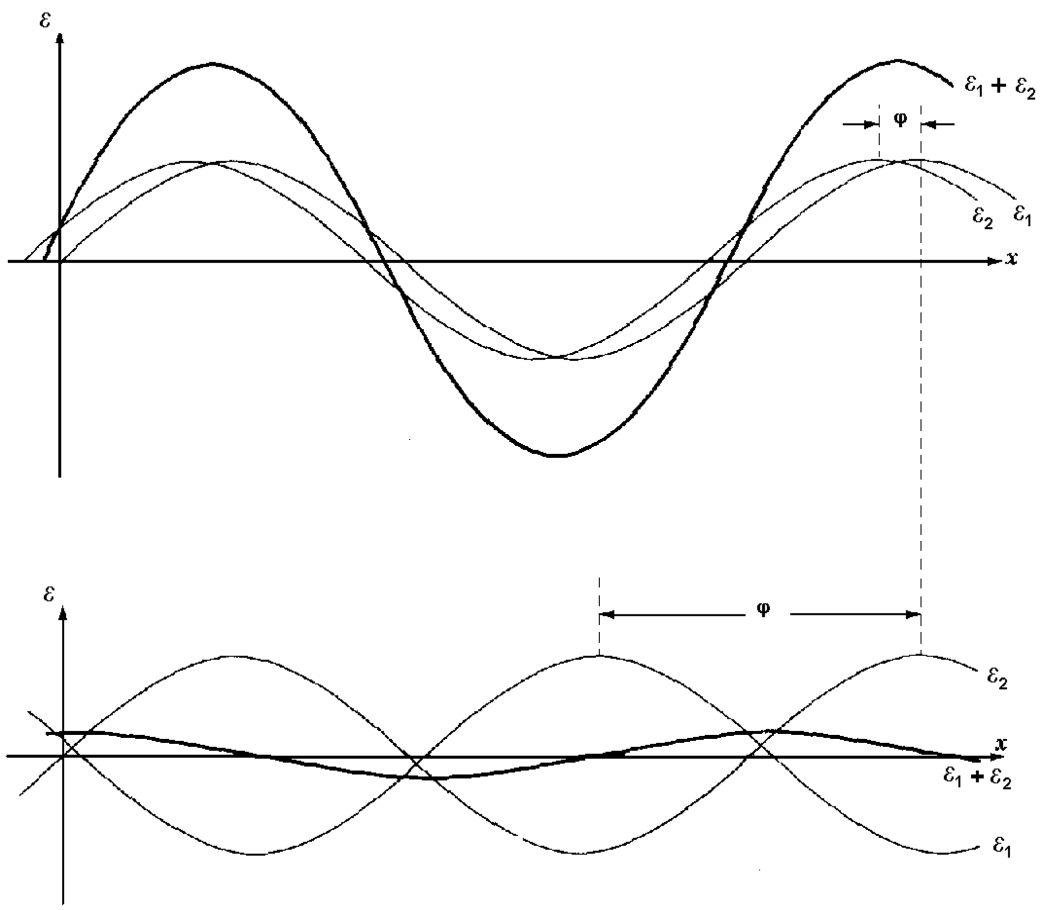

Fig. 5

Fig. 5: Superposición de ondas armónicas de igual frecuencia y amplitud, con un defasaje relativo φ

Para el movimiento de la segunda onda armónica como ya escogimos el instante correspondiente a t = 0, la ecuación general para esta función de onda es:

$$\varepsilon_{2(x,t)} = \varepsilon_{02}\ \text{sen}\ (kx-\omega t+\varphi)$$

La onda resultante es la suma

$$\varepsilon_{1(x,t)} + \varepsilon_{2(x,t)} = \varepsilon_{01}\ \text{sen}\ (kx-\omega t) + \varepsilon_{02}\ \text{sen}\ (kx-\omega t + \varphi)$$

Si se cumple que $\varepsilon_{01} = \varepsilon_{02} = \varepsilon_0$

Esta ecuación puede simplificarse aplicando la siguiente identidad trigonométrica.

$$\text{sen}\theta_1 + \text{sen}\theta_2 = 2\cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\ \ \text{sen}\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$

En nuestro caso $\theta_1 = kx-\omega t$ y $\theta_2 = kx-\omega t + \varphi$ de modo que

$$\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) = -\frac{1}{2}\varphi$$

$$\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) = kx-\omega t + \varphi$$

Así la ecuación de la onda resultante toma la forma

$$\varepsilon_{1(x,t)} + \varepsilon_{2(x,t)} = (2\,\varepsilon_0\cos\frac{1}{2}\varphi)\ \text{sen}\ (kx-\omega t + \frac{1}{2}\varphi)$$

donde se tuvo en cuenta que $\cos\frac{1}{2}\varphi = \cos(-\frac{1}{2}\varphi)$.

