Análisis Matemático I
Clase 10: Funciones crecientes y decrecientes. Criterio de la derivada primera para extremos. Concavidad.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2025

Recordar:

Prueba de la derivada primera para funciones crecientes o decrecientes

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces:

- Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Observación: si en el teorema anterior f es continua solamente en (a, b), entonces se debe reemplazar $[a, b]$ por (a, b) en las dos implicaciones. Además, el teorema puede aplicarse a funciones con dominios que no consisten solamente en un intervalo como veremos en el próximo ejemplo.

Ejemplo: determine los intervalos donde $f(x) = x^3 - 12x - 5$ es creciente y donde es decreciente.

Antes de resolver el problema tener en cuenta que: para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, vamos a determinar los intervalos donde f' es positiva y donde es negativa. Para ello, se deben distinguir los puntos donde f' cambia de signo. Estos se encuentran, en los casos que abordaremos en este curso, en:

- los puntos críticos, es decir, puntos **interiores** del dominio de f donde la derivada es cero o no existe
- los extremos o puntos frontera del dominio de f
- los puntos de discontinuidad de f.

Funciones crecientes y decrecientes

Solución del ejemplo: observar que f tiene por dominio $\mathbb{R}$ y que es continua en todo $\mathbb{R}$. Por ende, los únicos puntos que se deben considerar para analizar el cambio de signo de f' son los puntos críticos. Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2).$$

Dado que f' existe para todo $x \in \mathbb{R}$, los únicos puntos críticos son aquellos donde f' es cero. En este caso:

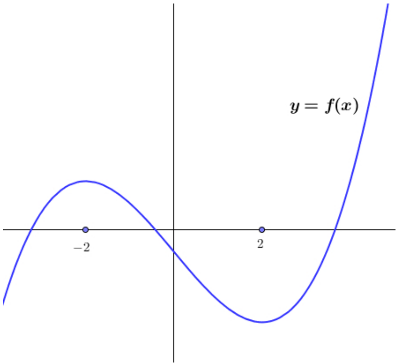
$$x_1 = 2 \qquad \text{y} \qquad x_2 = -2.$$

Analizamos los signos de f' en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
valor de prueba	-3	0	3
signo de f'	$+$	-	$+$
Conclusión	f es creciente	f es decreciente	f es creciente

Así, f es creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$ y decreciente en $(-2, 2)$ (**La respuesta se puede dar con intervalos abiertos**).

Observar que en el ejemplo anterior no se dijo que f es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. De hecho, si consideramos el gráfico de f:

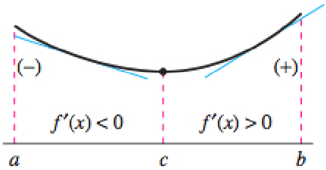


concluimos que f no es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ pues hay puntos cercanos a 2 donde f asume valores más chicos que en puntos cercanos a -2. Así, los intervalos donde una función crece o decrece deben colocarse de forma separada:

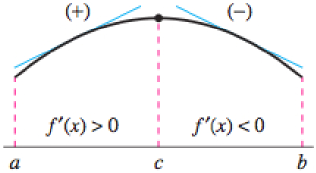
la función f es creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$.

Criterio de la primera derivada para localizar extremos relativos

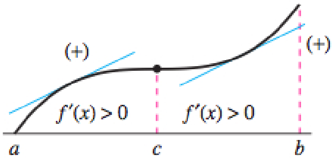
Considere los siguientes gráficos. Observe en cada situación cómo cambia el signo de f' alrededor del punto crítico $x = c$:

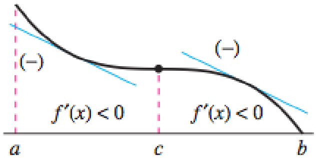


Mínimo relativo



Máximo relativo





Ni mínimo relativo ni máximo relativo

Criterio de la derivada primera para extremos locales

Criterio de la derivada primera para extremos

Sea f una función continua en $[a, b]$ y sea $c \in (a, b)$ un punto crítico de f. Supongamos que f es derivable en (a, b), excepto posiblemente en c. Al aumentar el valor de la variable independiente x,

- si f' cambia de positiva a negativa alrededor de c, entonces f tiene un máximo local en $x = c$,
- si f' cambia de negativa a positiva alrededor de c, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$,
- si f' no cambia de signo alrededor de c, entonces f no tiene extremo local en $x = c$.

