Trabajo Práctico 3.2: Matriz Asociada

PARTE A

1. Encuentre la matriz estándar asociada a las siguientes transformaciones lineales y escriba su representación matricial:

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to M_{2\times 2}$, $T(x, y) = \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{bmatrix}$

   b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = x - y + z$

   c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x - 2y, x + 2y)$

2. Determine la matriz asociada al operador lineal en $\mathbb{R}^2$ "reflexión respecto a la recta identidad" respecto de la base $B = \{(-1, 2), (2, 0)\}$ del dominio y $B' = \{(1, -1), (0, 1)\}$ del codominio.

3. Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y-z \end{bmatrix}$:

   a) Halle la matriz asociada a T respecto a las bases $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (-1, 1, 1)\}$ y $B' = \{(1, 1), (1, 2)\}$, respectivamente.

   b) Calcule $T(-2, 1, 0)$ y verifique usando la matriz asociada encontrada.

4. Sea T un operador lineal en $\mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + 2y, 2x - y)$.

   a) Encuentre la matriz estándar A asociada al operador lineal T.

   b) Encuentre la matriz M asociada a T respecto a la base $B = \{(1, 0), (1, -1)\}$ en los conjuntos de partida y de llegada.

   c) Encuentre la matriz de pasaje P', respecto de la base canónica en el conjunto de partida y la base $B = \{(1, 0), (1, -1)\}$ en el conjunto de llegada.

   d) Encuentre la matriz de pasaje P, respecto de la base $B = \{(1, 0), (1, -1)\}$ en el conjunto de partida y la base canónica en el conjunto de llegada.

   e) Utilizando los resultados anteriores analice y responda:

      1) ¿Qué relación existe entre P' y P?

      2) A partir de observar el cálculo de $P'AP$, ¿qué relación existe entre A y M?

   f) Calcule $T(3, -2)$ utilizando la matriz A y la matriz M. Extraiga conclusiones.

5. Sean P_2 y P_3 los espacios vectoriales de los polinomios de grado menor o igual a dos unido al polinomio nulo y menor o igual a tres unido al polinomio nulo, respectivamente, y sea $T : P_2 \to P_3$ la transformación lineal definida por

$$T(p(x)) = x \cdot p(x)$$

   a) Determine la matriz estándar asociada a T.

   b) Obtenga la matriz asociada a T referida a las bases:

$$B = \{1 - x^2,\ 1 + 3x + 2x^2,\ 5 + 4x + 4x^2\}$$

   en el dominio y

$$B' = \{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$$

   en el codominio.

c) Con las matrices de los incisos anteriores, calcule la imagen del vector

$$\vec{u} = 2 - x + x^2.$$

6. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a una transformación lineal respecto a la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en el dominio y la base canónica en el codominio. Encuentre la matriz estándar asociada a la transformación lineal.

7. Sea $M = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a una transformación lineal respecto de la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ en el dominio y la base $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en el codominio. Encuentre la ley de la transformación.

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifique.

   a) Si A y B son matrices cuadradas de orden $n \times n$ semejantes, entonces $\text{tr}(A) - \text{tr}(B) = 0$.

   b) Si A es una matriz ortogonal de orden $n \times n$, entonces A es semejante a una matriz con determinante nulo.

   c) Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ es una transformación lineal, entonces los vectores columna de la matriz asociada a T son linealmente dependientes.

   d) La matriz $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ es la matriz de pasaje de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ a la base $B = \{(1, -1), (2, 3)\}$.

PARTE B

1. Anote la matriz asociada al operador lineal en $\mathbb{R}^2$, contracción horizontal con $k = 1/2$, respecto de la base $B = \{(1, -1), (2, 1)\}$ para el dominio y codominio.

2. Sea $T : P_2 \to P_1 / T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_0x$. Encuentre la matriz estándar asociada a T y calcule $T(3 - 2x + x^2)$.
   ¿Es T un *isomorfismo*?

3. Encuentre la matriz asociada al operador lineal rotación, en $\mathbb{R}^2$, en sentido anti horario, con un ángulo de 45°, seguida de una reflexión respecto del eje x. Utilizando la matriz hallada, mapee el triángulo cuyos vértices son $(0, 2)$ y $(1, -1)$, $(4, 2)$. Grafique usando GeoGebra.

4. Sea T un operador lineal en $\mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x - y, y - x, x - z)$.

   a) Encuentre la matriz estándar A asociada al operador lineal T.

   b) Encuentre la matriz M asociada a T respecto a la base $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ en los conjuntos de partida y de llegada.

   c) Encuentre la matriz de pasaje P', respecto de la base canónica en el conjunto de partida y la base B en el conjunto de llegada.

   d) Encuentre la matriz de pasaje P, respecto de la base B en el conjunto de partida y la base canónica en el conjunto de llegada.

   e) Calcule $T(2, 0, 0)$ utilizando la matriz A y la matriz M. Extraiga conclusiones.

5. Sea la matriz $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ asociada a una transformación lineal, respecto a las bases $B = \{(1,0),(1,1)\}$ del conjunto de partida y $B' = \{(0,1),(2,1)\}$ del conjunto de llegada. Encuentre la matriz estándar A asociada a dicha transformación.

6. Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a una transformación respecto de la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ en el dominio y $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en el codominio. Halle la matriz asociada a dicha transformación lineal respecto de las bases $C = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ y $C' = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ en el dominio y codominio, respectivamente.

7. Complete los siguientes enunciados de manera tal que resulten verdaderos:

   a) La primera columna de la matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y) = (x+y, 2y, 0)$ respecto de la base $B = \{(0,5); (-2,3)\}$ en el dominio y la base canónica en el codominio es ....

   b) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = (x+z, y-x)$ y sea $B = \{(2,1); (-1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$, entonces el $\left(T \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)_B =$ ....

   c) Si la matriz estándar asociada a una TL es $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, entonces un vector que pertenece a la imagen de la transformación lineal es ....

   d) Sean las proposiciones p : " $\det(A) = \det(B)$" y q : "A y B matrices cuadradas de orden $n \times n$ semejantes". Escriba, entre ellas, una implicación que resulte siempre verdadera..................