2.2 DETERMINANTES

INGENIERÍA Y LCC

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD
DE INGENIERÍA

IMPORTANTE

Esta presentación es una guía para la clase. No incluye desarrollo completo de los temas abordados.
De ninguna manera constituye el único material de estudio de la materia.

1. Definición de Determinante
   - Determinante de una matriz de orden 2
   - Determinante de una matriz de orden 3
   - Determinante de una matriz de orden n

2. Propiedades
   - Propiedades de los determinantes

3. Cálculo de la matriz inversa de A
   - Matriz cofactor
   - Propiedad de la inversa de una matriz

4. Interpretación geométrica de determinantes de orden 2 y 3

Determinante de una matriz de orden 2

Definición

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

una matriz de orden 2. Llamamos determinante de A y lo indicamos $\det(A)$ o $|A|$, al número:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Ejemplo

El determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ es

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - (-3) \cdot (-2) = -2$$

Determinante de una matriz de orden 3

Definición

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ una matriz de orden 3.

Se llama determinante de A al número:

$$\begin{aligned} |A| = & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} \\ & - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \end{aligned}$$

Se lo puede designar como

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Determinante de una matriz de orden 3

Ejemplo

Halle el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Menor complementario o menor

Definición

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden n. Se llama menor complementario del elemento a_{ij} (o menor de a_{ij}) y se anota M_{ij} al determinante de la submatriz de orden $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de A.

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$. Halle el menor complementario de a_{23} y del elemento a_{31}.

Cofactor

Definición

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $n \times n$. Se llama cofactor del elemento a_{ij} y se anota C_{ij} al número que se obtiene mediante la expresión

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$. Halle el cofactor del elemento a_{23} y del elemento a_{31}.

Nota: Observa que si la suma $i + j$ es PAR el menor complementario y el cofactor del elemento a_{ij} coinciden, en cambio si la suma $i + j$ es IMPAR el menor complementario y el cofactor del elemento a_{ij} son valores opuestos.

Cofactor

Ejemplo

Halle todos los menores y cofactores de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Determinante de una matriz de orden n

Definición

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden n, con $n \geq 2$. Se llama determinante de A, a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna de A por sus respectivos cofactores.

- Desarrollando por la fila i:

$$\det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} \cdot C_{i2} + a_{i3} \cdot C_{i3} + \cdots + a_{in} \cdot C_{in}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot C_{ik}$$

- Desarrollando por la columna j:

$$\det(A) = a_{1j} \cdot C_{1j} + a_{2j} \cdot C_{2j} + a_{3j} \cdot C_{3j} + \cdots + a_{nj} \cdot C_{nj}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot C_{kj}$$

Determinante de una matriz de orden 3

Ejemplo

1. Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Propiedades de los determinantes

Propiedad

1. *Si una matriz de orden n, tiene una línea (fila o columna) de ceros, su determinante es cero.*
2. *Si una matriz de orden n, tiene dos líneas (filas o columnas) iguales, su determinante es cero.*
3. *Si una matriz de orden n tiene dos líneas (filas o columnas) proporcionales, su determinante es cero.*

Ejemplo

Calcule los siguientes determinantes:

1. $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -7 \\ 13 & 0 & -4 & 5 \\ -6 & -3 & 0 & 21 \\ 0 & 8 & -2 & 6 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 7 & -3 & 7 \end{vmatrix}$

Propiedades de los determinantes

Propiedad

Sean A y B dos matrices de orden n.

4. *Si B es la matriz obtenida a partir de A permutando dos filas (dos columnas) de la misma, entonces*

$$\det(B) = -\det(A).$$

5. *Si B es la matriz que se obtiene multiplicando una fila (columna) de A por un escalar no nulo k, entonces*

$$\det(B) = k \cdot \det(A).$$

6. *Si B es la matriz que se obtiene de sumarle a una fila (columna) de la matriz A, un múltiplo no nulo de otra fila (columna) de A, entonces*

$$\det(B) = \det(A).$$

Propiedades de los determinantes

Propiedad

7. *Si* A *y* B *son matrices de orden* n, $\det(A\,B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

8. *Si* A *es una matriz de orden* n *y* k *es un escalar, entonces*

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A).$$

9. *Si* A *es una matriz de orden* n *entonces* $\det(A^T) = \det(A)$.

10. *Una matriz cuadrada* A *es inversible si y sólo si* $\det(A) \neq 0$.

11. *Si* A *es una matriz cuadrada inversible entonces*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Demostrar 10. ¿El recíproco de (11) es válido?

Propiedades de los determinantes

Propiedad

12. *Si A es matriz triangular, entonces*

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \ldots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

13. *Si A, B y C son matrices de orden n que sólo difieren en la r-ésima línea (fila o columna), siendo la r-ésima línea de C la suma de las r-ésimas líneas de A y B, entonces*

$$\det(C) = \det(A) + \det(B)$$

.