Criterio de la primera derivada para localizar extremos relativos

Ejemplo: sea $f(x) = x^{1/3}(x-4)$. Determine los intervalos donde f crece y/o decrece, y los extremos relativos de f.

Criterio de la primera derivada para localizar extremos relativos

Ejemplo: sea $f(x) = x^{1/3}(x-4)$. Determine los intervalos donde f crece y/o decrece, y los extremos relativos de f. **Solución:** primero calculamos la derivada de f usando la regla del producto:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}(x-4) + x^{1/3}.$$

Observar que f' no existe en $x = 0$ y que este punto pertenece al dominio de f. Luego, $x = 0$ es un punto crítico. Analizaremos si f' se anula en algún punto:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{3}x^{-2/3}(x-4) + x^{1/3} = 0$$

Multiplicamos por $x^{2/3}$ ambos miembros:

$$\frac{1}{3}(x-4) + x = 0$$

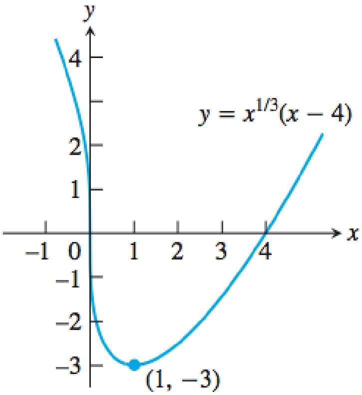
$$\frac{4}{3}x - \frac{4}{3} = 0$$
$$x = 1.$$

Así, $x = 1$ es también un punto crítico.
Para analizar los intervalos donde f crece o decrece tenemos en cuenta los puntos críticos de f y los extremos del dominio. Dado que el dominio de f es $\mathbb{R}$, los únicos intervalos a considerar son:

$$(-\infty, 0), \quad (0,1) \quad \text{y} \quad (1, \infty).$$

intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1, +\infty)$
punto de análisis	-1	$1/2$	2
signo de f'	$f'(-1) < 0$	$f'(0) < 0$	$f'(2) > 0$
Conclusión	f es decreciente	f es decreciente	f es creciente

En base a la tabla anterior y al criterio de la derivada primera para extremos tenemos que f tiene un mínimo local en $x = 1$.


y
x
4
2
1
−1
0
1
2
3
4
−1
−2
−3
$y = x^{1/3}(x-4)$
(1, −3)

Uso de la primera derivada

Recordar: la primera derivada de una función nos sirve para:

- determinar los intervalos donde la función crece y/o decrece.
- decidir si en un determinado punto crítico se tiene un máximo local, un mínimo local o ninguno de los dos.

Uso de la primera derivada

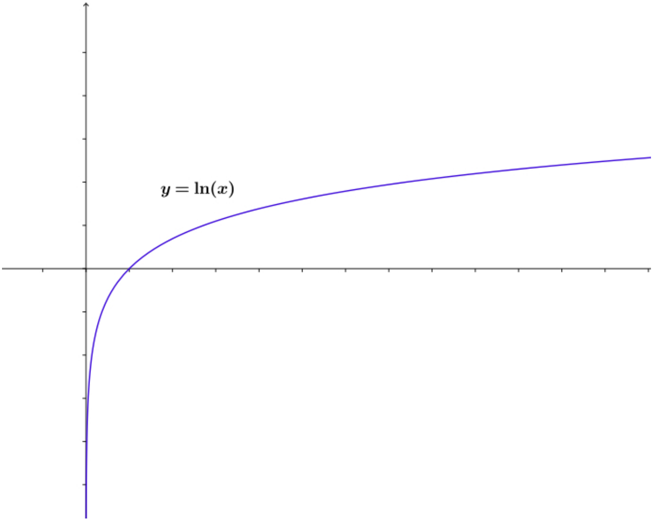
Recordar: la primera derivada de una función nos sirve para:

