



Materia: ESTABILIDAD 1

Resolución de Estructuras RETICULADAS



Método de los Nudos

Método de Ritter

Método Matricial

Profesores: Dra. Marta Amani
Ing. Miguel Valentini
Ing. Martín Sanchis



Dada la siguiente estructura Reticulada determinar:

- 1.- Reacciones de apoyos.
- 2.- Esfuerzos Internos en todas las barras del reticulado aplicando el método de los Nudos.

1ero. Verifico **Condición de Rigidez** del Reticulado:

$$b = 2*V - 3$$

En nuestro ejemplo: $V=6$ y $b=9$

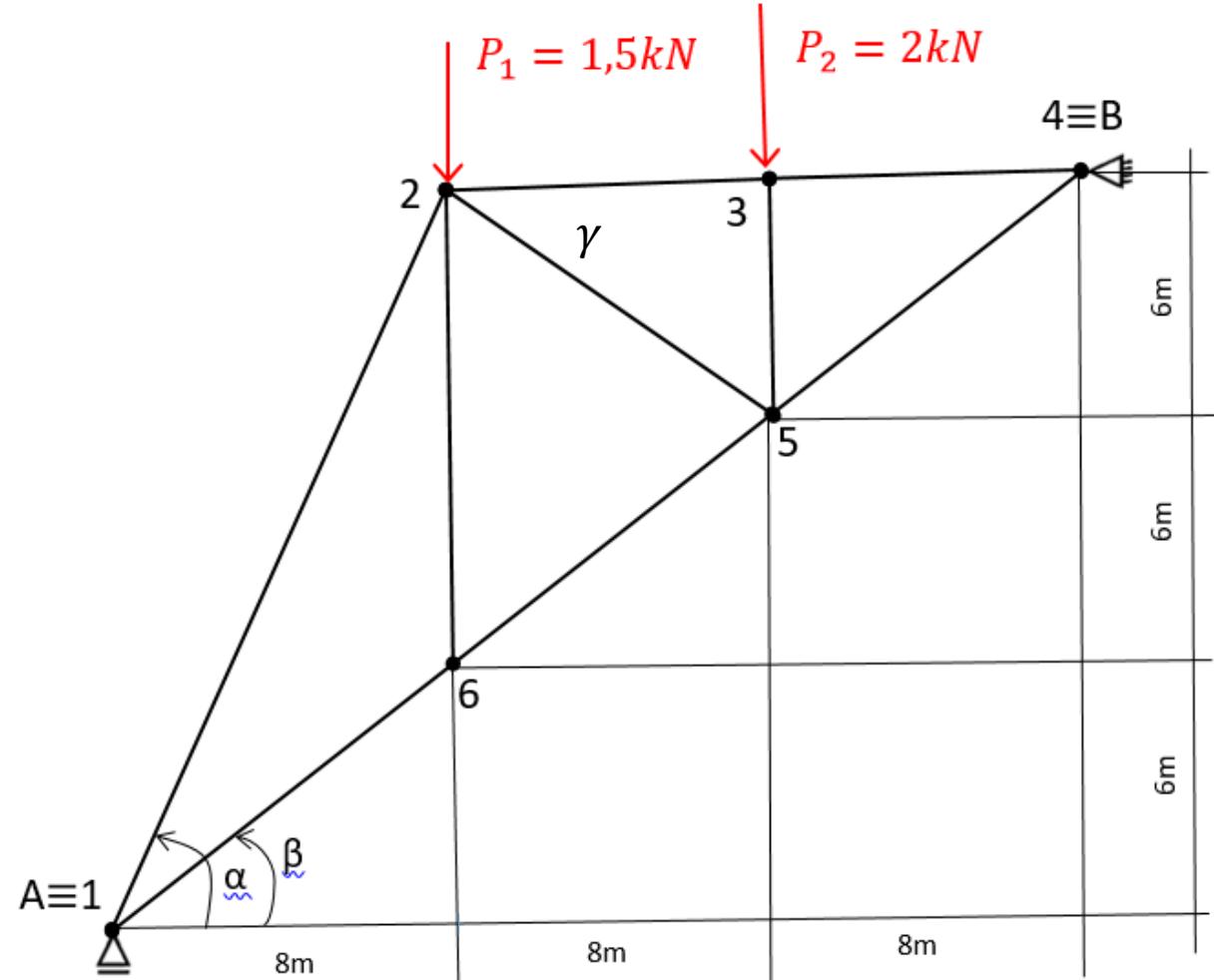
por lo cual se verifica que $9=2*6-3=9$

Además vemos que la ubicación de barras es efectiva porque me definen triangulaciones indeforables.

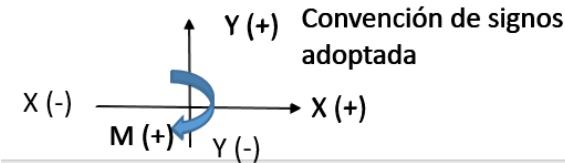
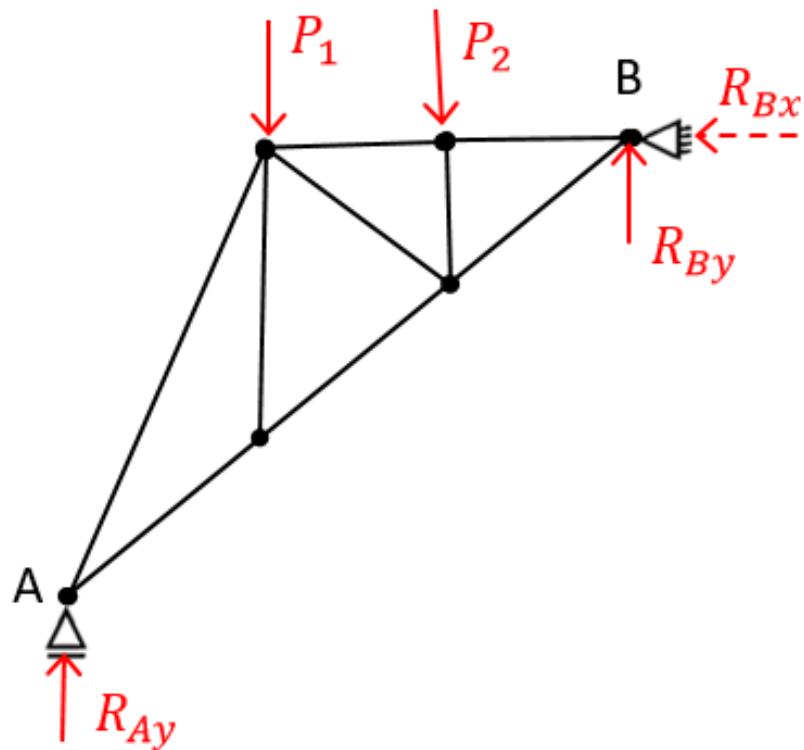
2do. Verifico **Condición de Isostaticidad**:

En el plano 3 grados libertad.

Quedan restringidos 2 por apoyo doble en A y 1 por apoyo simple en B



3ero. Determinación de Reacciones de Apoyos:



Convención de signos
adoptada

Determino reacc. de apoyo ($R_{A_y}, R_{B_y}, R_{B_x}$),
adopto \curvearrowright

$$\sum M_B = R_{A_y} \cdot 24 - P_1 \cdot 16 - P_2 \cdot 8 = 0$$

$$R_{A_y} = \frac{P_1 \cdot 16 + P_2 \cdot 8}{24} \quad R_{A_y} = 1,67 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 = R_{B_x} = 0 \quad R_{B_x} = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 = R_{A_y} - P_1 - P_2 + R_{B_y} = 0$$

