DETERMINANTE

El determinante de una matriz cuadrada, es un número que brinda interesante información sobre la matriz; por ejemplo muestra inmediatamente si la matriz es inversible (no singular). ***Si el determinante de una matriz es cero, la matriz no tiene inversa.***

Determinantes es un tema que se estudia en el nivel medio y en el ingreso a la Universidad en relación a la solución de sistemas de ecuaciones lineales cuadrados (la misma cantidad de ecuaciones que incógnitas) en 2 y 3 variables. Por ejemplo, un determinante de 2x2 o de orden n = 2 se resuelve de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - (-2).(-3) = -2$$

Y en general:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Donde $a_{11}; a_{12}; a_{21}\ y\ a_{22}$ son, por ahora, números reales, pero podrían ser también números complejos o funciones, como se verá en cálculo de una y varias variables. Es decir, el determinante de orden n = 2 o de segundo orden es un número que se obtiene multiplicando los elementos de la diagonal principal o, simplemente diagonal, menos el producto de los elementos de la "otra diagonal" o diagonal no principal o diagonal secundaria o contra diagonal.

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE ORDEN 2

Definición: Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ es una matriz de orden 2x2, su determinante que indicaremos Det(A) o $|A|$ será:

$$Det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

También se vio que el determinante de 3x3 o de orden n = 3 o de tercer orden, se calculaba mediante la llamada Regla de Sarrus, que es un procedimiento que consiste en agregar las dos primeras filas debajo de las tres dadas, caso 1, o, las dos primeras columnas a la derecha de las tres dadas, caso 2. Por ejemplo, para el caso 1, es:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} * = -1.(-2).5 + 3.(-1).0 + 4.2.1 - 4.(-2).0 - (-1).(-1).1 - 3.2.5 = -13$$

O bien en el caso 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} * = -1.(-2).5 + 2.1.4 + 0.3.(-1) - 4.(-2).0 - (-1).1.(-1) - 3.2.5 = -13$$

Aclaración en *: por abuso de notación se han colocado barras, pero NO ES UN DETERMINANTE porque no tiene la misma cantidad de filas que de columnas, sólo es una disposición práctica para el cálculo.

Notas

En ambos casos, se observan que hay productos diagonales, tres diagonales (de izquierda a derecha paralelas a la diagonal principal) de tres factores cada uno precedidos por el signo de adición "+" y tres (de derecha a izquierda, en el sentido de la contra diagonal) precedidos por el signo de sustracción "-". Los productos obtenidos en los dos casos, son iguales, salvo el orden (propiedad conmutativa de la multiplicación en el conjunto de los números reales, IR). Por esto, es indistinto usar la Regla de Sarrus por filas o por columnas.

Si cambia el orden de las filas que se agregan debajo de las tres dadas, o de las columnas a la derecha, varía el resultado del determinante y, es incorrecto. Se trata de una estructura donde el orden de filas o columnas, interesa; esto conduce a pensar en la estrecha relación de los determinantes con las matrices; más aún, la palabra matriz fue usada primero por James Joseph Sylvester (1814 - 1897) con el significado de "madre de los determinantes".

. La Regla de Sarrus sólo se aplica para calcular determinantes de orden $n = 3$.

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE ORDEN 3 - REGLA DE SARRUS

Definición: Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ es una matriz de orden 3x3, su determinante que indicaremos Det(A) o $|A|$ será:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Para definir el determinante de una matriz de orden n, debemos definir previamente menor complementario y cofactor.

Menor complementario o Menor

Definición *Sea A = (a_{ij}) una matriz de nxn.*
Se llama menor complementario del elemento a_{ij} de A o menor de a_{ij} y, se anota M_{ij}, al determinante de la submatriz de orden $(n-1)x(n-1)$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de A.