Analizando la ecuación resultante concluimos, que en general, la superposición de dos ondas armónicas da como resultado otra onda armónica del mismo número de onda y de la misma frecuencia. La onda difiere en fase de ambas ondas originales y su amplitud es

$$\left|2\varepsilon_0\cos\frac{1}{2}\varphi\right|.$$

Si las dos ondas están en fase, la diferencia de fase es $\varphi = 0$, $\cos 0 = 1$ y la amplitud de la onda resultante es 2ε lo que da por resultado una **interferencia constructiva.** ¿Qué ocurrirá si $\varphi = \pi$ rad?

Ondas estacionarias en cuerdas

Si las ondas están confinadas en un medio con límites que sólo permiten la reflexión, aparece un tipo particular de ondas llamadas **ondas estacionarias**.

Este fenómeno se da con mucha frecuencia en la naturaleza y es muy común observarlo en dispositivos tecnológicos, los instrumentos musicales como las guitarras o los pianos que tienen cuerdas fijas en sus extremos y al vibrar producen ondas estacionarias.

Para ejemplificar las ondas estacionarias recurriremos a las cuerdas de una guitarra. Cuando se pulsa la cuerda se introduce una onda que se propaga hacia ambos extremos donde se reflejan invirtiendo su sentido, en la cuerda hay entonces ondas que van y que vuelven de manera que en todo momento existen ondas moviéndose en ambos sentidos superponiéndose. La onda estacionaria es el resultado de la interferencia de dos ondas de la misma amplitud y frecuencia que se propagan en la misma dirección pero en sentido contrario.

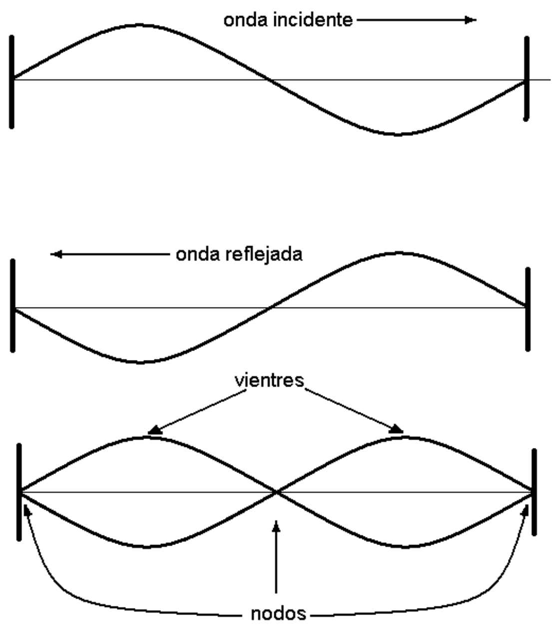

Fig. 6

En la onda estacionaria existen puntos fijos (de allí el nombre de estacionaria), en los que el valor de la amplitud es siempre cero, a estos puntos se los llama **nodos.** Entre dos nodos consecutivos se encuentran los **vientres o antinodos,** estos son puntos de amplitud máxima. La distancia entre dos nodos o vientres consecutivos constituye media longitud de onda.

La energía no se transmite fuera del medio donde se desarrolla la onda estacionaria porque no puede pasar los extremos donde está limitada, puesto que sus fronteras están en reposo permanente. Esto hace que la cuerda se mantenga vibrando por mucho tiempo. En el caso de las cuerdas musicales la energía se va transmitiendo al aire en forma de sonido que es lo que interesa producir, si no fuese así no habría amortiguación y la cuerda permanecería vibrando de modo permanente.