$$R_{B_y} = P_1 + P_2 - R_{A_y} \quad R_{B_y} = 1,83 \text{ kN}$$

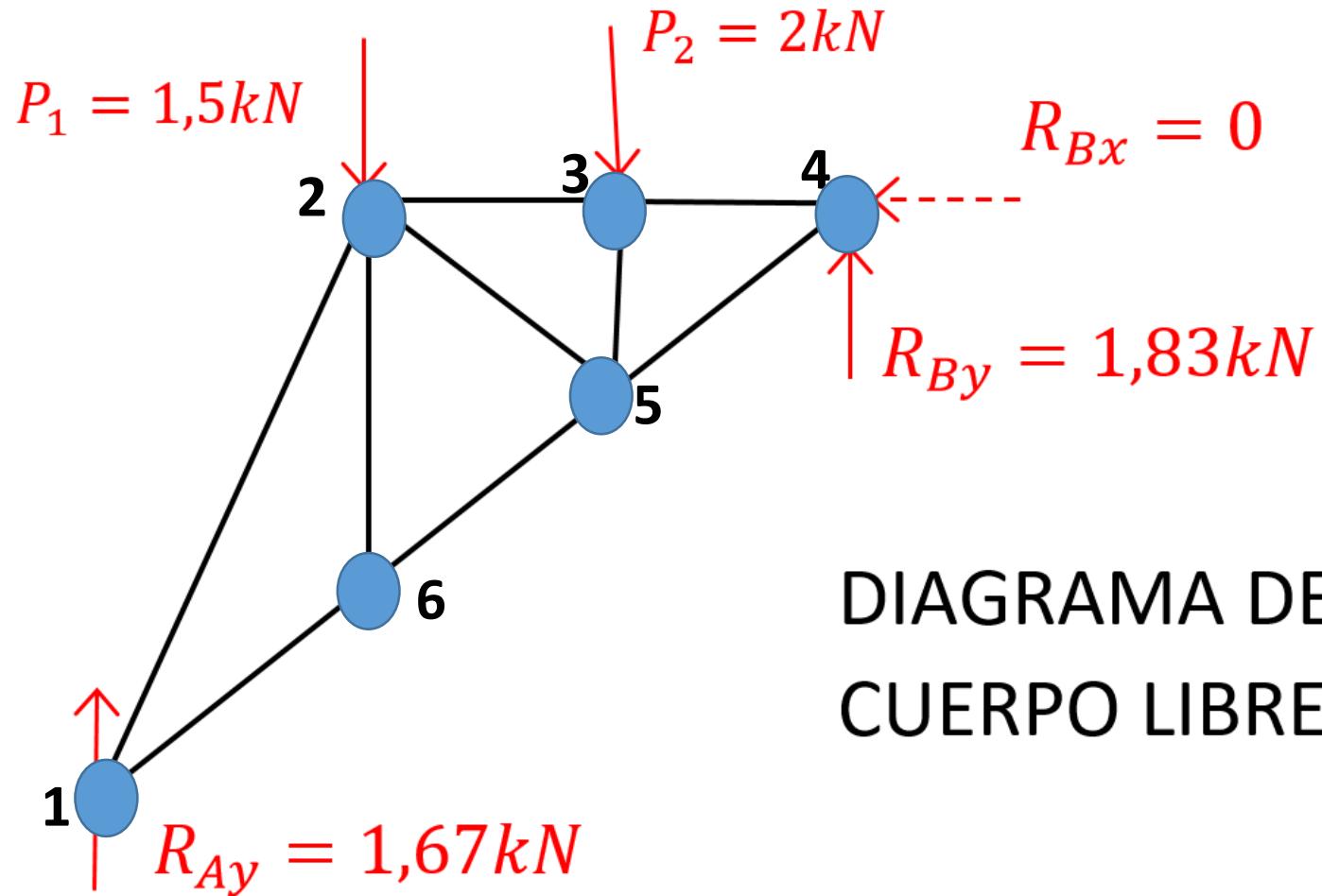


DIAGRAMA DE
CUERPO LIBRE

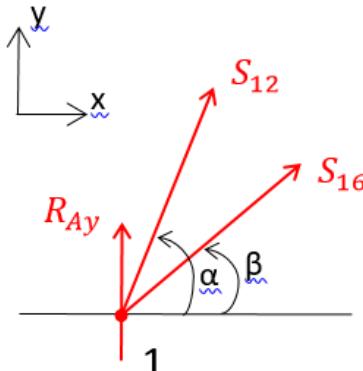


Consideraciones del Método de los NUDOS

- Al ser estructura isostática en equilibrio todos los puntos de la misma cumplen condiciones de equilibrio.
- En este método vamos aislando cada nudo . Y al hacerlo cortamos las barras que concurren a ese nudo y para mantener condición de equilibrio ponemos en evidencia los esfuerzos internos que actúan en la misma.
- También consideramos las cargas externas que actúan en cada uno de los nudos en estudio. Pudiendo ser estas las acciones que actúan sobre el reticulado y/o las provocadas por las reacciones de apoyo.
- Los esfuerzos internos actuantes en cada barra conocemos que son axiales por hipótesis estudiadas en Reticulados. Que tienen la misma dirección del eje longitudinal de la barra en estudio. Y además conocemos que dichos esfuerzos son constantes a lo largo de toda la longitud de cada una de las barras. Y que pueden ser de TRACCION (+) y/o de COMPRESION (-)
- Al iniciar el estudio de cada nudo asumimos un sentido supuesto. “Un sentido arbitrario”. Y luego al completar el cálculo si nos da resultado positivo significa que era acertado el sentido inicialmente supuesto y si nos diera negativo debemos invertir el sentido inicialmente supuesto. Yo les sugiero adoptar sentidos salientes del nudo que significan esfuerzos de tracción (+) ; de tal manera que si les da + el resultado confirman que es de Tracción y si les diera – significaría que el sentido era el opuesto. En tal caso ya les estaría indicando que en esa barra el esfuerzo es de Compresión.
- Se debe comenzar por cualquier nudo al que solo concurren 2 barras. Esto porque al plantear las ec. de equilibrio en el plano solo tenemos 2 ecuaciones que nos permitirán obtener los esfuerzos en esas dos barras incógnitas.
- Luego voy avanzando en nudos siguientes llevando como dato los esfuerzos en las barras que ya he ido calculando previamente. Cuidando en estos casos que al hacer estudio en nuevo nudo lleve el sentido correcto del esfuerzo.

1.- Método de los NUDOS

NUDO 1



$$\sum F_y = 0 = S_{12} \cdot \sin \alpha + S_{16} \cdot \sin \beta + R_{Ay}$$

$$\sum F_x = 0 = S_{12} \cdot \cos \alpha + S_{16} \cdot \cos \beta$$

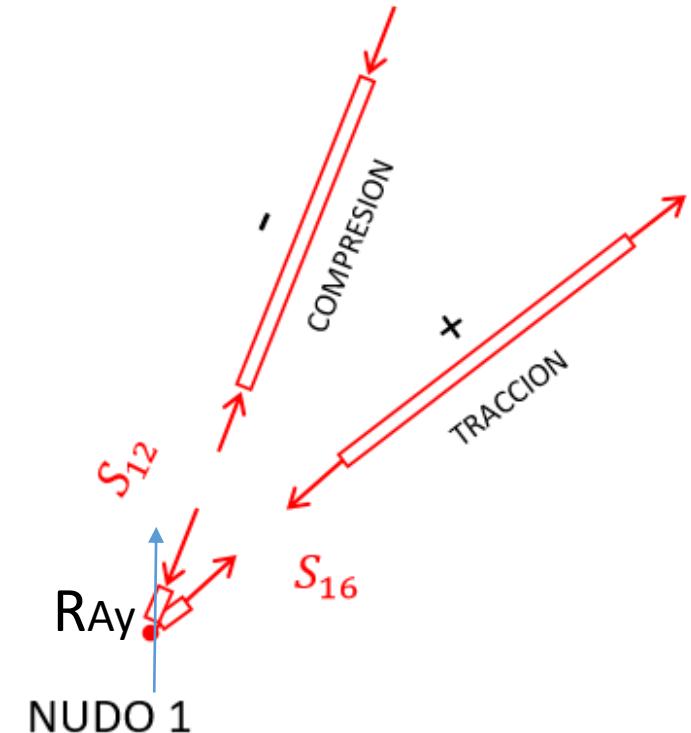
$$S_{12} = \frac{-S_{16} \cdot \cos \beta}{\cos \alpha}$$

Reemplazo $-S_{16} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha + S_{16} \cdot \sin \beta + R_{Ay} = 0$

$$S_{16} = \frac{-R_{Ay}}{\left(-\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha + \sin \beta \right)} = \boxed{+1,39kN = S_{16}}$$

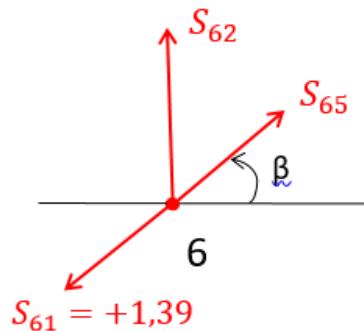
$$S_{12} = -S_{16} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \boxed{-2,74kN = S_{12}}$$

– significa sentido contrario al inicialmente supuesto



NUDO 6

Asumo sentidos
salientes
 \equiv Traccion
+



$$\sum F_x = 0 = -S_{61} \cdot \cos \beta + S_{65} \cdot \cos \beta$$

$$\sum F_y = 0 = -S_{61} \cdot \sin \beta + S_{62} + S_{65} \cdot \sin \beta$$

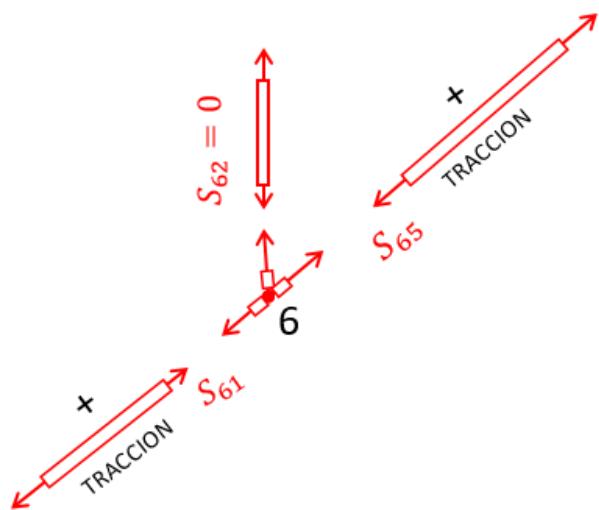
Dato obtenido en nudo

$$S_{16} = S_{61} = +1,39 \text{ kN}$$

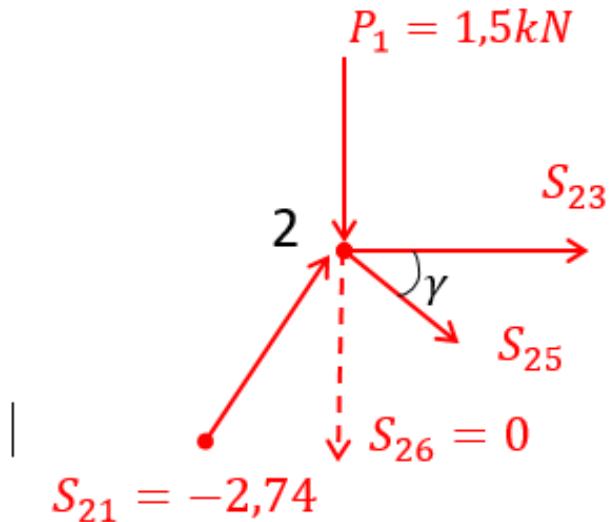
$$S_{65} = S_{61} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \beta} = +1,39 \text{ kN} = S_{65}$$

