Análisis Matemático I
Clase 8: Reglas de derivación. Derivadas laterales. Aplicaciones de la Derivada a Cinemática.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2025

Comentario sobre la regla de la cadena y 'derivación implícita'

Hasta ahora, hemos considerado funciones que se escriben en la forma:

$$\mathbf{y=f(x)}$$

donde aparece de forma explícita **y** en términos de **x**. En ocasiones, se desea obtener la derivada $\mathbf{y}'$ cuando hay una relación implícita entre las variables **x** y **y**. Por ejemplo,

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Si bien a veces es posible despejar **y** en términos de **x** y obtener $\mathbf{y}'$, puede que esto no sea posible o adecuado. En esos casos, se aplica el método de derivación implícita, que no es más que aplicar la regla de la cadena.

Derivación implícita

Problema: calcular $y'(x)$, sabiendo:

$$x^2 + y^2 = 4. \tag{1}$$

Solución: Derive con respecto a x ambos miembros de la ecuación:

- la derivada de x^2 es $2x$,
- teniendo en cuenta que y^2 es $[y(x)]^2$, se deriva aplicando la regla de la cadena y se obtiene $2.y(x)y'(x)$ o en forma resumida
$$2yy'.$$

Luego, al derivar ambos miembros de (1) da

$$2x + 2yy' = 0$$

y se despeja y':

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0.$$

Derivación implícita

Problema: calcular $y'(x)$, sabiendo:

$$x^2 + y^2 = 4. \tag{1}$$

Solución: Derive con respecto a x ambos miembros de la ecuación:

- la derivada de x^2 es $2x$,
- teniendo en cuenta que y^2 es $[y(x)]^2$, se deriva aplicando la regla de la cadena y se obtiene $2.y(x)y'(x)$ o en forma resumida

$$2yy'.$$

Luego, al derivar ambos miembros de (1) da

$$2x + 2yy' = 0$$

y se despeja y':

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0.$$

Si bien en Análisis Matemático I no trabajaremos con el método de derivación implícita, ya que es una mera aplicación de la regla de la cadena, en otras asignaturas, como Geometría Analítica, lo usará.

Demostración de Propiedad 1: si f es derivable en c, entonces es continua en c. Supongamos que f es derivable en $x = c$. Vamos a probar que:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Demostración de Propiedad 1: si f es derivable en c, entonces es continua en c. Supongamos que f es derivable en $x = c$. Vamos a probar que:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} f(x) &= \lim_{x \to c} (f(x) - f(c) + f(c)) \\
&= \lim_{x \to c} \left[(f(x) - f(c)) . \frac{(x - c)}{(x - c)} + f(c) \right] \\
&= \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} .(x - c) + f(c) \right] \\
&= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} . \lim_{x \to c} (x - c) + \lim_{x \to c} f(c) = f'(c).0 + f(c) = f(c)
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que f' existe en c y las propiedades del producto y suma de límites. Además, observe que se puede dividir por $x - c$ porque en el límite, x tiende a c.

Así, hemos llegado a que f es continua en $x = c$.

Derivadas de funciones trigonométricas

- Si $g(x) = sen(x)$, entonces g es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es:

$$g'(x) = cos(x), \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)cos(h) + cos(x)sen(h) - sen(x)}{h} \\
&= sen(x) \lim_{h\to 0} \frac{cos(h) - 1}{h} + cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{sen(h)}{h} \\
&= cos(x), \qquad \text{donde se usó que } \lim_{h\to 0} \frac{cos(h)-1}{h} = 0.
\end{aligned}$$

Derivadas de funciones trigonométricas

En forma similar al caso anterior, se puede probar que: si $h(x) = cos(x)$, entonces h es derivable en $\mathbb{R}$ y

$$h'(x) = -sen(x), \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Además, usando la regla del cociente para derivadas, se puede determinar que las funciones *tan*, *cotan*, *sec* y *csc* son derivables en todo su dominio. Por ejemplo (hacer uno):

$$\frac{d}{dx}(tan\, x) = sec^2(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(sec\, x) = sec(x).tan(x).$$

Derivadas laterales

Para estudiar la derivabilidad de funciones en puntos extremos del dominio o para comprobar si una función es derivable o no en un punto, se utilizan las derivadas laterales:

Derivadas laterales

Sea c un número real. La derivada por derecha de f en c se define como:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

siempre y cuando el límite exista. La derivada por izquierda de f en c se define como:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

siempre y cuando el límite exista.

Observación: f es derivable en c si y sólo si f es derivable por izquierda y por derecha en c y los límites coinciden.

Derivadas laterales

Ejemplo 1: sea $f(x) = |x|$. Entonces:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

y:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} == \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

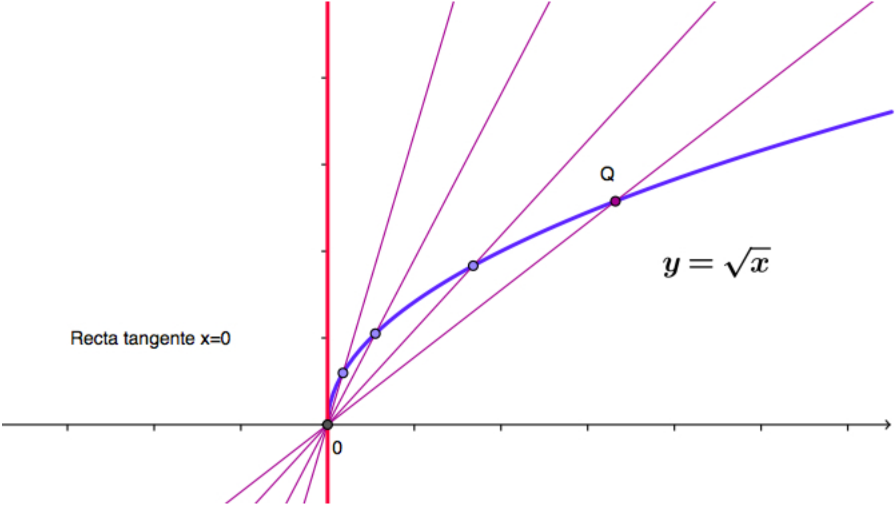
Así la función valor absoluto es derivable por izquierda y por derecha en $x = 0$, pero no es derivable en ese punto.
Ejemplo 2: sea $g(x) = \sqrt{x}$. Entonces:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

Luego, g no es derivable por derecha en $x = 0$. Sin embargo, se puede trazar una recta que puede considerarse como recta *tangente*.

