Trabajo Práctico 2.3: SISTEMAS

PARTE A

1. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales:

   a) Halle la matriz ampliada, el vector de incógnitas y el de términos independientes y exprese el SEL en forma matricial.

   b) Analice por el Teorema de Rouché – Frobenius y encuentre, si es posible, el conjunto solución.

   c) Verifique los resultados usando `https://matrixcalc.org/es/slu.html`

$$\begin{cases} x_1 - x_4 + 2x_2 + x_5 = 1 \\ -x_5 + x_3 + 3x_2 - 2 = 0 \\ x_3 + 7x_4 + x_5 = 1 \end{cases} \qquad \text{en } \mathbb{R}^5$$

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ x - z + 2y = 4 \\ 3y = 1 + 3z \end{cases} \qquad \text{en } \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} -x_3 + \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 7 = 2x_3 \end{cases} \qquad \text{en } \mathbb{R}^3$$

2. Analice y resuelva los sistemas homogéneos asociados a los sistemas del ejercicio anterior.

3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   la matriz de coeficientes del sistema $A \cdot X = B$. Y sean

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   matrices de términos independientes. Para cada una de ellas: Analice el sistema, determine (si es posible) el conjunto solución y concluya.

4. Dadas las siguientes matrices ampliadas en forma escalonada reducida correspondientes a sistemas de ecuaciones lineales. Si corresponde, escriba el sistema.

   a) Clasifique el sistema según el Teorema de Rouché Frobenius.

   b) Determine, si existen, las incógnitas principales y libres.

   c) Encuentre, de ser posible, el conjunto solución.Verifique los resultados usando `https://matrixcalc.org/es/slu.html`

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 3 \\ 0 & 1 & 0 & . & -5 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & . & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & . & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & . & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{pmatrix}$$

5. Para la siguiente matriz ampliada, determine los posibles valores de α, si existen, tales que el sistema $AX = B$ no tenga solución, tenga solución única o tenga infinitas soluciones dependiendo de un parámetro o dos parámetros.

$$\begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha^2 & 5\alpha+4 & . & -16 \\ 1 & \alpha & \alpha & . & \alpha \\ -\alpha & 4\alpha & 4\alpha & . & 4\alpha \end{pmatrix}$$

6. Sea el sistema dado por:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 = \frac{1}{2} \\ ax_4 + x_5 = -b \\ (b^2 - b)x_4 = b \end{cases}$$

   a) Plantee el sistema en forma matricial.

   b) Construya la matriz ampliada y encuentre, si existen, los posibles valores de a y b para que el sistema no tenga solución, tenga solución única o tenga infinitas soluciones.

7. Determine un vector x tal que $A \cdot x = b$ si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   Similarmente, encuentre x tal que $A \cdot x = 0$.

8. ¿Qué relación existe entre los siguientes sistemas de ecuaciones lineales?

$$\begin{cases} x - y + 2z = -2 \\ 3x - 4y + 2z = 3 \\ 2x + 3z + 2y - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4y - z = 6 \\ x - y + 2 = -2z \\ -9 - 4z - y = 0 \end{cases}$$

9. Indique si las siguientes proposiciones son (V) o (F). Justifique.

   a) ( ) Si A es una matriz rectangular y el sistema $AX = 0$ es compatible determinado, el sistema $A^T X = 0$ también es compatible determinado.

   b) ( ) Si en $AX = 0$, S es solución, entonces kS es solución, donde k es un número real.

   c) ( ) Si en $AX = B$, S_1 y S_2 son soluciones, entonces $(S_1 + S_2)$ es solución.

   d) ( ) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución, cualquier otro sistema de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes también tiene solución.

PARTE B

a) Dado el sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}^3$.:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = -10 \\ -3/2y + z - 5 = x \end{cases}$$

1) Determine si las ternas $(-4, 0, 1)$; $(-6, 1, -1)$; $(-3, 0, 2)$ y $(-8, 2, 0)$ son solución del sistema.
2) Muestre que toda terna de la forma $(t - 5, 0, t)$, donde t es un número real, es solución del sistema.
3) Indique si se puede afirmar que el conjunto solución del sistema es

$$S = \{(t - 5, 0, t) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Justifique su respuesta.

