Trabajo Práctico 2.2: DETERMINANTES

PARTE A

1. Dadas las siguientes matrices, calcule su determinante según se indique:

   a) $\begin{vmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -3 \end{vmatrix} =$

   b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ Calcule determinante por Sarrus.

   c) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

      c.1) Encuentre el menor complementario y cofactor correspondiente al elemento 4 y al elemento a_{21}.

      c.2) Evalúe el determinante de la matriz A mediante cofactores.

      c.3) Indique si la matriz A es o no invertible. En caso afirmativo, halle la inversa de A.

2. Determine el valor de los siguientes determinantes aplicando propiedades. Justifique indicando el nombre de la propiedad aplicada.

   a) $\begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 8 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

   b) $\begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 3 & -1 & 15 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

   c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$

   d) $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 8 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \\ -9 & -3 & 0 & -9 \end{vmatrix} =$

   e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$

3. Sea $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}$ y $\det(A) = -3$. Calcule el valor de los determinantes de las siguientes matrices:

   a) $\begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \\ 2d_1 & 2d_2 & 2d_3 \end{vmatrix} =$

b) $\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} =$

c) $\begin{vmatrix} 3d_1 & 3d_2 & 3d_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \\ 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 \end{vmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} 2a_1 & 3b_2 & 2c_3 \\ 2a_1 & 3b_2 & 2c_3 \\ 2a_1 & 3b_2 & 2c_3 \\ 2a_1 & 3d_2 & 2c_3 \end{vmatrix} =$

e) $\begin{vmatrix} -d_1 & -d_2 & -d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} =$

f) $\begin{vmatrix} a_1 + 3d_1 & a_2 + 3d_2 & a_3 + 3d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} =$

4. Sabiendo que A y B son matrices de orden n, inversibles, desarrolle aplicando propiedades:

   - $\det(-2 \cdot A \cdot B^2) =$
   - $\det\left[(-1 \cdot A^2 \cdot 3B)^T\right] =$
   - $\det\left[A^{-1} \cdot (-B) \cdot B^T\right] =$
   - $\det[A + 3B] =$
   - $\det\left[\left(\frac{1}{2}A^T \cdot B^{-1}\right)^{-1}\right] =$
   - $\det\left[\left(A \cdot (2A^{-1}) + I\right)^T\right] =$

5. Halle, de ser posible, los valores de k para los cuales las matrices admiten inversa.

   - $A = \begin{bmatrix} k-1 & 3 & -2 \\ 0 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$
   - $B = \begin{bmatrix} 2 & -k & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 12 \end{bmatrix}$
   - $C = \begin{bmatrix} -a & 0 & a \\ a & -a & a \\ a & -a & 2 \end{bmatrix}$

6. Calcule la inversa de la matriz A del ejercicio anterior por método de determinantes, para un valor de $k = -1$.

7. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones y justifique la respuesta usando determinantes:

   a) El determinante del producto de una matriz de 2×1 por una de 1×2 siempre es cero.
   b) La matriz adjunta de una matriz inversible es inversible.
   c) El determinante de una matriz antisimétrica de orden impar siempre es cero.

PARTE B

1. Calcule el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Escalone la matriz A y a partir de las propiedades de determinantes aplicadas a las operaciones elementales, calcule los determinantes de cada una de las matrices equivalentes encontradas durante el escalonamiento.

3. Sea A una matriz de orden 3, ortogonal con determinante negativo y sea B de orden 3 con $\det(B) = 4$. Calcule el valor de los siguientes determinantes:

   a) $\det(3.A.B^{-1})$
   b) $\det[(-B^T).(2A)^{-1}.A^T]$
   c) $\det[1/2.(A^{-1}.B^2).A^2]$
   d) $\det\,[(A)^2.(3B)^{-1}](A)^2$
   e) $\det\,[(A)^2.(3B)^{-1}]^2$
   f) $\det(-2B^2.(B^2)^{-1}.A^T) + detA^2$
   g) $\det(1/2AA^{-1} + 4I)^{-1} + det(4B^{-1})$

4. Demuestre:

   a) $\det(Adj(A)) = [detA]^{n-1}$, siendo A cuadrada e invertible.
   b) El determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.
   c) $\det(AB) = \det(BA)$.

5. Escriba tres proposiciones sobre determinantes que sean falsas y proponga un contraejemplo.

6. Encuentre la inversa de las siguientes matrices por el método de determinantes:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Sea $A = \begin{pmatrix} x+1 & x & x \\ x & x+1 & x \\ x & x & x+1 \end{pmatrix}$. Determine todos los valores de x para los cuales la matriz A es invertible.

8. Sea $B = \begin{pmatrix} 4-x & 2\sqrt{5} & 0 \\ 2\sqrt{5} & 4-x & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} & 4-x \end{pmatrix}$. Determine todos los valores de x para los cuales el rango de la matriz B es menor a 3.