Derivadas laterales

Se observa que a medida que Q tiende al origen, las rectas secantes tienden a la recta de ecuación $x = 0$:



Ejercicio : grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

y analice, usando derivadas laterales, si f es derivable en $x = 1$.

Recordar:

Definición de tasa instantánea de cambio

La tasa de cambio instantánea de una función f con respecto a x en x_0 se define por:

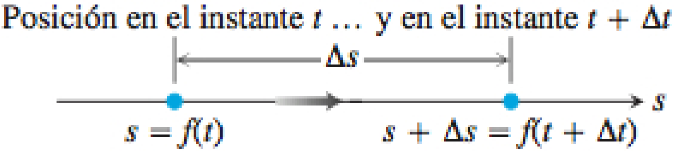
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

siempre que el límite exista.

Así, las tasas de cambio instantáneas son límites de tasas de cambio promedio.

Tasa de cambio instantánea: aplicaciones a cinemática

Supongamos que la función $s = f(t)$ describe la posición de un objeto en función del tiempo que se desplaza en línea recta:



Luego, el desplazamiento Δs del objeto en el intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$ es:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

Así, la velocidad promedio v_{prom} en dicho intervalo viene dada por:

$$v_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Para determinar la velocidad en el instante t, se debe calcular la velocidad promedio en el intervalo de t a $t + \Delta t$, y hacer tender Δt a cero. Así, la **velocidad instantánea** del objeto en el instante t es:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

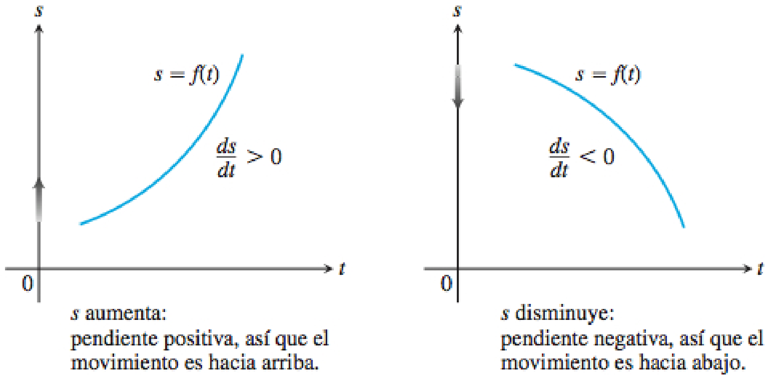
Es decir:

$$v(t) = s'(t).$$

IMPORTANTE: Si el objeto se desplaza hacia la derecha, entonces $s'(t) > 0$, Por otro lado, si se desplaza hacia la izquierda, entonces $s'(t) < 0$.

Tasa de cambio instantánea: aplicaciones a cinemática

En el plano espacio-tiempo:



Así, el signo de la derivada indica la dirección del movimiento

Tasa de cambio instantánea: aplicaciones a cinemática

La **rapidez** del movimiento se define como sigue:

$$\text{Rapidez en el instante } t = |v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}(t)\right|.$$

La tasa instantánea de cambio de la velocidad con respecto al tiempo se denomina **aceleración**. Así:

$$\text{aceleración en el instante } t = a(t) = \frac{dv}{dt}(t).$$

Ejemplo: suponga que la posición (en metros) de un objeto que se mueve en línea recta es

$$s(t) = t^2 - 3t + 2.$$

El tiempo se mide en segundos. Entonces la velocidad promedio en el intervalo $[1, 3]$ es

$$v_{prom} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = .$$

Ejemplo: suponga que la posición (en metros) de un objeto que se mueve en línea recta es

$$s(t) = t^2 - 3t + 2.$$

El tiempo se mide en segundos. Entonces la velocidad promedio en el intervalo $[1, 3]$ es

$$v_{prom} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = .$$

Ahora, la velocidad del objeto en el instante t es

$$v(t) = s'(t) = 2t - 3.$$

Entonces, si quisiéramos obtener la velocidad en $t = 1\,s$, calculamos

$$v(1) = s'(1) = -1\,m/s.$$

Mientras que la rapidez en ese instante es

$$|v(1)| = 1\,m/s.$$

Ejemplo: suponga que la posición (en metros) de un objeto que se mueve en línea recta es

$$s(t) = t^2 - 3t + 2.$$

El tiempo se mide en segundos. Entonces la velocidad promedio en el intervalo $[1, 3]$ es

$$v_{prom} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = .$$

Ahora, la velocidad del objeto en el instante t es

$$v(t) = s'(t) = 2t - 3.$$

Entonces, si quisiéramos obtener la velocidad en $t = 1\,s$, calculamos

$$v(1) = s'(1) = -1\,m/s.$$

Mientras que la rapidez en ese instante es

$$|v(1)| = 1\,m/s.$$

Finalmente, la aceleración del objeto es

$$a(t) = v'(t) = 2\,m/s^2.$$