$$S_{62} = S_{61} \cdot \sin \beta - S_{65} \cdot \sin \beta = 0$$

$$S_{62} = 0$$



NUDO 2

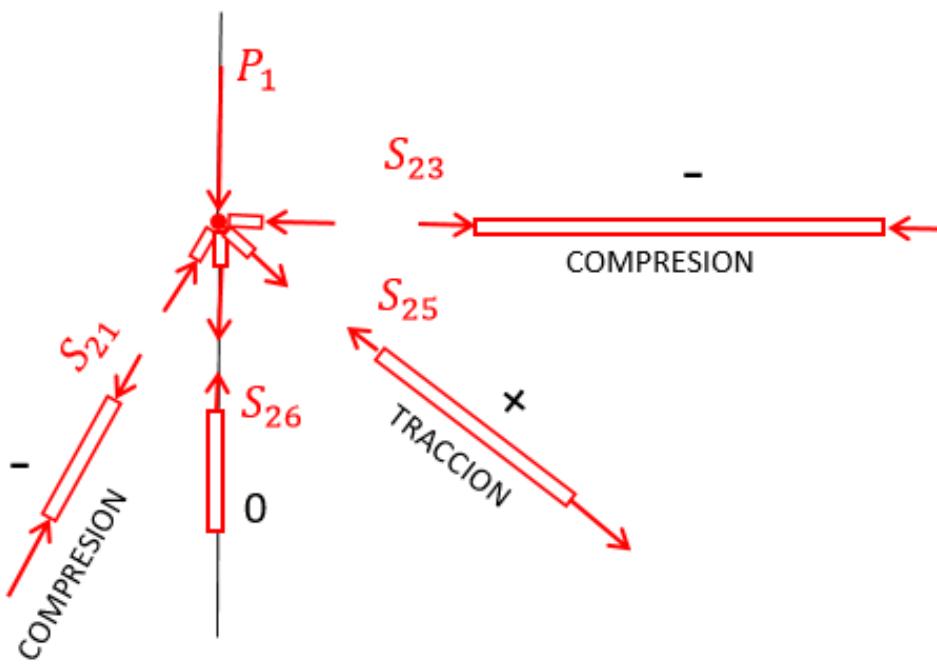


$$\sum F_x = 0 = S_{21} \cdot \cos \alpha + S_{23} + S_{25} \cdot \cos \gamma$$

$$\sum F_y = 0 = S_{21} \cdot \sin \alpha - P_1 - S_{25} \cdot \sin \gamma$$

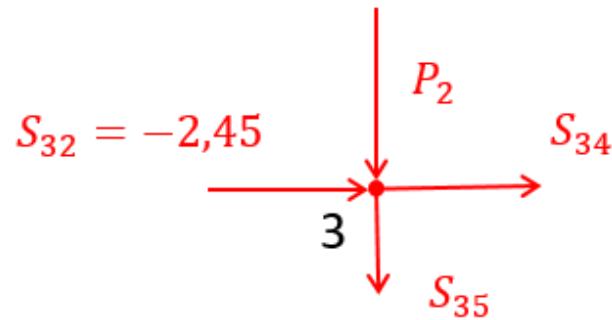
$$S_{25} = +1,65kN$$

$$S_{23} = -2,45kN$$





NUDO 3

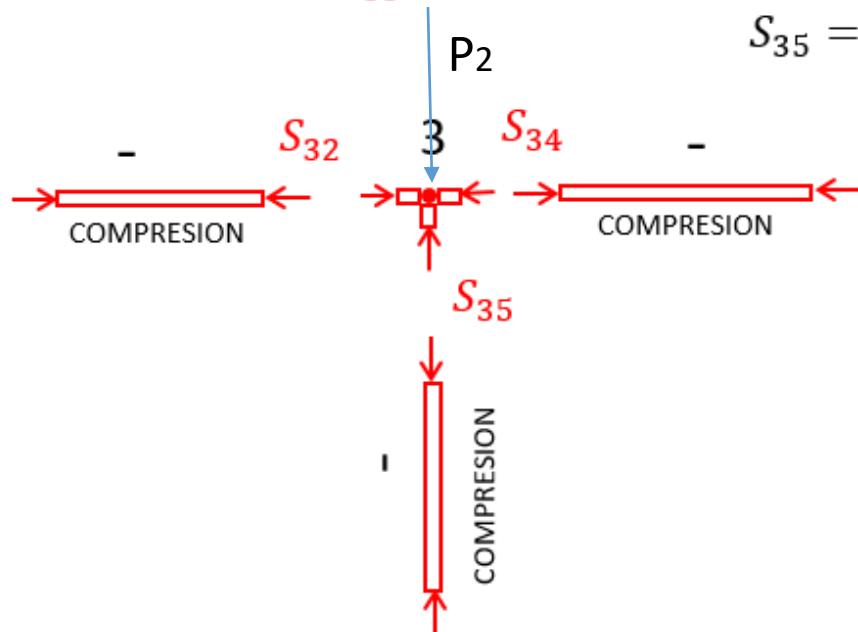


$$\sum F_x = 0 = S_{32} + S_{34} = 0$$

$$S_{34} = -S_{32} = \boxed{-2,45kN = S_{34}}$$

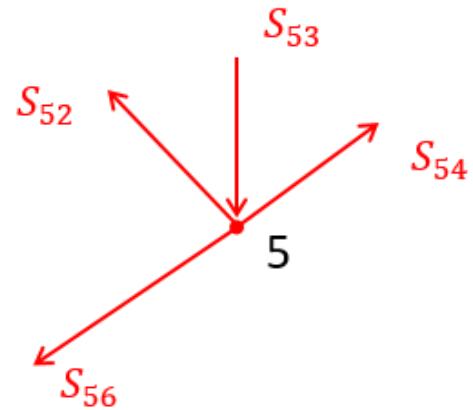
$$\sum F_y = 0 = -P_2 - S_{35}$$

$$S_{35} = -P_2 = \boxed{-2kN = S_{35}}$$





NUDO 5



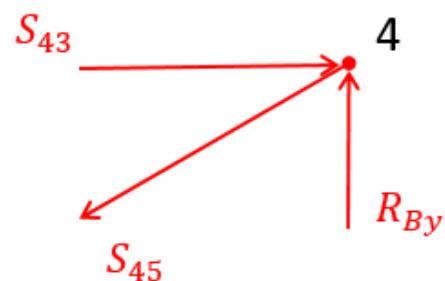
$$\sum F_x = 0 = -S_{56} \cdot \cos \beta - S_{52} \cdot \cos \gamma + S_{54} \cdot \cos \beta$$

$$\sum F_y = 0 = -S_{56} \cdot \sin \beta + S_{52} \cdot \sin \gamma - S_{53} + S_{54} \cdot \sin \beta$$