Para determinar las características de las ondas estacionarias consideremos dos ondas que se propagan entre los extremos fijos de una cuerda de longitud L, una viajando a la derecha

$$\varepsilon_d = \varepsilon_0 \text{ sen } (kx - \omega t)$$

y la otra, de igual amplitud viajando a la izquierda

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 \text{ sen } (kx + \omega t)$$

La onda resultan $\varepsilon_{(x,t)}$ será la suma de ambas $\varepsilon_{(x,t)} = \varepsilon_d + \varepsilon_i$

$$\varepsilon_{(x,t)} = \varepsilon_0 \text{ sen } (kx - \omega t) + \varepsilon_0 \text{ sen } (kx + \omega t)$$

$$\varepsilon_{(x,t)} = \varepsilon_0 [\text{sen } (kx - \omega t) + \text{sen } (kx + \omega t)]$$

Pero recordando las relaciones trigonométricas

$$\text{sen } (\alpha \pm \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \text{ sen } \beta$$

Realizando los reemplazos $kx = \alpha$ y $\omega t = \beta$ y operando resulta

$$\varepsilon_{(x,t)} = 2\,\varepsilon_0 \text{ sen } kx \ \cos \omega\, t$$

Esta es la ecuación resultante de la superposición de dos ondas que viajan con sentidos opuestos. Sin embargo hay que considerar que la cuerda se encuentra limitada por los extremos. En este caso como los extremos de la cuerda están fijos la única amplitud posible es cero (nodo), a esto lo llamamos condiciones de contorno. Lo que significa que para un extremo de la cuerda (x = 0) el valor de la amplitud es $\varepsilon_{(0,t)} = 0$ y para el otro extremo (x = L) la misma amplitud $\varepsilon_{(L,t)} = 0$

Reemplazando esto en la ecuación obtenida, resulta

$$\varepsilon_{(0,t)} = 2\,\varepsilon_0 \text{ sen } k0 \ \cos \omega\, t = 0$$

que es nula ya que sen 0 = 0

En cambio el valor de la ecuación en el otro extremo es

$$\varepsilon_{(L,t)} = 2\,\varepsilon_0 \text{ sen } kL \ \cos \omega\, t = 0$$

sólo será cero en aquellos valores de L que cumplan con la condición

$$\text{sen } kL = 0$$

que se cumple para los valores de k L tales que

$$kL = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ ....$$

En general

$$kL = n\pi \qquad \text{con } n = 1, 2, 3, ...$$

pero

$$kL = \frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi \Rightarrow L = \frac{\lambda}{2} n$$

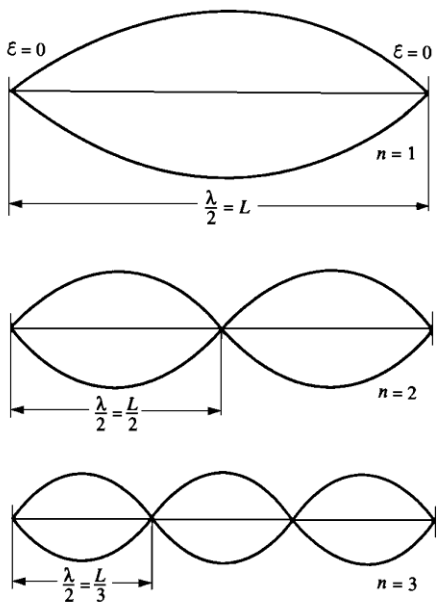

Fig. 7

En una cuerda de longitud determinada, hay muchas ondas estacionarias posibles. La única condición que deben satisfacer que los extremos de la cuerda permanezcan fijos, así debe haber un nodo en cada extremo, Las posibles longitudes de onda (λ) serán: $\lambda_1 = 2L$, $\lambda_2 = 2/2L$, $\lambda_3 = 2/3\ L$, etc.

Generalizando $\lambda_n = \dfrac{2L}{n}$ donde *n* es un número entero y *L* la longitud de la cuerda.

Las frecuencias de estas ondas son $f_n = \dfrac{v}{\lambda_n} = \dfrac{nv}{2L}$. Este conjunto incluye la frecuencia fundamental (cuando *n*=1) $f_1 = \dfrac{v}{2L}$ y todos los armónicos $f_n = nf_1$.

Como sabemos la velocidad de la onda en una cuerda está dada por $v = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$, entonces

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Con lo cual vemos que las frecuencias de las ondas estacionarias no dependen de la frecuencia de la fuente emisora como ocurre en las ondas viajeras, sino que dependen de ciertas características de la cuerda que son tensión, longitud y masa lineal.