Por ejemplo:

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

llamamos menor o menor complementario del elemento a_{23}, M_{23} , al determinante de orden 2 que se obtiene al eliminar la fila 2 y la columna 3 de la matriz A.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ el menor correspondiente al elemento a_{23} será el determinante de la submatriz de orden 2 que se obtiene eliminando la fila 2 y la columna 3 de A.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 4 = -16$$

Una matriz A de orden n tiene n^2menores complementarios, uno por cada elemento de A.

Cofactor

Definición *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de nxn.*

Se llama cofactor del elementoa_{ij} de A y, se anota C_{ij}, al número que se obtiene mediante la expresión

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Ejemplo:

Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ el cofactor del elemento a_{23} será:

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 4 = -16$$

$$C_{23} = (-1)^5 . (-16)$$

$$C_{23} = 16$$

El cofactor del elemento a_{31} será:

$$C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31}$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-6) = 12$$

$$C_{31} = (-1)^4 . 12$$

$$C_{31} = 12$$

Observa que si la suma $i + j$ es PAR el menor complementario y el cofactor del elemento a_{ij} coinciden, en cambio si la suma $i + j$ es IMPAR el menor complementario y el cofactor del elemento a_{ij} son valores opuestos.

Ejemplo: Halle todos los menores y cofactores de $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Menores:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -3 \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

Cofactores:

$$C_{11} = -1 \qquad C_{12} = 5 \qquad C_{13} = 4$$

$$C_{21} = -2 \qquad C_{22} = -4 \qquad C_{23} = 8$$

$$C_{31} = 5 \qquad C_{32} = 3 \qquad C_{33} = -6$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE ORDEN nxn

Sea A una matriz cuadrada de orden $n \geq 2$. Se llama determinante de A, a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna de A por sus respectivos cofactores.

Desarrollando por la fila i

$$Det(A) = a_{i1}.C_{i1} + a_{i2}.C_{i2} + a_{i3}.C_{i3} + \cdots + a_{in}.C_{in}$$

$$Det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.C_{ik}$$

Desarrollando por la columna j

$$Det(A) = a_{1j}.C_{1j} + a_{2j}.C_{2j} + a_{3j}.C_{3j} + \cdots + a_{nj}.C_{nj}$$

$$Det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.C_{kj}$$

Halle el determinante de $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Para simplificar cálculos conviene elegir la fila o columna que más ceros tenga, en este caso, la columna 3. Desarrollamos entonces por la columna 3.

$$|A| = 3.C_{13} + 0.C_{23} + 0.C_{33} + 0.C_{43} = 3.C_{13}$$

Como los 3 últimos términos se anulan, solo debemos calcular el cofactor C_{13}

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

Aplicando Sarrus:

$$C_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 9 + 0 - 12 - 0 - (-12) = 13$$

De esta forma:

$$|A| = 3.C_{13} = 3.13 = 39$$

Propiedades de los determinantes

El fin de las propiedades de un objeto matemático, es poder realizar cálculos de manera sencilla (sin necesidad de aplicar siempre la definición). Las propiedades se demuestran utilizando las definiciones y luego, por ser verdaderas, se pueden utilizar siempre (para todos los casos). Enunciamos a continuación algunas propiedades.

1) Si una matriz de orden n, tiene una línea (fila o columna) de ceros, su determinante es cero.

2) Si una matriz de orden n, tiene dos filas o columnas iguales, su determinante es cero.

3) Si una matriz tiene dos líneas (filas o columnas) paralelas proporcionales, su determinante es cero.

4) $Si\ A\ de\ orden\ n\ es\ una\ matriz\ triangular, entonces\ |A| = a_{11}.a_{22}.a_{33}.a_{44}.\dots\ a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

Sean A y B dos matrices de orden n.

5) Si B es la matriz obtenida a partir de A permutando dos filas o dos columnas de la misma, entonces

$$Det(B) = -Det(A)$$

6) Si B es la matriz que se obtiene multiplicando una línea (fila o columna) de A por un escalar no nulo k, entonces

$$det(B) = k.det(A)$$

7) Si B es la matriz que se obtiene de sumarle a una fila (columna) de la matriz A, un múltiplo no nulo de otra fila (columna) de A, entonces

$$det(B) = det(A).$$

8) El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de sus determinantes.