Matriz cofactor

Definición

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden n, Se llama matriz cofactor de A y se indica $\mathrm{Cof}(A)$ a la matriz que tiene por elementos los cofactores de los elementos de A.

$$\mathrm{Cof}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \dots & C_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & C_{ij} & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Halle la matriz cofactor de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Propiedades de la inversa de una matriz

Teorema

Si A es una matriz de orden n inversible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left[\mathrm{Cof}(A)\right]^T$$

Observación: La transpuesta de la matriz de cofactores recibe el nombre de **matriz adjunta** de A. Así, el torema anterior se enuncia como:

Si A es una matriz de orden n inversible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A)$$

Regla de Chio

Es un algoritmo que permite calcular determinantes de orden n reduciéndolo a otro de orden $n-1$.
El procedimiento puede reiterarse hasta lograr un determinante de orden 3 ó 2, para los cuales tenemos fórmulas más simples. Mediante la combinación de propiedades se debe lograr que todos los elementos de una fila o columna sean ceros, excepto uno de ellos, a ese elemento no nulo lo llamamos pivote. Luego se calcula el determinante por esa linea.

Ejemplo

Calcule el determinante de la siguiente matriz, usando la Regla de Chío

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Regla de Chio

Ejemplo

• Elegimos un elemento no nulo como **pivote**, en este caso $a_{33} = -2$.
• Luego dividimos la fila 3 por -2 para lograr que en la posición $a_{33} = 1$. Recordemos que al dividir una linea de un determinante por -2 el valor del determinante queda dividido por -2, para mantener la igualdad multiplicamos el nuevo determinante por -2.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2. \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

• Ahora, con operaciones elementales hacemos que la columna del elemento a_{33} se convierta en ceros a excepción del elemento a_{33}. Para ello a la fila 1 le restamos la fila 3 y a la fila 2 le restamos dos veces la fila 3. Estas operaciones no modifican el determinante.

Regla de Chio

Ejemplo

$$|A| = -2. \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

• Ahora, desarrollamos el determinante por la 3ra columna:

$$|A| = -2. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2.(-1)^{3+3}.M_{33} = -2. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

• Reiteramos el procedimiento. Tomamos como pivote $a_{12} = -1$ y dividimos la fila 1 por -1, para lograr que $a_{12} = 1$. Para mantener la igualdad multiplicamos el determinante por -1.

Regla de Chio

Ejemplo

$$|A| = -2. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2.(-1). \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

- Ahora, para conseguir que la columna del elemento a_{12} se anule, a la fila 3 le restamos 3 veces la fila 1.

$$|A| = 2. \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

- Calculamos ahora el determinante desarrollando por la columna 2:

$$|A| = 2\,(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = -2(3 \cdot 8 - 8 \cdot (-5)) = -2(24 + 40) = -128$$

Interpretación geométrica de determinantes de orden 2

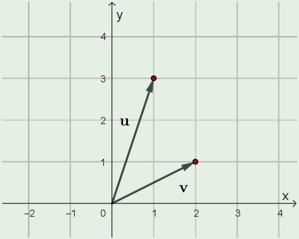
Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, cada una de sus filas puede verse como coordenadas de un punto en el plano xy; ese punto permite definir dos vectores con origen en $(0, 0)$:

$$\mathbf{u} = (a, b) \qquad \mathbf{v} = (c, d)$$

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, los puntos en el plano que pueden definirse con sus filas, permiten construir los vectores:

$$\mathbf{u} = (1, 3) \qquad \mathbf{v} = (2, 1)$$



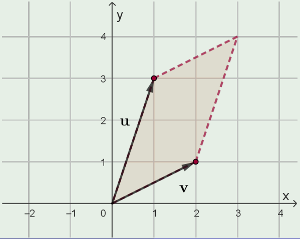
Interpretación geométrica de determinantes de orden 2

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, cada una de sus filas puede verse como coordenadas de un punto en el plano xy; ese punto permite definir dos vectores con origen en $(0,0)$: $\mathbf{u} = (a,b) \qquad \mathbf{v} = (c,d)$.
El valor absoluto del $\det(A)$, coincide con el área del paralelogramo que determinan los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, los puntos en el plano que pueden definirse con sus filas, permiten construir los vectores:

$$|\det(A)| = |1 \cdot 1 - 2 \cdot 3| = 5$$



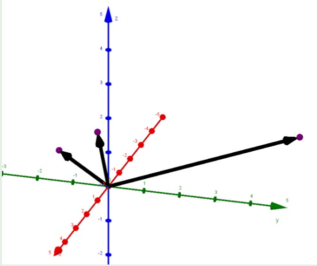
Interpretación geométrica de determinantes de orden 3

Si la matriz A es de orden 3, cada una de sus filas puede verse como coordenadas de un punto en el espacio xyz; ese punto permite definir tres vectores con origen en $(0,0,0)$: $\mathbf{u}$ $\mathbf{v}$ w.

Ejemplo

Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, los puntos en el plano que pueden definirse con sus filas, permiten construir los vectores:

$\mathbf{u}$ $\mathbf{v}$ $\mathbf{w}$



Interpretación geométrica de determinantes de orden 3

Si la matriz A es de orden 3, los tres vectores que pueden generarse con sus filas tienen asociado un paralelepípedo.
El valor absoluto del $\det(A)$, coincide con el volumen del paralelepípedo que determinan los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

Ejemplo

Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. A los vectores definidos con las filas de A se les puede asociar un paralelepípedo.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 22$$

$|\det(A)| = 22 \rightsquigarrow$ volumen del paralelepípedo