- determinar los intervalos donde la función crece y/o decrece.
- decidir si en un determinado punto crítico se tiene un máximo local, un mínimo local o ninguno de los dos.

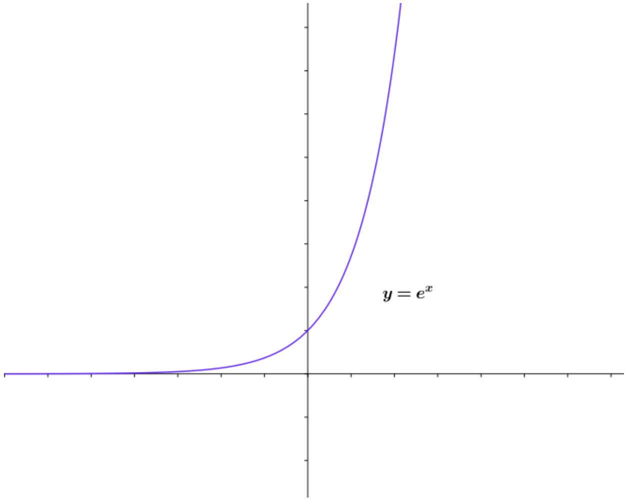
A continuación vamos a usar la segunda derivada para distinguir la *curvatura* de la gráfica de una función.

Concavidad

Para introducir el concepto de concavidad de funciones, vamos a comenzar observando las siguientes gráficas:



Concavidad

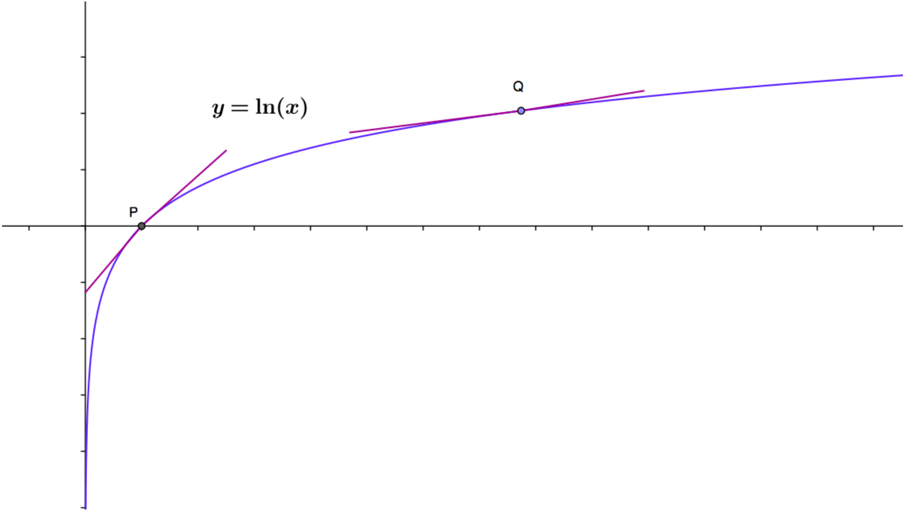


Concavidad

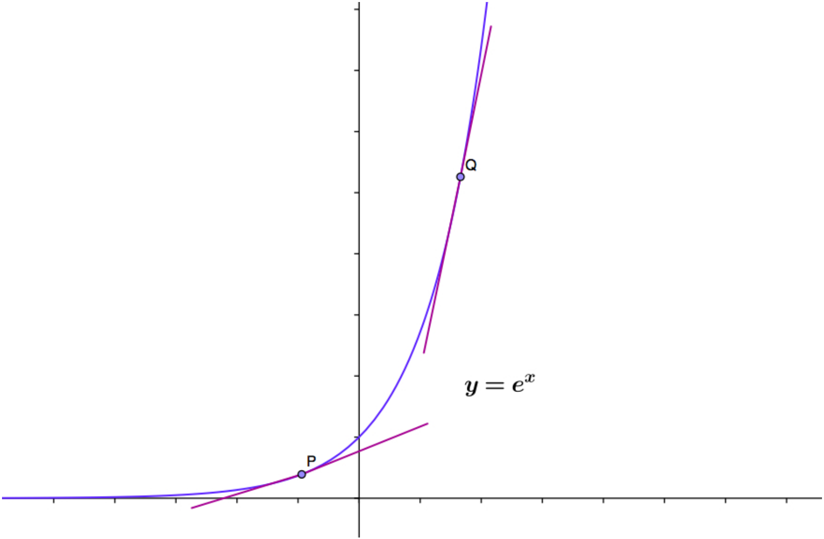
Tanto la función logarítmica como la exponencial son funciones crecientes. Sin embargo, la función $y = \ln(x)$ **desacelera** su crecimiento a medida que x aumenta, mientras que $y = e^x$ **acelera** su crecimiento cuando nos movemos en la dirección de las x positivas. En ambos casos las derivadas son positivas, pero no permiten distinguir el **ritmo** de crecimiento (o decrecimiento) de una función. Veremos que esta distinción la brinda la derivada segunda.

Comencemos trazando algunas rectas tangentes a las funciones logarítmica y exponencial.

En el caso de $y = \ln(x)$, se observa a partir de la comparación de las pendientes de las rectas tangentes en P y Q que a medida que x aumenta, la derivada de $y = \ln(x)$ decrece.



Por otro lado, en el caso de $y = e^x$, se deduce que la derivada de la función exponencial es creciente.



Concavidad

Concavidad: el comportamiento de la derivada de una función (en cuanto a si es creciente o decreciente) nos indica si la gráfica se *curva* hacia arriba o hacia abajo. Definimos entonces el concepto de concavidad como sigue:

Definición de Concavidad

Sea f una función derivable en (a, b). Tenemos:

- si f' es creciente en (a, b), entonces decimos que f es cóncava hacia arriba en (a, b),
- si f' es decreciente en (a, b), entonces decimos que f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Concavidad

Criterio de la segunda derivada para concavidad:

Sea f una función dos veces derivable en (a, b), Entonces:

- Si $f'' > 0$ en el intervalo (a, b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b).
- Si $f'' < 0$ en el intervalo (a, b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Observación: la notación f'' indica derivada segunda de f. Otras formas de escribir la derivada segunda son:

$$y'' \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Concavidad: ejemplo

Dado que para determinar los intervalos de concavidad de una función f se deben analizar los signos de f'', tenemos que encontrar los puntos alrededor de los cuales f'' cambia de signo. Estos puntos se localizan en:

- los puntos interiores del dominio de f donde f'' es cero o no existe;
- los puntos de discontinuidad de f;
- los extremos o *bordes* del dominio de f.

Ejemplo: determinar los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de la función:

$$f(x) = \frac{6}{x^2 + 3}.$$

Concavidad: ejemplo

Solución: observar que el dominio de f es $\mathbb{R}$, por ende no hay puntos *borde* para el dominio. También, f es continua en $\mathbb{R}$ pues es función racional y no hay ningún x que anule el denominador. Así, los únicos puntos a considerar para obtener los intervalos de concavidad son los puntos donde f'' es cero o no existe.