9) Si A, B y C son matrices de *nxn* que sólo difieren en la *r*-ésima línea (fila o columna), siendo la *r*-ésima línea de C la suma de las *r*-ésimas líneas de A y B, entonces

det(C) = det(A) + det(B).

10) Si A es una matriz de orden n y k es un escalar, entonces $det(kA) = k^n\ det(A)$

11) Sea A una matriz de orden nxn. El determinante de la matriz A y de su transpuesta son iguales.

$$\det(A^T) = \det(A)$$

12) $Una\ matriz\ A\ de\ orden\ n\ es\ INVERSIBLE \Leftrightarrow \det(\mathrm{A}) \neq 0$

13) Si A es una matriz cuadrada inversible entonces el determinante de su inversa es igual al recíproco del determinante de A.

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

14) Sea A una matriz de orden nxn, Si sumamos los productos de los elementos de una fila (columna) de A por los cofactores de otra fila (columna) de A, esta suma dará cero.

Ejercicio: Demuestre la siguiente propiedad:

$$\boxed{\boldsymbol{Una\ matriz\ A\ de\ orden\ n\ es\ INVERSIBLE} \Leftrightarrow \mathbf{det(A)} \neq \mathbf{0}}$$

I) Demostración a derecha: *"Si A es inversible entonces su determinante es distinto de cero."*

Por definición, si A es una matriz inversible, $A\,A^{-1} = I \ y \ A^{-1}\,A = I$

Si dos matrices son iguales, sus determinantes también lo son:

$$det(A\,A^{-1}) = det(I)$$

Por propiedad 8: $det(A).det\ (A^{-1}) = det(I)$. Como $det(I) = 1$, se tiene que

$$det(A)\,.\,det\ (A^{-1}) = 1 \ \ (1)$$

y, por lo tanto, $det(A)$ y $det(A^{-1})$ son números distintos de cero (en este caso, recíprocos); en particular,

$$\boldsymbol{det(A) \neq 0.}\ \Delta$$

Más aún, de la expresión (1), despejando $det(A^{-1})$ se obtiene el determinante de la matriz inversa, que es

$$\boldsymbol{det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}.}$$

Es decir, el determinante de una matriz y el de su inversa son números recíprocos entre sí.

II) Demostración a izquierda: *"Si $det(A) \neq 0$ entonces A es una matriz inversible o no singular."*

Si la matriz A no está en forma escalonada reducida, existen matrices elementales (inversibles o no singulares) E_1, E_2, …, E_k que corresponden a las operaciones elementales de filas, tales que al premultiplicar a A, sucesivamente, dan la matriz R.

$$E_k\,(\ldots(E_2\,(E_1\,A))) = R \quad \mathbf{(2)}$$

donde R es una matriz escalonada reducida obtenida a partir de A por operaciones elementales sobre sus filas. Si despejamos la matriz A, premultiplicando en ambos miembros, sucesivamente, por las inversas de E_k, …, E_2 y E_1, se obtiene

$$A = E_1^{-1} . E_2^{-1} \dots E_k^{-1} . R$$

Como el determinante de matrices iguales, es el mismo,

$$\det(A) = \det(E_1^{-1} . E_2^{-1} \dots E_k^{-1} . R).$$

Siendo el determinante del producto de matrices igual al producto de los determinantes de dichas matrices, se tiene

$$\det(A) = \det(E_1^{-1}) . \det(E_2^{-1}) \dots \det(E_k^{-1}) . \det(R)$$

Por hipótesis, $\det(A) \neq 0$**,** entonces todos los determinantes del segundo miembro son números distintos de cero; en particular, $\det(R) \neq 0$. Entonces la matriz R no tiene filas de ceros y, en consecuencia, R es la matriz identidad, R = I. Luego, se observa en **(2)** que A es equivalente por filas a I y, por una propiedad anterior: **A es inversible**. Δ