4) Utilice GeoGebra para validar sus respuestas.

b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Considere los planos cuyas ecuaciones son:

$$4x - ay + z + 4 = 0,$$

$$2x - y + z - 1 = 0,$$

$$2x - y + 2bz + 4 = 0.$$

Determine los valores de a y b que correspondan a cada uno de los siguientes casos:

1) La intersección de los tres planos es vacía.
2) La intersección de los tres planos es exactamente un punto.
3) La intersección de los tres planos es exactamente una recta. (En este caso, encuentre el conjunto solución.)

Utilice GeoGebra para validar las respuestas obtenidas en (a), (b) y (c).

c) Defina SEL homogéneo, indique qué tipo de solución admiten, nombre y explique los posibles métodos de resolución.

d) Encuentre los valores de λ para que el siguiente sistema homogéneo tenga infinitas soluciones y calcule el conjunto solución:

$$(A - \lambda I)X = 0,$$

siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

e) Determine el conjunto solución del sistema $A \cdot X = 0$ y verifique en cada caso que el conjunto solución obtenido es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Interprete geométricamente usando GeoGebra.

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$ 2) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}.$

f) Complete los siguientes enunciados de manera tal que resulten verdaderos:

1) Dadas las proposiciones p: "Sea $A_{n\times n}$ tal que $A \cdot X = B$ es un SCD" y q: "$\det(A) \neq 0$". Entonces q es condición.................... para p.
2) Si la solución de un SEL de 5×4 es $S = \{(t, 3 - s, 2 + 2s, s) \in \mathbb{R}^4\}$ entonces la matriz ampliada del SEL en forma escalonada reducida es ....
3) Si A es de orden 5×3 y $\text{rango}(A) = 1$ entonces el sistema $A{\cdot}X = B$ tiene.................... variables principales y .... variables libres.

4) Un ejemplo de una matriz ampliada escalonada reducida correspondiente a un SEL con más ecuaciones que incógnitas y con un número infinito de soluciones es ....

5) Si A es la matriz nula de 7×5, entonces el conjunto solución de $A \cdot X = 0$ es ......

6) Si $A \cdot X = B$ con $A \neq O$, es un SEL (3×7), no homogéneo, entonces el rango de la matriz del sistema puede tomar los valores ....

g) Plantee, resuelva e interprete los siguientes problemas matemáticos:

1) Un empresario tiene tres máquinas que son empleadas en la fabricación de cuatro productos diferentes. Para utilizar plenamente las máquinas, estas estarán en operación 8 horas diarias. El número de horas que cada máquina es usada en la producción de cada uno de los cuatro productos está dado por:

Producto	**1**	**2**	**3**	**4**
Máquina 1	1	2	1	2
Máquina 2	2	0	1	1
Máquina 3	1	2	3	0

Por ejemplo, en la producción de una unidad del producto 1, la máquina 1 se usa 1 hora, la máquina 2 se usa 2 horas y la máquina 3 se usa 1 hora. Encuentre el número de unidades que se deben producir de cada uno de los 4 productos un día de 8 horas completas.

2) Un viajero recién regresado de Europa gastó en alojamiento, por día, \$30 dólares en Inglaterra, \$20 en Francia y \$20 en España. En comidas, por día, gastó \$20 en Inglaterra, \$30 en Francia y \$20 en España. Adicionalmente, desembolsó \$10 por día en cada país en gastos varios. El registro de nuestro viajero indica que gastó un total de \$340 en alojamiento, \$320 en alimentación y \$140 en gastos varios en su recorrido por estos tres países. Calcule el número de días que permaneció el viajero en cada país o muestre que el registro debe ser incorrecto, pues las cantidades gastadas son incompatibles entre sí.