$$S_{54} = +3,06kN$$

NUDO 4

Como verificación

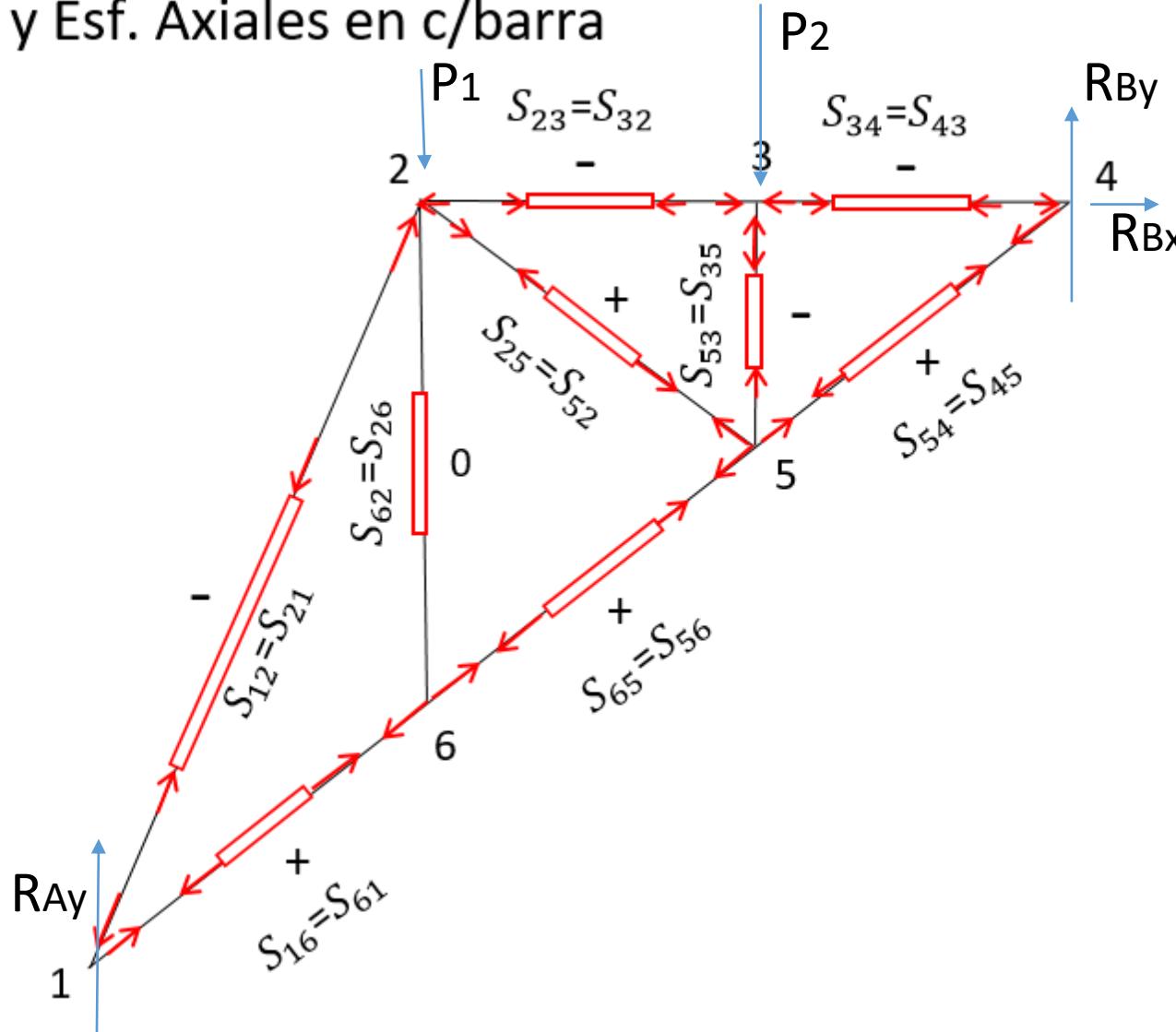


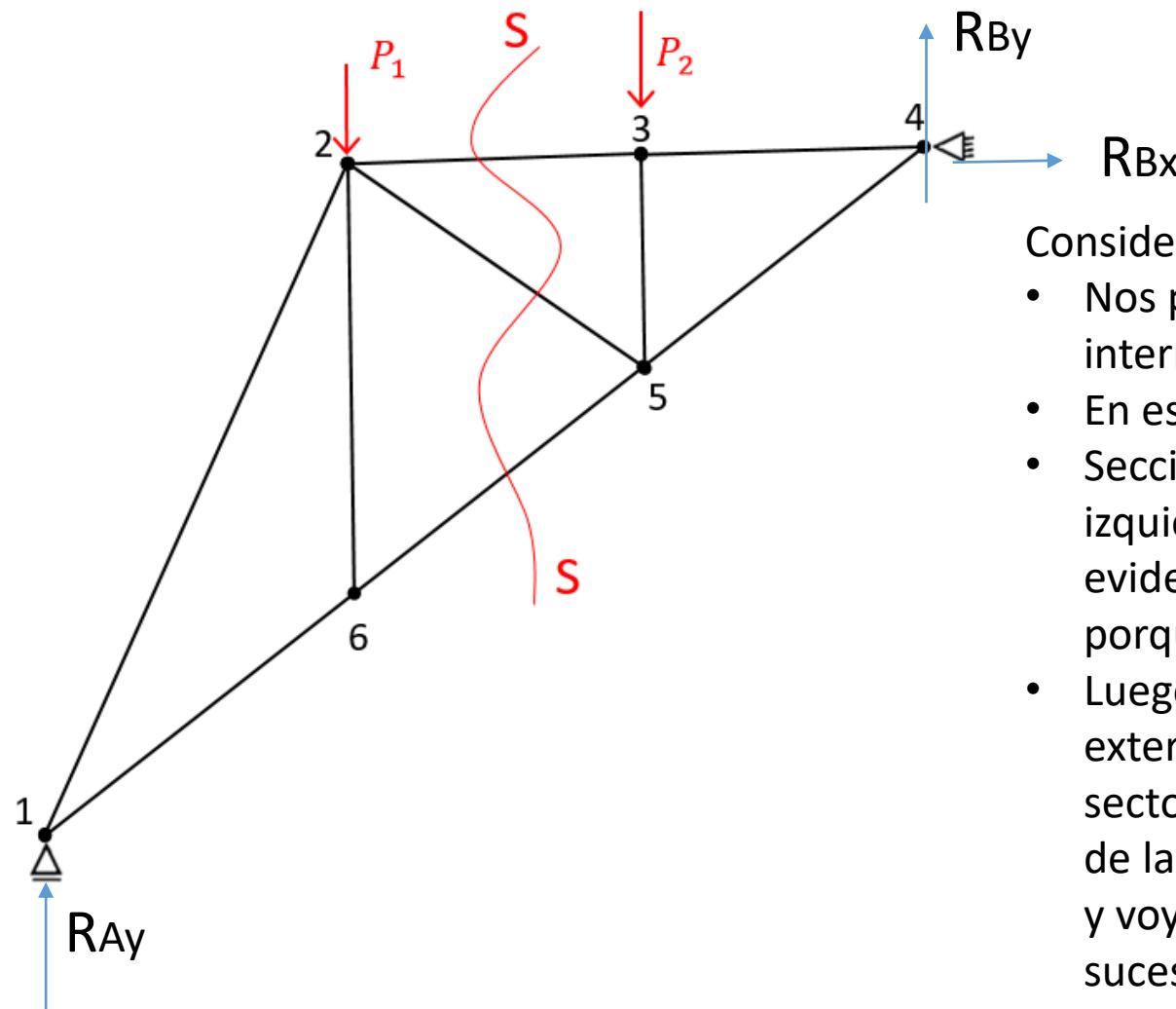
$$\sum F_x = 0 = S_{43} - S_{45} \cdot \cos \beta = 0$$

$$\sum F_y = 0 = R_{By} - S_{45} \cdot \sin \beta = 0$$



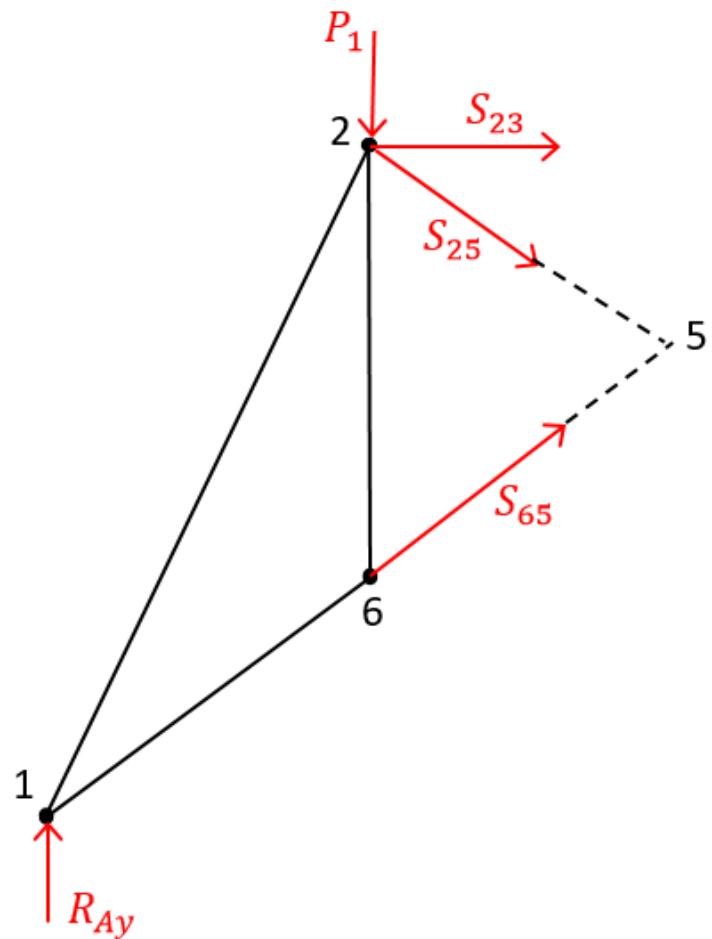
Signos y Esf. Axiales en c/barra



2.- METODO DE RITTER

Consideraciones Método Ritter:

- Nos permite determinar esfuerzos internos en 3 barras intermedias.
- En este ejemplo las barras cortadas por la sección S-S
- Seccionamos la estructura por S-S y tomamos el sector izquierdo o el derecho (es indistinto) y ponemos en evidencia los esfuerzos internos en las barras cortadas porque la acción de estos otorga el equilibrio.
- Luego vamos tomando momento de las fuerzas externas y de los esfuerzos internos actuantes en el sector elegido respecto a los puntos de concurrencia de las rectas de acción de 2 de los esfuerzos incógnitas y voy calculando el que me queda de incógnita sucesivamente



$$\sum M_2 = 0 = R_{Ay} \cdot 8m - S_{65} \cdot \cos \beta \cdot 16$$

$$S_{65} = \frac{R_{Ay} \cdot 8m}{\cos \beta \cdot 16} = \boxed{\begin{array}{l} \text{TRACCION} \\ +1,39 \text{ kN} \\ \hline S_{65} \end{array}}$$

$$\sum M_5 = 0 = R_{Ay} \cdot 16m - P_1 \cdot 8m + S_{23} \cdot 6m$$

$$\boxed{S_{23} = -2,45 \text{ kN}}$$

COMPRESION

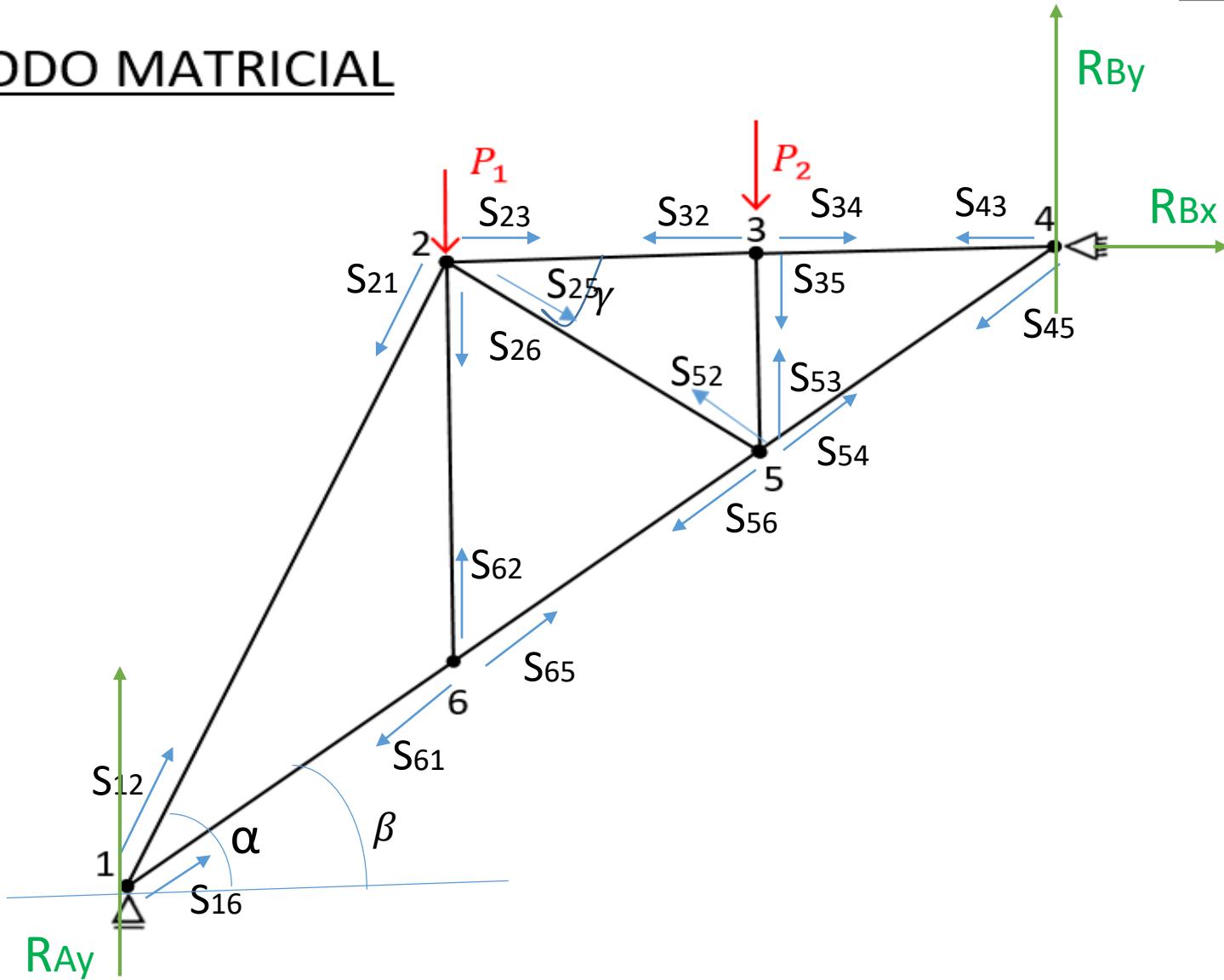
$$\sum M_4 = 0 = R_{Ay} \cdot 24m - P_1 \cdot 16m + S_{25} \cdot \sin \gamma \cdot 16$$