Matriz Cofactor

Definición *Sea* $A = (a_{ij})$ *una matriz de orden n.*

Se llama matriz cofactor de A y, se anota, $Cof(A)$*, a la matriz de elemento genérico* C_{ij}*.*

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \dots & C_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Halle la matriz de los cofactores de $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$C_{11} = -1 \qquad C_{12} = 5 \qquad C_{13} = 4$$

$$C_{21} = -2 \qquad C_{22} = -4 \qquad C_{23} = 8$$

$$C_{31} = 5 \qquad C_{32} = 3 \qquad C_{33} = -6$$

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & -4 & 8 \\ 5 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Matriz Adjunta

Definición *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden n.*
Se llama matriz adjunta de A y, se anota, $Adj(A)$, a la matriz transpuesta de la matriz cofactor de A.
En símbolos: $Adj(A) = (Cof(A))^T$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & \dots & C_{n2} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & \dots & C_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & C_{3n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Halle la matriz adjunta de $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 5 & -4 & 3 \\ 4 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

Observa que:

$$Adj(A) = [Cof(A)]^T = Cof(A^T)$$

Calcular el determinante de $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ utilizando propiedades

Solución

El objetivo es aplicar propiedades para llevar la matriz a ser triangular superior y en consecuencia, calcular el determinante como el producto de los elementos de la diagonal. Se comienza con la permutación entre la fila 1 y 3 para tener un pivote en la posición "1,1", lo que implica el cambio de signo del determinante. Luego se remplaza la fila 2 por ella más -2 veces la fila 1 ($F_2' = F_2 + (-2)\, F_1$). Después se reemplaza la fila 3 por ella más -3 veces la fila 1 ($F_3' = F_3 + (-3)\, F_1$). Observar las siguientes propiedades aplicadas prestando atención a los cambios de signo del determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -27 \\ 0 & 0 & -19 \end{vmatrix} = 19$$

$F_1 \leftrightarrow F_3$ $\quad$ $F_2 \leftarrow F_2 - 2\, F_1$ $\quad$ $F_2 \leftarrow F_2 - 4\, F_3$ $\quad$ $F_3 \leftarrow F_3 + F_2$

$F_3 \leftarrow F_3 - 3\, F_1$

Inversa de una matriz

Si A es una matriz de orden nxn inversible, entonces $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$.

H) A es una matriz de orden nxn , inversible

T) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$.

D)
Partiremos del producto de la matriz A por su adjunta.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & \dots & C_{n2} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & \dots & C_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & C_{3n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A.Adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & \dots & C_{n2} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & \dots & C_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & C_{3n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A.Adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11}.C_{11} + a_{12}.C_{12} + \dots + a_{1n}.C_{1n} & a_{11}.C_{21} + a_{12}.C_{22} + \dots + a_{1n}.C_{2n} & \dots & a_{11}.C_{n1} + a_{12}.C_{n2} + \dots + a_{1n}.C_{nn} \\ a_{21}.C_{11} + a_{22}.C_{12} + \dots + a_{2n}.C_{1n} & a_{21}.C_{21} + a_{22}.C_{22} + \dots + a_{2n}.C_{2n} & \dots & a_{21}.C_{21} + a_{22}.C_{22} + \dots + a_{2n}.C_{2n} \\ a_{31}.C_{11} + a_{32}.C_{12} + \dots + a_{3n}.C_{1n} & a_{31}.C_{21} + a_{32}.C_{22} + \dots + a_{3n}.C_{2n} & \dots & a_{31}.C_{21} + a_{32}.C_{22} + \dots + a_{3n}.C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}.C_{11} + a_{n2}.C_{12} + \dots + a_{nn}.C_{1n} & a_{n1}.C_{21} + a_{n2}.C_{22} + \dots + a_{nn}.C_{2n} & \dots & a_{n1}.C_{21} + a_{n2}.C_{22} + \dots + a_{nn}.C_{2n} \end{bmatrix}$$

$$A.Adj(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{bmatrix}$$

$$A.Adj(A) = \det(A) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$A.Adj(A) = \det(A)\,.I$$

