2.3 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

INGENIERÍA Y LCC

IMPORTANTE

Esta presentación es una guía para la clase. No incluye desarrollo completo de los temas abordados.
De ninguna manera constituye el único material de estudio de la materia.

Ecuaciones Lineales

Definición

Una ecuación lineal en una variable, x, es una ecuación de la forma:

$$ax = b,$$

donde a y b son números reales.

Ejemplo

$$3x = 5$$

es una ecuación lineal en una variable y se busca su solución despejando la **variable** x:

$$\frac{1}{3}(3x) = \frac{1}{3}5 \quad \Rightarrow \quad 1x = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{3}$$

es su única solución y es un número real: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5}{3}\right\}$
(Interpretar geométricamente y analizar qué pasa si algún coeficiente es 0)

Ecuaciones Lineales

Definición

Una ecuación lineal en dos variables, x e y, es una ecuación de la forma:

$$ax + by = c,$$

donde a, b y c son números reales.

Ejemplo

$$x - 2y = -6$$

es una ecuación lineal en dos variables y posee infinitas soluciones. Si se despeja una variable:

$$y = \frac{1}{2}x + 3 \quad \Rightarrow \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x + 3 \right\}$$

Cada una de esas infinitas soluciones se puede representar gráficamente con un punto del plano xy y serán todos puntos de una misma recta (alineados). (Analizar casos con uno o más coeficientes nulos)

Ecuaciones Lineales

Definición

Una ecuación lineal en tres variables, x, y y z, es una ecuación de la forma:

$$ax + by + cz = d,$$

donde a, b, c y d son números reales.

Ejemplo

$$-x - 2y + z = -1$$

es una ecuación lineal en tres variables y posee infinitas soluciones. Si se despeja una variable:

$$z = x + 2y - 1 \quad \Rightarrow \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + 2y - 1 \right\}$$

Cada una de esas soluciones se puede representar gráficamente con un punto del espacio y serán todas de un mismo plano (coplanares).
(Analizar casos con uno o más coeficientes nulos)

Ecuaciones lineales

Definición

Una ecuación lineal en n variables, $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, es una ecuación de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b,$$

donde los coeficientes $a_i, i = 1, \cdots, n$, son números reales.

Las soluciones que este tipo de ecuaciones puedan tener, se presentan en forma ordenada (por la variable a que pertenezcan), en una n-upla ordenada de números reales: $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, que se corresponde con una única matriz columna y con una única matriz fila:

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \sim \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{bmatrix}.$$

Se designan, en general con letras minúsculas: $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

EJEMPLOS

Ejemplo

- $3x + 2y = 7$ ✓
- $\frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$ ✓
- $3xy + \cos y = 7$ ✗
- $e^x - 2z = 7$ ✗
- $sen(\frac{\pi}{2})x_1 - 4x_2 + 10x_3 - e^2 x_4 = 4$ ✓

Observación: En base a lo que definimos en las últimas diapositivas de MATRICES, una ecuación lineal siempre puede reescribirse como una *combinación lineal de números reales* (variables) *con coeficientes reales* igualada a un número real.

Solución de una ecuación lineal

Definición

Una solución de una ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ es

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

de modo que al reemplazar cada x_i por s_i se satisface la ecuación.
El conjunto de todas las soluciones de la ecuación se denomina conjunto solución o, algunas veces, solución general de la ecuación.

Ejemplo

Una solución de la ecuación $3x + 2y = 7$ es $s = (1, 2)$ ya que

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7$$

Mientras que $S = \left\{ \left(t, \frac{7}{2} - \frac{3}{2}t\right) : t \in \mathbb{R} \right\}$ es el conjunto solución de la ecuación.

Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL)

Definición

Un conjunto de m ecuaciones lineales con n variables se denomina sistema de ecuaciones lineales (SEL) que escribiremos de la forma

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Las variables en una ecuación lineal, algunas veces se denominan incógnitas.

Observaciones:

- La notación con doble subíndice indica que a_{ij} es el coeficiente de x_j en la $i-$ésima ecuación.
- Si el SEL tiene m ecuaciones y n incógnitas o variables, se dice simplemente que el SEL es $m \times n$.

Expresión matricial de un SEL

Dado un SEL de m ecuaciones con n incógnitas, siempre es posible expresarlo como una ecuación matricial:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\begin{bmatrix} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Expresión matricial de un SEL

Dado un SEL de m ecuaciones con n incógnitas, siempre es posible expresarlo como una ecuación matricial:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A_{m\times n} \quad \cdot \quad \mathbf{X}_{n\times 1} = \mathbf{B}_{m\times 1}$$

Expresión matricial de un SEL

Notación:

- A : matriz de orden $m \times n$, m como la cantidad de ecuaciones del SEL; n como la cantidad de incógnitas del SEL. Llamada matriz de coeficientes.
- $\mathbf{x}$ ó $\mathbf{X}$: vector de $\mathbb{R}^n$ o matriz columna de orden $n \times 1$, con tantas filas como incógnitas tenga el sistema. Llamada matriz de incógnitas.
- $\mathbf{b}$ ó $\mathbf{B}$: vector $\mathbb{R}^m$ o matriz columna de orden $m \times 1$, con tantas filas como ecuaciones tenga el sistema. Llamada matriz de términos independientes.
- En virtud de las consideraciones anteriores, un SEL se anotará indistintamente como:

$$A \cdot X = B \quad \sim \quad A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Importante: Aunque se use la doble notación, claramente las operaciones son las definidas entre matrices.

Soluciones de un SEL

Definición

Una solución de un sistema de ecuaciones lineales es una n-upla ordenada de números

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

de modo que al reemplazar cada x_i por s_i se satisface cada una de las ecuaciones del sistema.
El conjunto de todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales se denomina conjunto solución.