$$\boxed{S_{25} = 1,67 \text{ kN}}$$

TRACCION



3.- METODO MATRICIAL





3.- Consideraciones del Método Matricial

[Matriz de Coeficientes] X [Matriz de las Incógnitas] + [Matriz de las Fuerzas] = 0

[Matriz de las Incógnitas] = [Matriz de Coeficientes]⁻¹ X (- [Matriz de las Fuerzas])



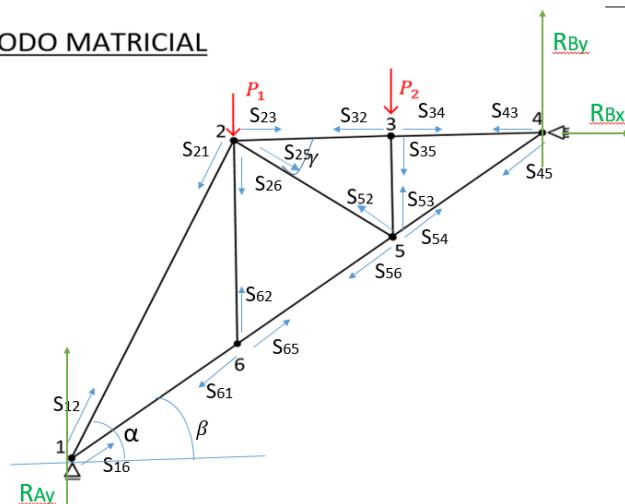
- **La Matriz de Coeficientes** es un dato de la geometría y la obtengo considerando las direcciones y sentido de los versores de los esfuerzos y de reacciones de apoyos que actúan en cada nudo. Es una Matriz cuadrada de dimensión igual a la cantidad de barras más la cantidad de reacciones de apoyo (3 en el plano).
- **La Matriz de las Fuerzas** (vectorial) también es un dato del ejercicio. Es una matriz de 1 columna y con tantas filas como barras más apoyos externos. Esta será un dato del ejercicio porque basta ubicar la fuerza actuante en correspondencia con el nudo en el que actúa.
- **La Matriz de las Incógnitas** (vectorial). Es una matriz de 1 columna que también tendrá tantas filas como barras más apoyos externos. En ella aparecerán las “incógnitas de nuestro ejercicio”; siendo estas las reacciones de apoyo y los esfuerzos en cada una de las barras del reticulado.



Consideraciones

- Idem al met. de los nudos asumo un sentido inicial supuesto para los esf. axiales actuantes en cada barra. Y al completar el cálculo se confirma si el sentido asumido era correcto si ese esfuerzo me da positivo (+); y/o será el contrario al inicialmente asumido si me da negativo (-).
- Idem al met. de los nudos sugiero asumir inicialmente todos esfuerzos + y luego al completar el cálculo si queda positivo (+) serán de tracción los esfuerzos en esas barras y si me dan negativo (-) corresponderá a que en esas barras tenemos esfuerzos de compresión.
- Este método me permite determinar también en mismo cálculo las Reacciones de Apoyo. Vale mismo criterio respecto al signo de las reacciones. Asumo un sentido y según el resultado se confirmará si fue el correcto si me diera +.
- Es de los métodos de mayor aplicación porque con el cálculo computacional se obtienen de inmediato todos los esfuerzos y reacciones actuantes.

3.-METODO MATRICIAL



3.- Método Matricial

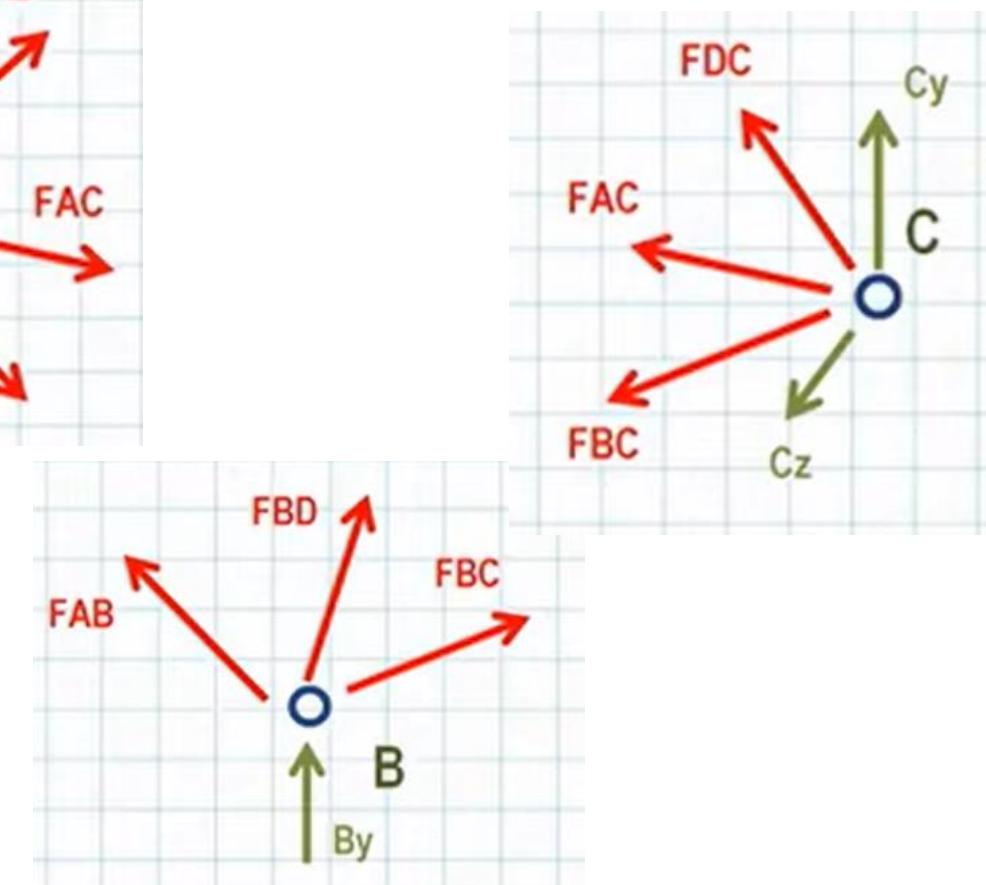
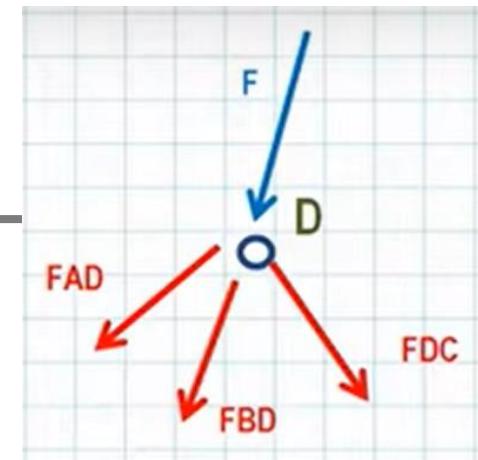
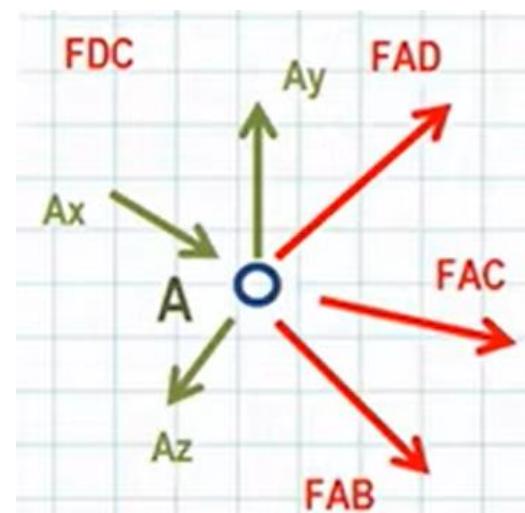
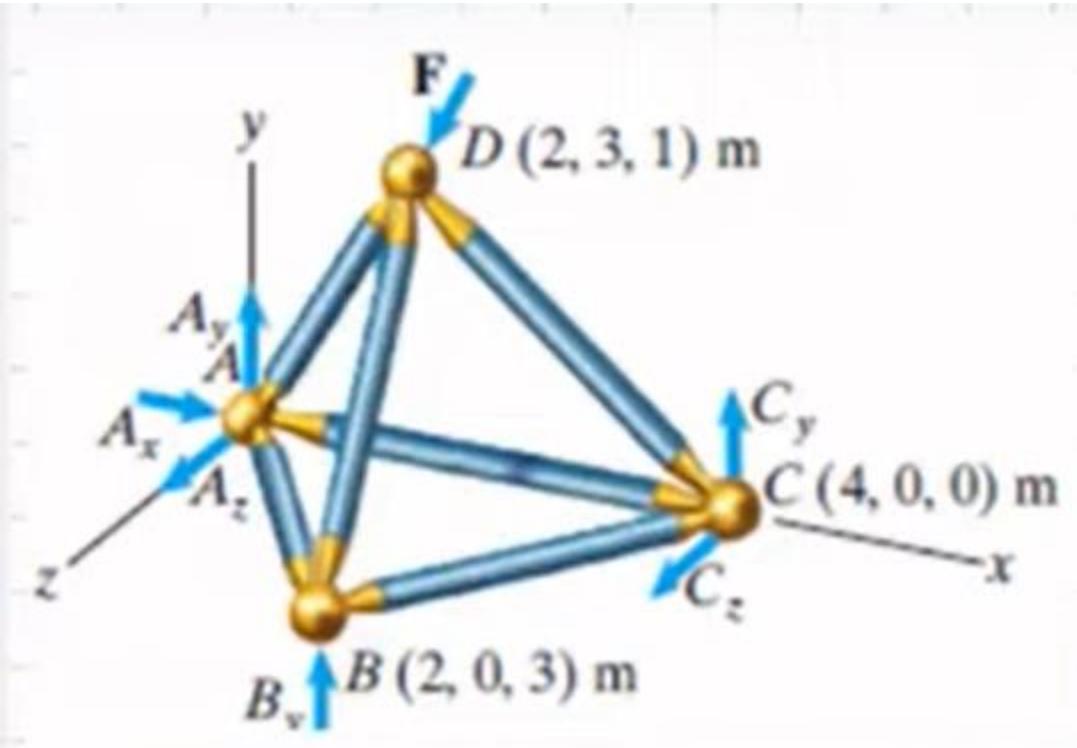
Matriz de los Coeficientes

