Análisis Matemático I
Clase 7: derivadas y reglas de cálculo

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2024

Objetivo de la clase:
se espera que el estudiante comience a familiarizarse con el concepto de derivada de una función y con sus propiedades básicas.

Derivada de una función

Derivada de una función

La derivada de una función f en un punto $x = x_0$ se simboliza como $f'(x_0)$ y se obtiene como:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Así:

En resumen

[Derivada de f en x_0]= [Pendiente de la curva $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$]= [Pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$] = [Tasa de cambio instantánea de f en x_0]

Pendiente de una curva, ejemplo.

Ejemplo: Determine la pendiente de la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x = -1$. Además dé la ecuación de la recta tangente en el punto $(-1, f(-1))$

Pendiente de una curva, ejemplo.

Ejemplo: Determine la pendiente de la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x = -1$. Además dé la ecuación de la recta tangente en el punto $(-1, f(-1))$

Solución: observar que:

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\dfrac{1}{-1+h} - \dfrac{1}{-1}}{h} = \frac{\dfrac{-h}{(-1+h)(-1)}}{h} = \frac{-1}{(-1+h)(-1)}.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(-1+h)(-1)} = -1.$$

Luego, la pendiente de la curva en $x = -1$ es -1.

Pendiente de una curva, ejemplo.

Ejemplo: Determine la pendiente de la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x = -1$. Además dé la ecuación de la recta tangente en el punto $(-1, f(-1))$

Solución: observar que:

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\dfrac{1}{-1+h} - \dfrac{1}{-1}}{h} = \frac{\dfrac{-h}{(-1+h)(-1)}}{h} = \frac{-1}{(-1+h)(-1)}.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(-1+h)(-1)} = -1.$$

Luego, la pendiente de la curva en $x = -1$ es -1. También podemos decir que la derivada de f en $x = -1$ es

$$f'(-1) = -1.$$

Pendiente de una curva, ejemplo.

Ejemplo: Determine la pendiente de la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x = -1$. Además dé la ecuación de la recta tangente en el punto $(-1, f(-1))$
Solución: observar que:

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\frac{1}{-1+h} - \frac{1}{-1}}{h} = \frac{\frac{-h}{(-1+h)(-1)}}{h} = \frac{-1}{(-1+h)(-1)}.$$

Por lo tanto:

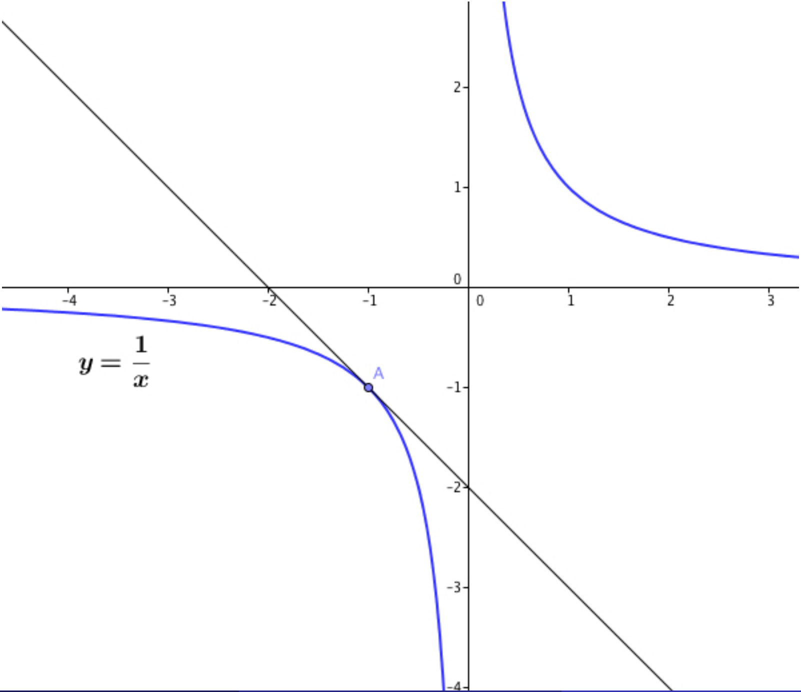
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(-1+h)(-1)} = -1.$$

Luego, la pendiente de la curva en $x = -1$ es -1. También podemos decir que la derivada de f en $x = -1$ es

$$f'(-1) = -1.$$

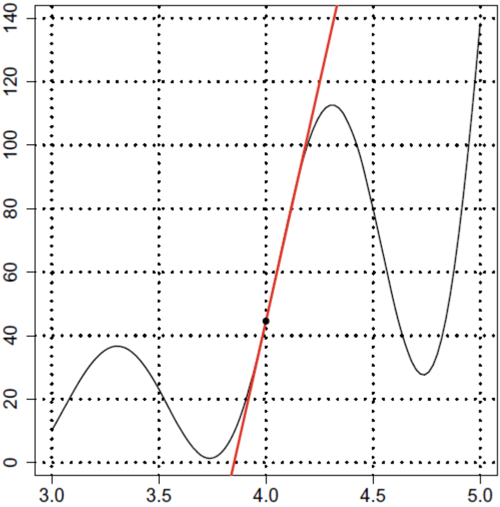
La ecuación de la recta tangente en el punto $(-1, f(-1))$ es:

$$y - (-1) = (-1)(x - (-1)) \Rightarrow y = -x - 2.$$



$y = \frac{1}{x}$
A
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3

Otro ejemplo: Estime $f'(4)$

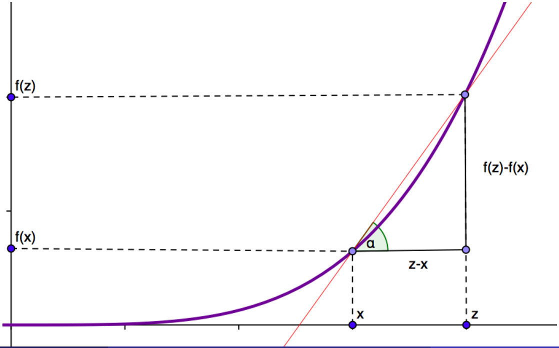


Derivada de una función

La derivada de una función f en un punto x se obtiene:

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

siempre que el límite exista.