La cuerda tiene, entonces, un número de patrones naturales de vibración, denominados *modos normales*, cada uno de los cuales tiene una frecuencia característica. La frecuencia más baja, correspondiente a *n*=1, es la *frecuencia fundamental* $f_1 = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$.

Los modos normales restantes, llamados a veces sobretonos, son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Estas frecuencias naturales más altas, junto con la frecuencia fundamental, forman una ***serie armónica***. La frecuencia fundamental es el primer armónico, la de frecuencia igual al doble de la fundamental es el segundo armónico y así sucesivamente.

Cada nota de la escala musical corresponde a determinada frecuencia. Cuando se toca una nota en un instrumento, su frecuencia asignada es la de la primera armónica, la frecuencia fundamental. Esta frecuencia es dominante sobre los sobretonos acompañantes. La primera armónica corresponde a la frecuencia más baja que se puede obtener y los sobretonos tienen frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Los sobretonos son los que determinan la calidad (timbre) del sonido del instrumento. Recordemos que el timbre está determinado por la forma de la onda, la cual depende de la diferente proporción con que intervienen los armónicos superiores.

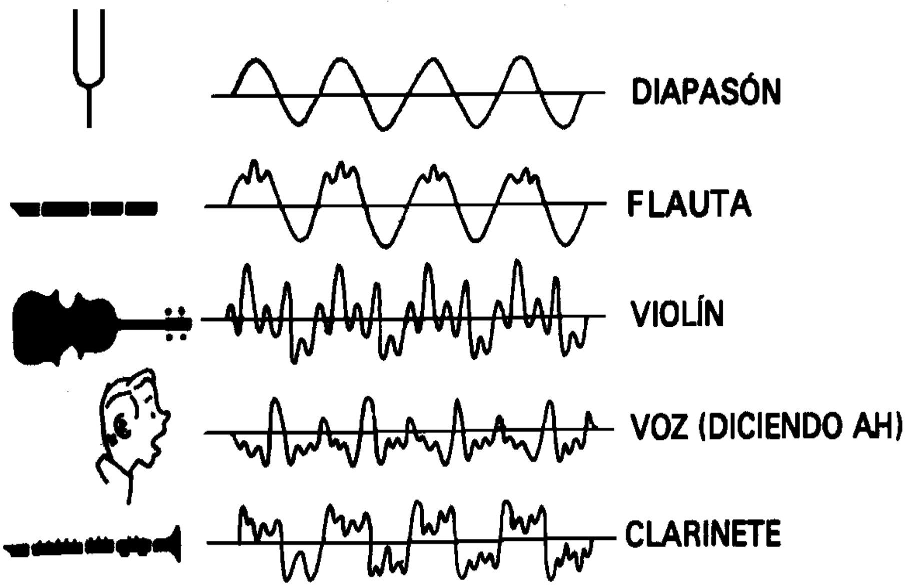

Fig. 8 Formas de las ondas correspondientes a distintos instrumentos

Cuando una cuerda tensada se distorsiona de manera tal que la forma de la distorsión corresponde a cualquiera de sus armónicos, después de soltarse vibra a la frecuencia de ese armónico. Pero, si la cuerda se golpea o pulsa de modo tal que su forma distorsionada no sea igual a un solo armónico, la vibración resultante incluirá frecuencias de diversos armónicos. La figura 9 muestra una cuerda tensada vibrando en su primer armónico o frecuencia fundamental y varios armónicos sucesivos. La ondulación más larga corresponde a la frecuencia fundamental de vibración y las ondulaciones más pequeñas al segundo armónico. En general, el movimiento o desplazamiento resultante puede describirse por medio de la superposición de las diversas funciones de onda armónicas, con diferentes frecuencias y amplitudes. Por consiguiente, el sonido que uno escucha corresponde a una onda compleja asociada a estos diversos modos de vibración.

En un instrumento de cuerda, la tensión de cada cuerda se ajusta para afinarla a una frecuencia determinada, la fundamental correspondiente a la nota de esa cuerda.

La frecuencia de cada cuerda se puede variar cambiando la tensión de la cuerda al hacer girar las clavijas en el clavijero del instrumento. Cuanto mayor es la tensión de la cuerda, mayores son sus frecuencias de vibración y más aguda será la nota emitida.