Matriz de los Coeficientes

| | | RAy | RBy | RBx | S12=S21 | S16=S61 | S62=S26 | S65=S56 | S23=S32 | S25=S52 | S34=S43 | S35=S53 | S54=S45 | | |
|---------------|--------------|------------|------------|------------|------------------------------|-----------------------------|----------------|-----------------------------|----------------|------------------------------|----------------|----------------|-----------------------------|----------------|-----------|
| Nudo 1 | $\sum F_x=0$ | 0 | 0 | 0 | $\cos \alpha$ | $\cos \beta$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | RAy | 0 |
| | $\sum F_y=0$ | 1 | 0 | 0 | $\operatorname{sen} \alpha$ | $\operatorname{sen} \beta$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | RBy | 0 |
| Nudo 6 | $\sum F_x=0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\cos \beta$ | 0 | $\cos \beta$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | RBx | 0 |
| | $\sum F_y=0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\operatorname{sen} \beta$ | 1 | $\operatorname{sen} \beta$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | S12=S21 | 0 |
| Nudo 2 | $\sum F_x=0$ | 0 | 0 | 0 | $-\cos \alpha$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $\cos \gamma$ | 0 | 0 | 0 | S16=S61 | 0 |
| | $\sum F_y=0$ | 0 | 0 | 0 | $-\operatorname{sen} \alpha$ | 0 | -1 | 0 | 0 | $-\operatorname{sen} \gamma$ | 0 | 0 | 0 | S62=S26 | $= - P_1$ |
| Nudo 3 | $\sum F_x=0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | S65=S56 | 0 |
| | $\sum F_y=0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | S23=S32 | $- P_2$ |
| Nudo 4 | $\sum F_x=0$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | $-\cos \beta$ | S25=S52 | 0 |
| | $\sum F_y=0$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\operatorname{sen} \beta$ | S34=S43 | 0 |
| Nudo 5 | $\sum F_x=0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\cos \beta$ | 0 | $-\cos \gamma$ | 0 | 0 | $\cos \beta$ | S35=S53 | 0 |
| | $\sum F_y=0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\operatorname{sen} \beta$ | 0 | $\operatorname{sen} \gamma$ | 0 | 1 | $\operatorname{sen} \beta$ | S54=S45 | 0 |

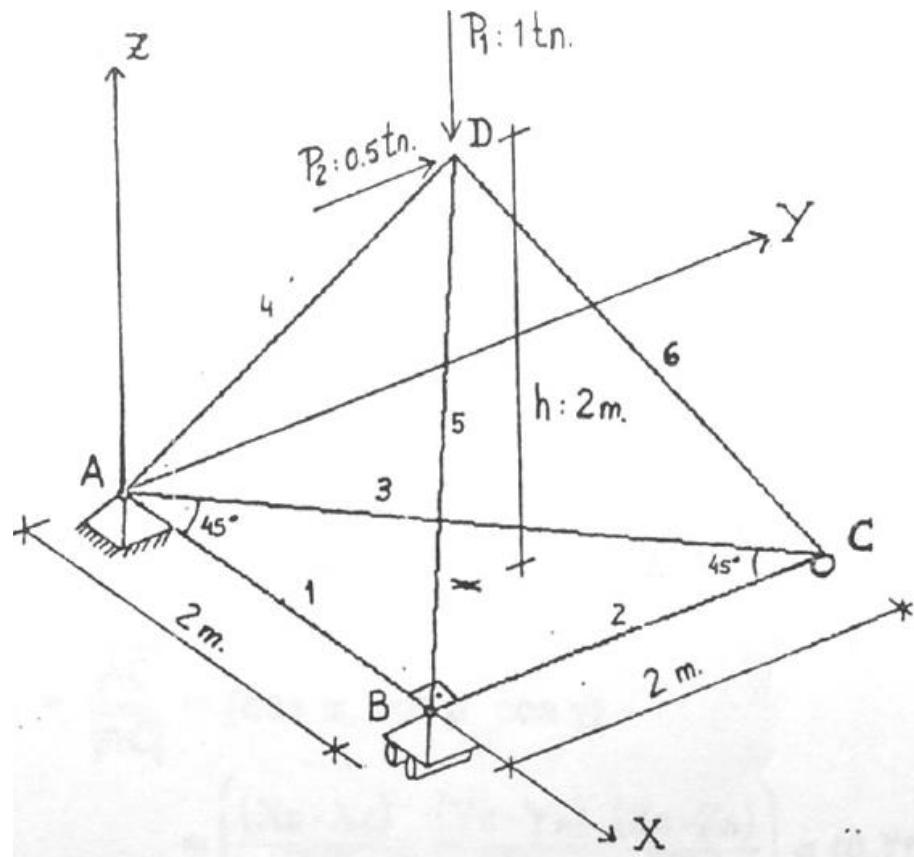


Reticulado Espacial. Método de los Nudos.





Reticulado Espacial. Método Matricial.



1º) Análisis de la estructura:

$$b = 3.v - 6$$

$$6 = 3.4 - 6 = 12 - 6 = 6$$

$$I = 3.v \approx 3.4 = 12$$

2º) Análisis geométrico de la estructura:

Pto. A (0,0,0)

Pto. B (2,0,0)

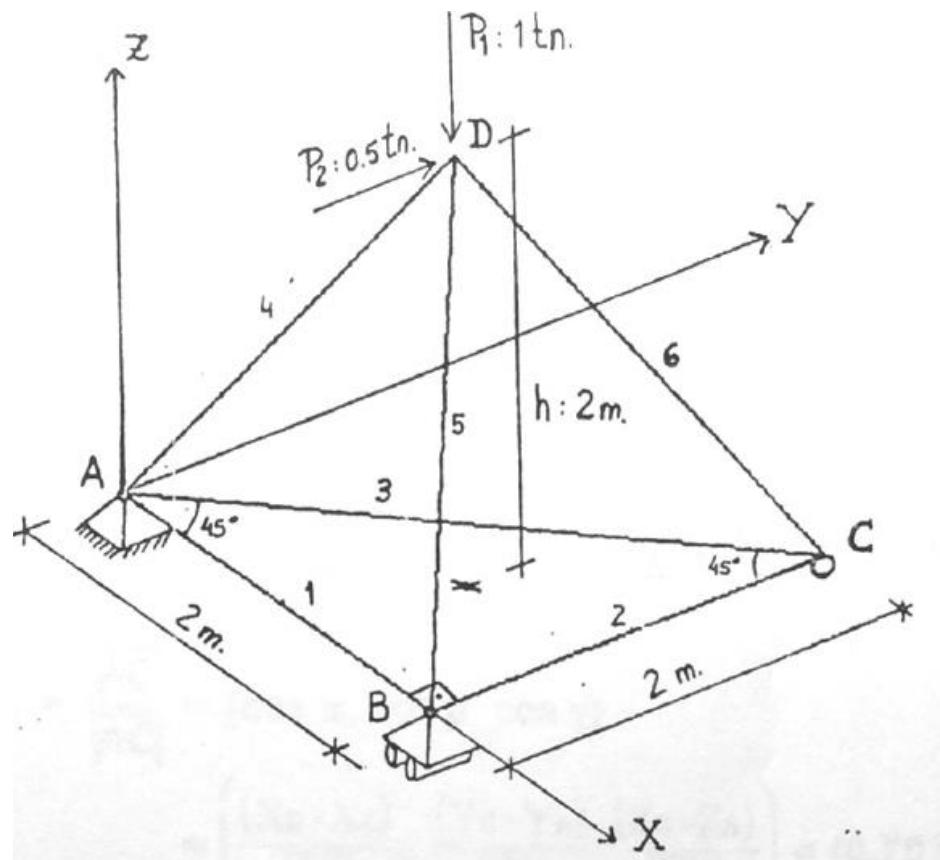
Pto. C (2,2,0)

Pto. D (0.67, 0.67, 2)

Angulos
Directores

α respecto del eje X
 β respecto del eje Y
 γ respecto del eje Z

Reticulado Espacial. Método Matricial.



