Trabajo Práctico 3.1: Transformaciones Lineales

PARTE A

1. En cada uno de los siguientes casos determine si la función dada es o no una transformación lineal.

   a) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad T(x,y) = (-2,1)$

   b) $T:\mathbb{R}^2 \to M_{2\times 2} \quad T(x,y) = \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{bmatrix}$

   c) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad T(x,y,z) = x-y+z$

   d) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad T(x,y,z) = (x^2+y, x-z)$

   e) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

   f) $T:P_2 \to \mathbb{R}^2 \quad T(ax^2+bx+c) = (b+c, a-b)$

2. Para las funciones del ejercicio 1 que sean transformaciones lineales:

   a) Determine el núcleo y la imagen.

   b) Encuentre una base y la dimensión del núcleo.

   c) Encuentre una base y la dimensión de la imagen. Además, verifique el teorema de la dimensión en cada caso.

   d) Clasifique las transformaciones según sean endomorfismo, monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo.

3. Sea T el operador lineal en $\mathbb{R}^2$ tal que $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

   a) Halle $T\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e interprete geométricamente. Concluya.

   b) Determine su núcleo, nul(T) y rango(T).

4. Sea R el rectángulo con vértices en $(0,0)$; $(1,0)$; $(1,2)$ y $(0,2)$. ¿Cuál es la imagen de R bajo la multiplicación por $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$? Interprete geométricamente.

5. Sea A una matriz de 7×6 tal que $Ax = 0$ tiene únicamente la solución trivial y supóngase que $T:\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^7$ es la multiplicación por A. Halle el rango y la nulidad de T.

6. Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal y supóngase que

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Halle la transformación de $(1,1,1)$.

   b) Encuentre la ley de la transformación lineal.

7. Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

a) La dimensión del núcleo de la transformación lineal matricial definida por $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ es 0.

b) Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ es una transformación lineal, entonces puede ocurrir que $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4$.

c) Si $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^7$ es una transformación lineal, entonces la dimensión de la imagen de T es como máximo 4.

d) Si $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ es una transformación lineal, entonces la nulidad de T puede ser 0.

e) El núcleo del operador lineal identidad en $\mathbb{R}^3$ es $\mathbb{R}^3$ es $\{[0, 0, 0]\}$.

f) El operador derivación es un operador lineal.

g) El operador integración es un operador lineal.

h) Si T es una transformación lineal tal que $T(X) = AX$, siendo $A_{3\times 3}$ una matriz fija, tal que $\mathrm{N}(T) = \{0\}$, entonces A es no invertible.

PARTE B

1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la multiplicación por la matriz

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

para un ángulo fijo θ.

   a) Encuentre la transformación matricial para $\theta = \frac{\pi}{6}$.

   b) Halle $T(-3, 4)$ e interprete geométricamente. Use GeoGebra.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

la proyección de un vector en $\mathbb{R}^3$ sobre el plano xy.

   - Verifique que T es un operador lineal y luego determine su imagen, rango (T) y nulidad ($\mathrm{N}(T)$).
   - Demuestre que el conjunto imagen obtenido es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Use GeoGebra para representar gráficamente la imagen de T e interprete geométricamente.

3. Para $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(X) = A \cdot X$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

determine $\mathrm{N}(T)$. Verifique el Teorema de la Dimensión.

4. Dado un rectángulo con vértices en los puntos $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 2)$ y $D(3, 2)$. Si la región que se obtiene, al aplicar la transformación lineal T, es el paralelogramo de vértices $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $E(4, 2)$ y $F(7, 2)$, respectivamente:

   a) Represente gráficamente usando GeoGebra.

   b) Determine la ley de la transformación lineal aplicada, indique dominio y codominio, e identifique la T obtenida.

   c) Clasifique la T en monomorfismo – epimorfismo – isomorfismo – endomorfismo según corresponda. Justifique.

5. Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - ky, ky + z, kz - y)$.

a) Encuentre todos los valores de $k \in \mathbb{R}$, si existen, tales que T sea un monomorfismo.

b) Halle todos los valores de $k \in \mathbb{R}$, si existen, tales que T no sea un epimorfismo.

c) Para $k = 1$, encontrar el núcleo y la imagen de la transformación. Para cada uno de ellos, determine una base.

6. Sea $T : V \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal.

   a) Si T es un epimorfismo y la nulidad de T es 2, ¿cuánto vale la dimensión de V?

   b) Si T es un isomorfismo, ¿cuánto vale la dimensión de V?

7. Para la transformación lineal $T : M_{3\times 3} \to M_{3\times 3}$ dada por $T(A) = A - A^t$:

   a) Determine el Núcleo. ¿Qué nombre reciben las matrices que pertenecen al núcleo de la transformación lineal?

   b) Demuestre que el núcleo de la TL es un subespacio vectorial de $M_{3\times 3}$.

   c) Determine la Imagen. ¿Qué nombre reciben las matrices que pertenecen a la imagen de la transformación lineal?

   d) Verifique el teorema de la dimensión.

8. Complete los siguientes enunciados de manera tal que resulten verdaderos:

   a) Sean las proposiciones p: *" el transformado del vector nulo del dominio es igual al vector nulo del **codominio**"* y q: *"T sea transformación lineal"*. Escriba entre ellas una implicación que siempre sea verdadera ....

   b) La transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y) = (x + y, x, y)$ tiene por imagen el espacio generado por el conjunto ....

   c) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(x) = A \cdot x$, entonces los posibles valores del rango de T son ...

   d) El núcleo de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es .... y $\mathrm{Im}(T) =$ ....

   e) El operador lineal en $\mathbb{R}^2$ reflexión respecto al eje de ordenadas representado en forma matricial es ....