Clasificación de SEL según su solución

Definición

- Un SEL se denomina **compatible** si tiene por lo menos una solución.
  - Si sólo tiene una solución, se llama **compatible determinado**.
  - Si tiene infinitas soluciones, se llama **compatible indeterminado**.
- Un SEL se denomina **incompatible** si no tiene solución.

Observaciones:

- En la bibliografía también aparece consistente como sinónimo de compatible e inconsistente como sinónimo de incompatible.
- El grado de indeterminación o grados de libertad de un SEL $n \times m$ que sea compatible indeterminado, es el número de variables libres de dicho sistema y se calcula como $g = n - \rho(A)$,

Clasificación de SEL según las matrices que lo componen

- Si $m = n$, el SEL se denomina **cuadrado**.
- Si $B = O$, es decir, B es la matriz nula (todos los términos independientes del sistema son ceros), o bien, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, el SEL se denomina **homogéneo**.

Ejemplo

1. $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ -4x - 2y = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ x + 7y = 0 \end{cases}$

Propiedad

Sea $A \cdot X = O$ un sistema homogéneo de m ecuaciones y con n incógnitas. Entonces dicho sistema es compatible.

Observación: Recuerde que O designa a la matriz de orden $m \times 1$. Además, por abuso de notación, se suele escribir como vector $\mathbf{0}$.

Propiedades de SEL

Propiedad

Un sistema de ecuaciones lineales sólo hace verdadera una de las siguientes afirmaciones:

1. *El SEL es compatible determinado.*
2. *El SEL es compatible indeterminado.*
3. *El SEL es incompatible.*

Propiedades de SEL

Teorema

Sean $A \cdot X = B$ y $C \cdot X = D$ dos sistemas lineales $m \times n$.
Si las matrices ampliadas $[A|B]$ y $[C|D]$ de estos sistemas son equivalentes por filas, ambos sistemas lineales tienen exactamente las mismas soluciones.

Demostrar

Ejemplo

Verificar el enunciado del teorema anterior con:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

y su (única) solución $\overline{\mathbf{x}} = (2, 1)$, con

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Propiedades de SEL

Teorema

Sea $A \cdot X = B$ un sistema de ecuaciones lineales.
Si A es una matriz inversible (o no singular) entonces el sistema $A \cdot X = B$ es compatible determinado (cualquiera sea B).

Demostrar.

Es válido el enunciado recíproco?

Ejemplo

Dar la solución de $A \cdot X = B$, con $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Corolario

Sea $A \cdot X = O$ un sistema de ecuaciones lineales homogéneo.
Si A es una matriz inversible (o no singular) entonces el sistema $A \cdot X = O$ es compatible determinado.

Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

1. Método de eliminación de Gauss
2. Método de eliminación de Gauss-Jordan

Ejemplo

$$\begin{cases} x - 2y + z = 9 \\ -x + 3y = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right] \sim \underbrace{\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{Gauss} \sim \underbrace{\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{Gauss-Jordan}$$

Este sistema tiene una única solución: $S = \left\{ \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Sea $A \cdot X = B$ un SEL de orden n tal que $\det(A) \neq 0$ entonces X tiene como entradas:

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{\det(A)}, \qquad x_2 = \frac{det(A_2)}{\det(A)}, \qquad \ldots \qquad x_n = \frac{det(A_n)}{\det(A)},$$

donde A_j para cada $j = 1, \ldots, n$, está definida como la matriz que se obtiene de sustituir en A, la j-ésima columna por B:

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & b_i & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorema de Ruoché - Frobenius

Teorema

Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales $m \times n$ y sea $A|B$ la matriz ampliada del sistema de orden $m \times (n+1)$. Entonces

I. *Si $\rho(A) = \rho(A|B) = n$, el SEL es compatible determinado.*

II. *Si $\rho(A) = \rho(A|B) < n$, el SEL es compatible indeterminado.*

III. *Si $\rho(A) < \rho(A|B)$, el SEL es incompatible o inconsistente.*

Ejemplo

1. $$\begin{cases} y + z - 2w = 3 \\ x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + 4y - 2z - 3w = -2 \\ x - 4y - 7z - w = -19 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x - 2y + z = 9 \\ -x + 3y = -4 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ x + z = 6 \\ 2x - 3y + 5z = 4 \end{cases}$$

Condiciones equivalentes para A de orden n

Teorema

Sea A una matriz de orden n. Son equivalentes:

1. *A es inversible (o no singular).*
2. *La forma escalonada reducida de A es la I_n.*
3. $\det(A) \neq 0$.
4. *El rango de A es n.*
5. $AX = B$ *es un SEL compatible determinado para toda matriz B, $n \times 1$, con solución única $X = A^{-1}B$.*
6. $AX = O$ *es un SEL compatible determinado con solución única $X = O$ (solución trivial).*

Características inigualables de un sistema homogéneo

Teorema

Sea S el conjunto solución de un sistema homogéneo $m \times n$. Entonces las matrices columna de S, que son de orden $n \times 1$, verifican que:

a. $O_{n\times 1} \in S$

b. *Si X_1 y X_2 están en S, también lo está $X_1 + X_2$.*

c. *Si X_1 está en S, también $c\,X_1 \in S$, cualquiera sea $c \in \mathbb{R}$.*

Observación: Una forma equivalente de enunciar el teorema anterior es:

Sea S el conjunto solución de un sistema homogéneo $m \times n$. Entonces las matrices columna de S, que son de orden $n \times 1$, verifican que:

a. $O_{n\times 1} \in S$

b. Si X_1 y X_2 están en S, también lo está $c_1X_1 + c_2X_2$, cualesquiera sean c_1, c_2 en $\mathbb{R}$.

Demostrar