- Longitud de las barras: (consideramos las barras como vectores distancias).

$$\text{Barra } |\overline{AB}| = 2 \text{ m}$$

$$\text{Barra } |\overline{BC}| = 2 \text{ m}$$

$$\text{Barra } |\overline{AC}| = \sqrt{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2 + (Z_C - Z_A)^2} = 2.83 \text{ m}$$

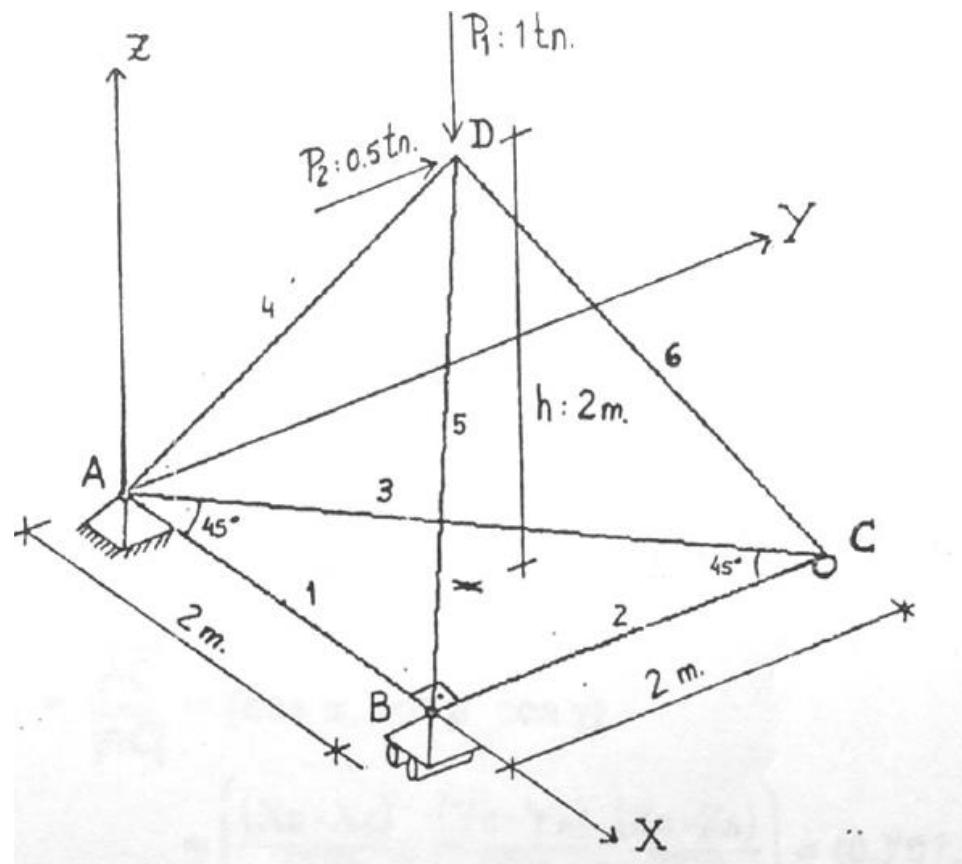
$$\text{Barra } |\overline{AD}| = \sqrt{(X_D - X_A)^2 + (Y_D - Y_A)^2 + (Z_D - Z_A)^2} = 2.21 \text{ m}$$

$$\text{Barra } |\overline{BD}| = \sqrt{(X_D - X_B)^2 + (Y_D - Y_B)^2 + (Z_D - Z_B)^2} = 2.49 \text{ m}$$

$$\text{Barra } |\overline{CD}| = \sqrt{(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2 + (Z_D - Z_C)^2} = 2.49 \text{ m}$$

- Determinación de las direcciones de cada barra:
(se utilizan los versores de cada dirección)

Reticulado Espacial. Método Matricial.



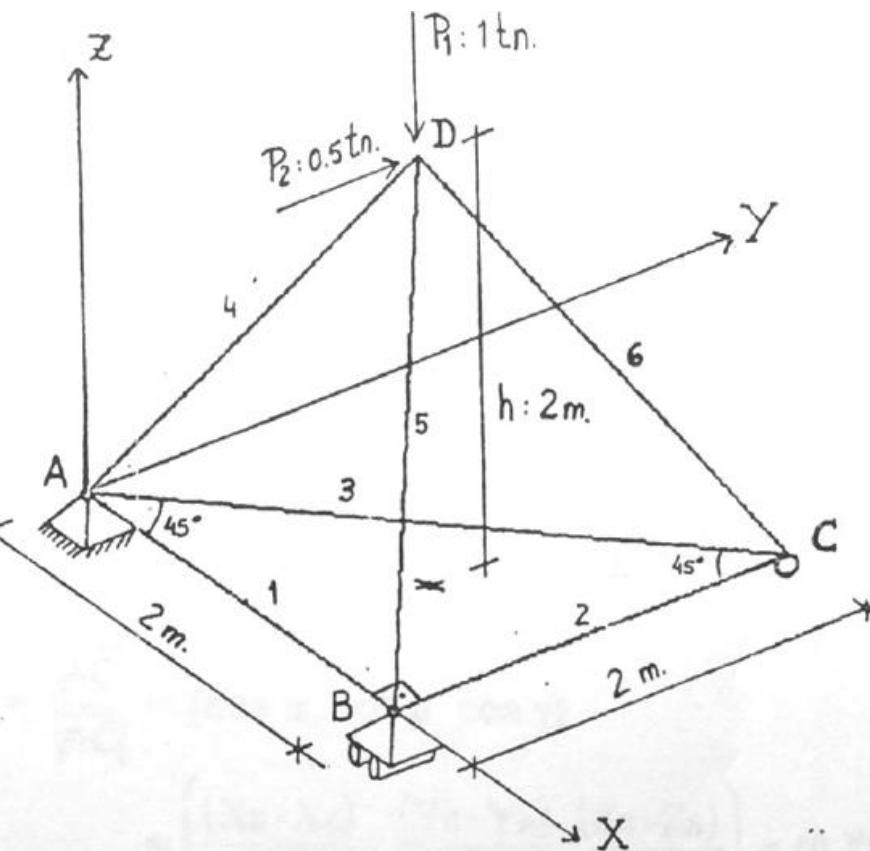
$$\begin{aligned}\overset{\nu}{AB} &= \frac{\overline{AB}}{|AB|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\ &= \left(\frac{(X_B - X_A)}{|AB|}; \frac{(Y_B - Y_A)}{|AB|}; \frac{(Z_B - Z_A)}{|AB|} \right) = (1, 0, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{\nu}{BC} &= \frac{\overline{BC}}{|BC|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\ &= \left(\frac{(X_C - X_B)}{|BC|}; \frac{(Y_C - Y_B)}{|BC|}; \frac{(Z_C - Z_B)}{|BC|} \right) = (0, 1, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{\nu}{AC} &= \frac{\overline{AC}}{|AC|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\ &= \left(\frac{(X_C - X_A)}{|AC|}; \frac{(Y_C - Y_A)}{|AC|}; \frac{(Z_C - Z_A)}{|AC|} \right) = (0.707, 0.707, 0)\end{aligned}$$



Reticulado Espacial. Método Matricial.



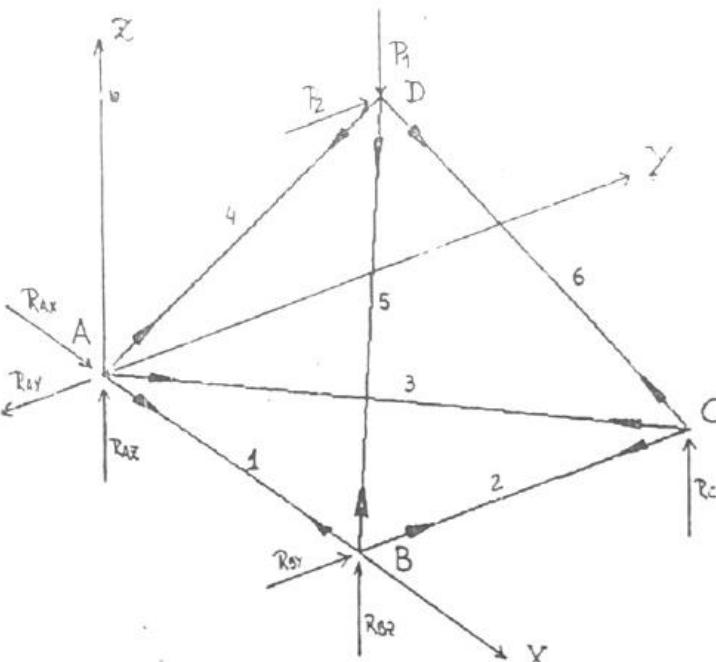
$$\begin{aligned}\overset{\nu}{AD} &= \frac{\overline{AD}}{|AD|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\ &= \left(\frac{(X_D - X_A)}{|AD|}; \frac{(Y_D - Y_A)}{|AD|}; \frac{(Z_D - Z_A)}{|AD|} \right) = (0.303, 0.303, 0.905)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{\nu}{BD} &= \frac{\overline{BD}}{|BD|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\ &= \left(\frac{(X_D - X_B)}{|BD|}; \frac{(Y_D - Y_B)}{|BD|}; \frac{(Z_D - Z_B)}{|BD|} \right) = (-0.534, 0.289, 0.803)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{\nu}{CD} &= \frac{\overline{CD}}{|CD|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\ &= \left(\frac{(X_D - X_C)}{|CD|}; \frac{(Y_D - Y_C)}{|CD|}; \frac{(Z_D - Z_C)}{|CD|} \right) = (-0.534, -0.534, 0.803)\end{aligned}$$



Reticulado Espacial. Método Matricial.