Por ser det(A) ≠0

$$A.\frac{1}{\det(A)} Adj(A) = I$$

$$A.\left(\frac{1}{\det(A)} Adj(A)\right) = I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

Ejemplo: Halle la inversa de $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sabemos que

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 5 & -4 & 3 \\ 4 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 14$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A) = \frac{1}{14}.\begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 5 & -4 & 3 \\ 4 & 8 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{14} & -\frac{2}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{5}{14} & -\frac{4}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{4}{14} & \frac{8}{14} & -\frac{6}{14} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} \\ \frac{5}{14} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Verificamos:

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -\frac{1}{14} & -\frac{2}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{5}{14} & -\frac{4}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{4}{14} & \frac{8}{14} & -\frac{6}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Regla de Chio

Es un algoritmo que permite calcular determinantes de orden *n* reduciéndolo a otro de orden *n-1*. El procedimiento puede reiterarse hasta lograr un determinante de orden 3, 2 o 1, mediante la combinación de propiedades que hacen ceros todos los elementos de una columna, excepto uno de ellos, el pivote y luego se hace el desarrollo por cofactores o Regla de Laplace en dicha columna. Es similar al mecanismo del método de Gauss – Jordan para la determinación del rango o la inversa de una matriz. (Rojo, 1985)

Ejemplo Calcule el siguiente determinante, usando la Regla de Chío.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Solución

Elegimos como pivote un elemento no nulo, por ejemplo el a_{33} = -2 (conviene elegir el 1 si fuese posible) y dividimos la tercera fila por -2, por lo que el determinante queda multiplicado por dicho valor (propiedad 6 de determinante). Los restantes elementos de la columna del pivote se anulan, y los elementos del determinante que no figuran ni en la fila ni en la columna del pivote se los transforma de acuerdo a la regla del “rectángulo”.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2.\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2.\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$F_3 \leftarrow -\frac{1}{2} F_3$ $\qquad$ $F_1 \leftarrow F_1 + F_3$

$F_2 \leftarrow F_2 - 2F_3$

Desarrollando por los elementos de la tercera columna, se tiene

$$|A| = -2.\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2.(-1)^{3+3}M_{33=} - 2.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Reiterando el procedimiento, si se toma como pivote a_{12} = -1 y dividiendo la fila 1 por -1,

$$|A| = -2.(-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{1+2}.M_{12}$$

$F_3 \leftarrow F_3 - 3F_1$

$$|A| = 2(-1).\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = -2.[3.8 - 8.(-5)] = -2.(24 + 40) = -2.(64) = -128$$

Interpretación geométrica de determinantes de 2x2 y de 3x3

Si se grafican en el plano *xy* los vectores no nulos y no paralelos $\boldsymbol{u} = (a, b)$ y $\boldsymbol{v} = (c, d)$ (con origen en (0, 0)), se observa geométrica y analíticamente que el área del paralelogramo de lados vectoriales ***u*** y ***v*** es igual al valor absoluto del determinante.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Si se grafican en el espacio real tridimensional los vectores no nulos y no paralelos mutuamente, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ (con origen en $(0, 0, 0)$), se observa geométrica y analíticamente que el volumen del paralelepído (caja) de lados vectoriales ***u*, *v*** y ***w*** es igual al valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Actividad Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos (1, 2), (2, -2) y (- 4, -3) usando determinantes. (Ayuda: una alternativa es sumar las áreas de tres triángulos cuyos lados son los vectores posición de los puntos dados). *Respuesta: 12,5 unidades de área.*

Teorema

Si A es una matriz de orden nxn entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- *A es invertible*
- *A es equivalente por filas a Inxn*
- *A puede expresarse como el producto de dos matrices elementales*
- *Det(A)*$\neq$ 0