Concavidad: ejemplo

Solución: observar que el dominio de f es $\mathbb{R}$, por ende no hay puntos *borde* para el dominio. También, f es continua en $\mathbb{R}$ pues es función racional y no hay ningún x que anule el denominador. Así, los únicos puntos a considerar para obtener los intervalos de concavidad son los puntos donde f'' es cero o no existe. Calculamos f'':

$$f'(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{-12(x^2+3)^2 + 12x.2(x^2+3).2x}{(x^2+3)^4} = \frac{-12x^2 - 36 + 48x^2}{(x^2+3)^3} = \frac{36x^2 - 36}{(x^2+3)^3}$$

Observar que f'' siempre existe. Luego los únicos puntos de interés son aquellos donde:

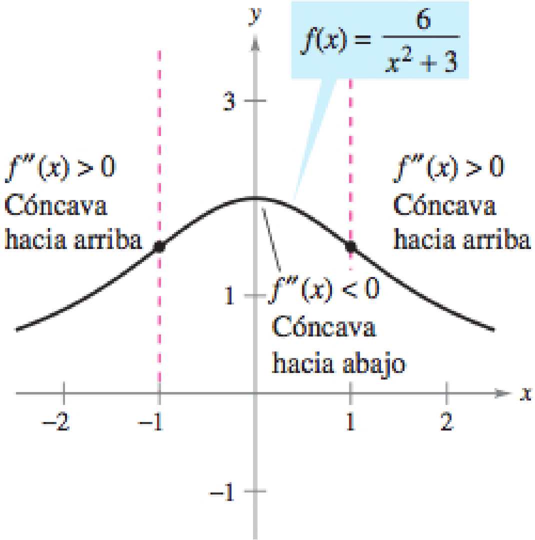
$$f''(x) = 0 \Rightarrow \quad x = 1, -1.$$

Construimos una tabla con los intervalos definidos por 1 y -1:

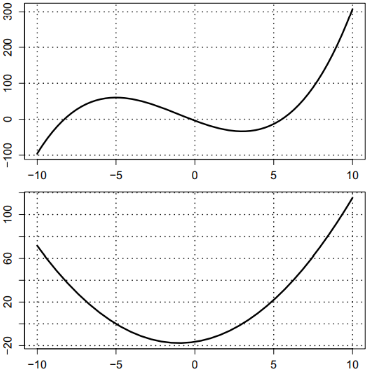
intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
punto muesta	-2	0	2
signo de f''	$+$	-	$+$
Conclusión	Conc. hacia arriba	Conc. hacia abajo	Conc. hacia arriba

Hacer esbozos de la concavidad en cada caso, hablar de la necesidad de saber más sobre los intervalos de crecimiento y decrecimiento, construir la tabla asociada y finalmente decidir como se comporta la curva.

Concavidad: ejemplo



8. En los gráficos de abajo, el de arriba representa a una función f y el de abajo su derivada f'. Utilizando solo los gráficos, responda:



a) Calcule $f(0)$ y $f(10)$.

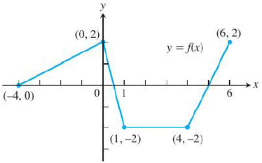
b) Determine la pendiente de la recta tangente a f cuando $x = -5$.

c) Encuentre el valor de x en el que la pendiente de la curva $y = f(x)$ es 80.

d) Encuentre la tasa de cambio instantánea de f en $x = 10$.

11. La gráfica de la siguiente figura está formada por segmentos de recta unidos

a) ¿En qué puntos del intervalo [-4;6] f' no está definida? Observe que como se considera el intervalo cerrado, en los extremos del mismo debe analizar también las derivadas laterales correspondientes. Justifique su respuesta.



5

Facultad de Ingeniería-UNCuyo 2025

b) Grafíque la derivada de f en el intervalo [-4, 6] (en los extremos del intervalo, debe graficar los valores de las derivadas laterales correspondientes).

14. Calcule las derivadas por la derecha y por la izquierda como límites laterales para mostrar que las funciones dibujadas no son derivables en el punto P.