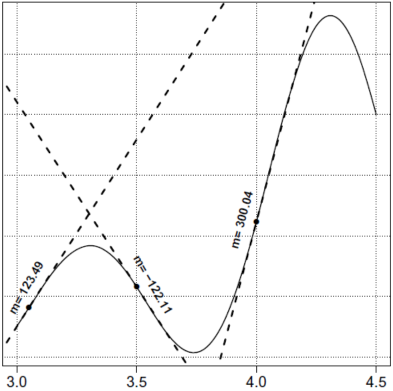


Notación para las derivadas

Si $y = f(x)$, entonces la derivada de f con respecto a x en un punto x_0 se puede simbolizar como:

- $f'(x_0)$
- $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ (notación de Leibniz)
- $y'(x_0)$

Dada una función f, se puede calcular la derivada en distintos valores de x:



De esta forma, se puede construir una nueva función f' tal que a cada x donde f sea derivable, le asigne $f'(x)$.

Función derivada: ejemplo

- Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces f es derivable en $(0, \infty)$ y su derivada en cualquier $x \in (0, \infty)$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad \text{(Luego analizaremos qué pasa en } x = 0\text{).}$$

Demostración. Sea $x > 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h} . \frac{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h.(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h.(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

La derivada como una función

La derivada como función

Sea f una función y sea $D(f')$ el conjunto de los x en el dominio de f donde f es derivable. Entonces, la nueva función:

$$f' : D(f') \to \mathbb{R}$$

que a cada $x \in D(f')$ le asigna $f'(x)$, se denomina función derivada.

La derivada como una función

La derivada como función

Sea f una función y sea $D(f')$ el conjunto de los x en el dominio de f donde f es derivable. Entonces, la nueva función:

$$f' : D(f') \to \mathbb{R}$$

que a cada $x \in D(f')$ le asigna $f'(x)$, se denomina función derivada.

En el ejemplo anterior, si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f' : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in (0, \infty).$$

Propiedades de la derivada

Teorema (algunas propiedades de la derivada)

1. Si f es derivable en $x = c$, entonces f es continua en c.
2. Si $f(x) = c$ para todo x, entonces $f'(x) = 0$ para todo x.
3. Si $n \in \mathbb{R}$ y $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$ para todo x donde x^n y x^{n-1} estén definidas.
4. Si f es derivable en c y si $k \in \mathbb{R}$, entonces $(kf)'(c) = kf'(c)$.
5. Si f y g son derivables en c, entonces $f + g$ y $f.g$ son derivables en c y además:
    - $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.
    - $(f.g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.
6. Si f y g son derivables en c y $g(c) \neq 0$, entonces f/g es derivable en c y además:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}.$$

Ejemplos: derivar $f(x) = 3x^4 - 2x + 1$ y $g(x) = (x^2 - 1)/(x + 3)$.

- Para derivar $f(x) = 3x^4 - 2x + 1$, utilizamos primero la regla 5 para derivar cada uno de los términos:
  - La derivada de $3x^4$ es $3.4.x^3$ por las reglas 3 y 4.
  - la derivada de $-2x$ es -2 por las reglas 3 y 4
  - la derivada de 1 es cero por la regla 2.

  Luego,
$$f'(x) = 12x^3 - 2.$$

- Para derivar $f(x) = 3x^4 - 2x + 1$, utilizamos primero la regla 5 para derivar cada uno de los términos:
    - La derivada de $3x^4$ es $3.4.x^3$ por las reglas 3 y 4.
    - la derivada de $-2x$ es -2 por las reglas 3 y 4
    - la derivada de 1 es cero por la regla 2.

  Luego,
$$f'(x) = 12x^3 - 2.$$

- Para derivar $g(x) = (x^2 - 1)/(x + 3)$, vamos a utilizar en primer lugar la regla 6 de la derivada de un cociente. La regla del cociente dice derive el numerador (obtenemos $2x$) multiplique por el denominador sin derivar, reste el numerador sin derivar multiplicado por la derivada del denominador (en este caso dicha derivada da 1), finalmente divida todo por el denominador al cuadrado. Así:
$$g'(x) = \frac{2x(x+3) - (x^2-1).1}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}.$$

Ejemplo a resolver en clases por los alumnos: derive
$y = (x - 3)/(x^3 + 2x - 2)$.

Reglas de derivación para composición de funciones

Teorema: regla de la cadena

Si g es derivable en c y f es derivable en $g(c)$, entonces $f \circ g$ es derivable en c y además:

$$(f \circ g)'(c) = f'(g(c)).g'(c).$$

Ejemplo: emplee la regla de la cadena para calcular la derivada de las funciones:

$$h(x) = (2x^2 + x - 10)^{10},$$

en cada x, y (para resolver por los alumnos en la sala)

$$g(x) = \left(\frac{x+5}{x-3}\right)^4, \quad x \neq 3.$$