$$\begin{aligned}
 [B] * [S] + [P] &= 0 \\
 [B] * [S] &= [-P] \\
 [B]^{-1} * [B] * [S] &= [B]^{-1} * [-P] \\
 [S] &= [B]^{-1} * [-P]
 \end{aligned}$$

(12×1) (12×12) (12×1)

| Nudo | | (B) | | | | | | (P) | | | | | |
|------|----|-----|----|--------|--------|--------|--------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 | S6 | R _{AX} | R _{AY} | R _{AZ} | R _{BX} | R _{BY} | R _{BZ} |
| A | Fx | 1 | 0 | 0.707 | 0.303 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Fy | 0 | 0 | 0.707 | 0.303 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| | Fz | 0 | 0 | 0 | 0.905 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| B | Fx | -1 | 0 | 0 | 0 | -0.534 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Fy | 0 | 1 | 0 | 0 | 0.269 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| | Fz | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.803 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| C | Fx | 0 | 0 | -0.707 | 0 | 0 | -0.534 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Fy | 0 | -1 | -0.707 | 0 | 0 | -0.534 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Fz | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.803 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| D | Fx | 0 | 0 | 0 | -0.303 | 0.534 | 0.534 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Fy | 0 | 0 | 0 | -0.303 | -0.269 | 0.534 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.5 |
| | Fz | 0 | 0 | 0 | -0.905 | -0.803 | -0.803 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

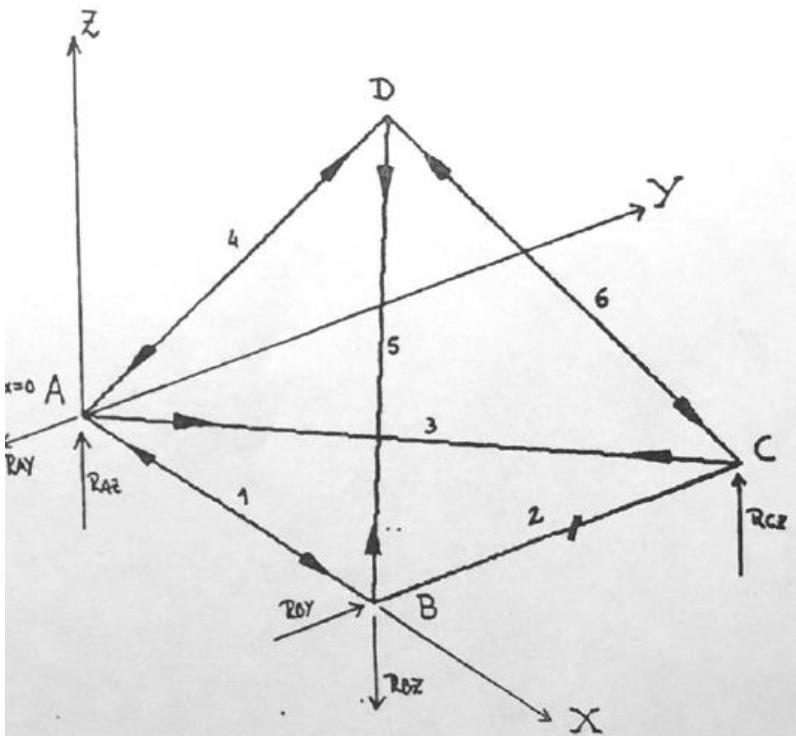


$(B)^{-1} =$

Reticulado Espacial. Método Matricial.

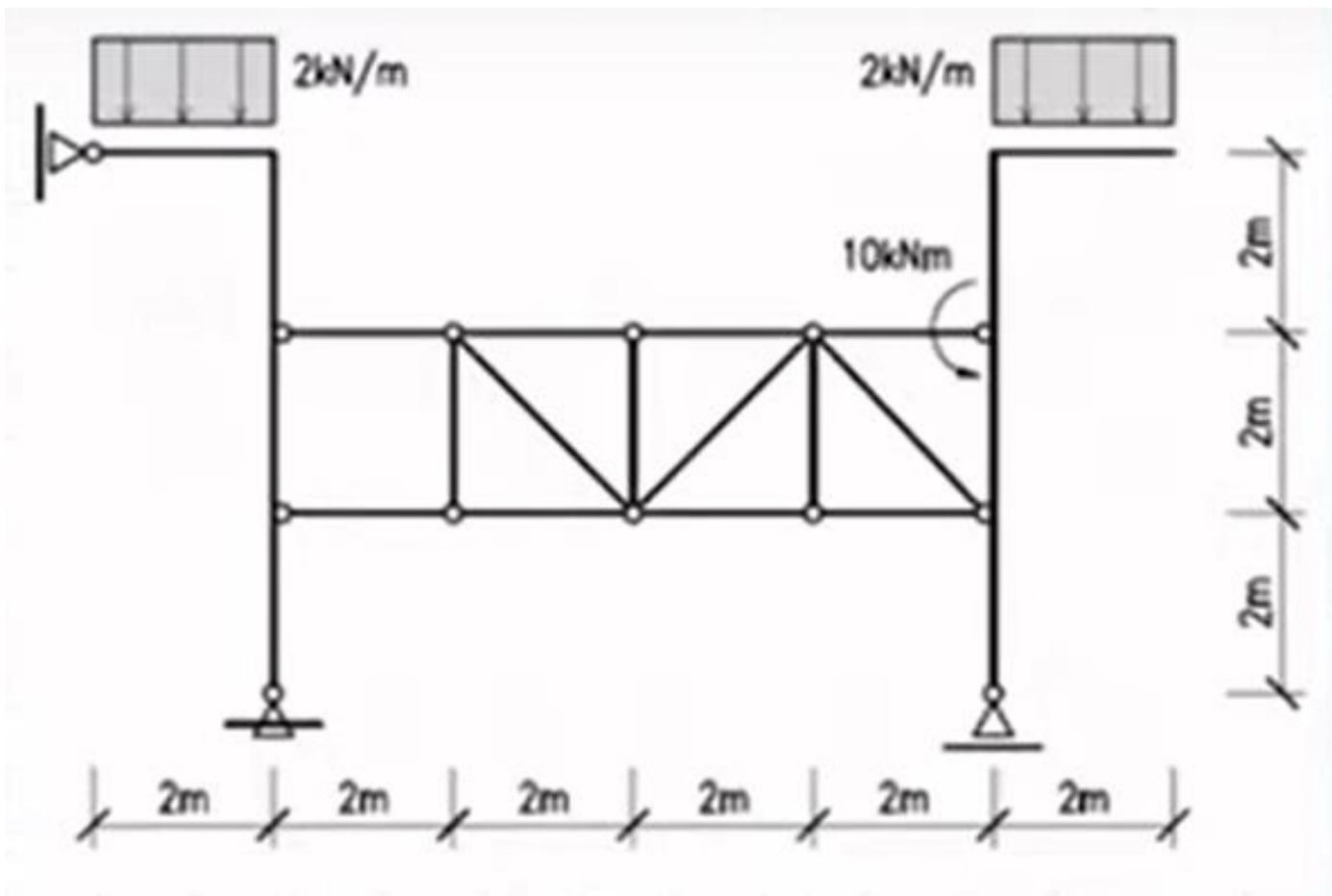
| | | | | | | | | | | | |
|-----------|----|-----------|-----------|----|-----------|-----------|----|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0 | 0 | -7.23E-18 | -1 | 0 | 4.274E-17 | -1.11E-18 | 0 | 7.05E-17 | -0.685006 | 0.6850062 | 0.275E-17 |
| -1.11E-18 | 0 | 1.835E-17 | -1.11E-18 | 0 | 1.83E-17 | 1 | -1 | -3.72E-17 | -1.68E-18 | 5.549E-17 | 1.409E-20 |
| 1.57E-18 | 0 | 1.038E-17 | 1.57E-18 | 0 | 0 | -1.414427 | 0 | 1.11E-18 | 0.3758783 | -0.940603 | 0.5849245 |
| 0 | 0 | 7.318E-19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -2.22E-18 | -1.882173 | 2.125E-18 | -1.318157 |
| 0 | 0 | 2.254E-18 | 0 | 0 | -8.07E-18 | 0 | 0 | -8.07E-18 | 1.24533 | -1.24533 | 2.802E-18 |
| 0 | 0 | -1.07E-17 | 0 | 0 | 1.11E-18 | 0 | 0 | 1.11E-18 | -0.487387 | 1.24533 | -0.747943 |
| 1 | 0 | 3.488E-18 | 1 | 0 | 2.849E-17 | 1 | 0 | 2.849E-17 | 1 | 1.11E-18 | -4.43E-17 |
| 1.11E-18 | -1 | -2.05E-17 | 1.11E-18 | 0 | -1.5E-17 | -1 | 0 | -7.05E-17 | -0.334994 | -0.685006 | -0.28E-17 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.7938664 | 1.203E-17 | 1.1829323 |
| -1.11E-18 | 0 | 4.01E-18 | -1.11E-18 | -1 | -2.33E-18 | 1 | -1 | -7.17E-17 | 0.3349938 | -0.334994 | -2.28E-17 |
| 0 | 0 | -1.48E-17 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1.405E-18 | -1 | 1 | 8.888E-17 |
| 0 | 0 | 3.32E-18 | 0 | 0 | -1.11E-18 | 0 | 0 | 1 | 0.3984018 | -1 | 0.8005984 |

| | | |
|----------|---|----------|
| S_1 | = | -332.50 |
| S_2 | = | 0 |
| S_3 | = | 1035.23 |
| S_4 | = | -1318.16 |
| S_5 | = | 622.67 |
| S_6 | = | -1370.61 |
| R_{AX} | = | 0 |
| R_{AY} | = | 332.50 |
| R_{AZ} | = | 1192.93 |
| R_{BX} | = | 167.50 |
| R_{BZ} | = | -500 |
| R_{CZ} | = | 1100.60 |





Estructuras Mixtas con Reticulados .





Estructuras Mixtas con Reticulados .

