Análisis Matemático I
Clase 11: Concavidad y trazado de gráficas.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2025

Información del Parcial 1: lunes 21 de Abril

Contenidos:

1. En teoría, desde Clase 1 hasta Clase 11 sin incluir tasas relacionadas. No se toman demostraciones, pero sí definiciones y teoremas.
2. En práctica, TP1 Y TP2 completos.
3. Los ejercicios del parcial serán del mismo nivel y dificultad que los de los trabajos prácticos.

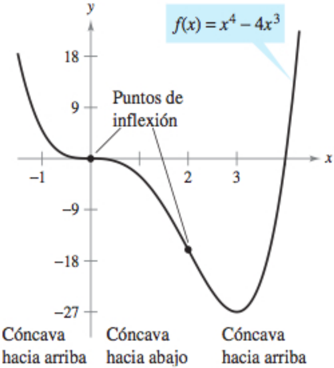
Indicaciones:

- No se permite uso de calculadora ni de celular.
- Se rinde en el turno correspondiente (turno mañana de 9 a 10:45 y turno tarde de 17 a 18:45).
- Aulas: ingresantes de Mecatrónica en el Anfiteatro Oeste, los ingresantes de Civil y Petróleo en el aula 17. Recursantes del turno mañana, en aula 17. El turno tarde se dirige a las aulas en las que cursa normalmente los lunes por la tarde.
- Si es posible, llegar unos minutos antes al aula indicada y ubicarse.

Punto de inflexión

Punto de inflexión

Sea f una función continua en (a, b) y sea c un punto de ese intervalo. Decimos que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de f si es posible trazar la recta tangente al gráfico de f en el punto $(c, f(c))$, y si la gráfica de f cambia de concavidad en $(c, f(c))$.



Punto de inflexión

El siguiente teorema nos dice dónde se deben buscar los puntos de inflexión:

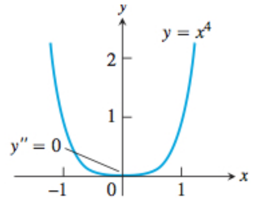
Teorema

En un punto de inflexión $(c, f(c))$, o bien $f''(c)$ no existe, o bien $f''(c) = 0$.

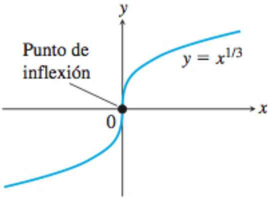
PRECAUCIÓN: NO SIEMPRE QUE $f''(c) = 0$, TENEMOS UN PUNTO DE INFLEXIÓN. TAMBIÉN, NO SIEMPRE QUE $f''(c)$ NO EXISTA HAY UN PUNTO DE INFLEXIÓN. Ver ejemplos en las próximas dos diapositivas.

Punto de inflexión

- **Un ejemplo donde $f''(0) = 0$ pero $(0, f(0))$ no es punto de inflexión.**

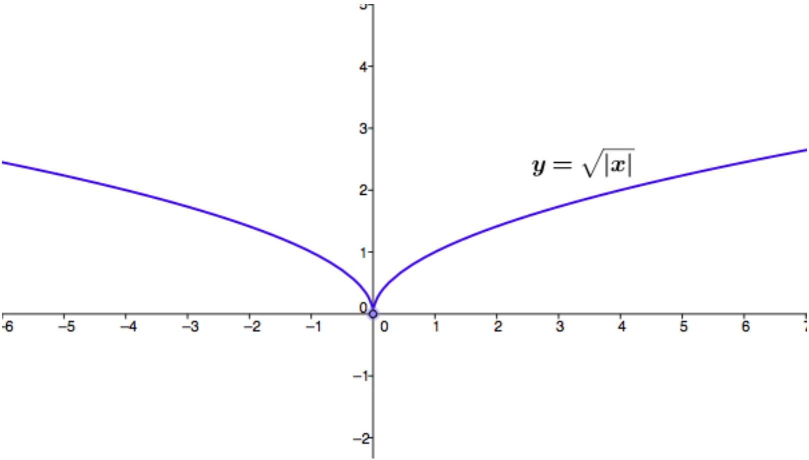


- **Un ejemplo donde $f''(0)$ no existe y $(0, f(0))$ es punto de inflexión.**



Puntos de inflexión

· **Un ejemplo donde $f''(0)$ no existe y $(0, f(0))$ no es punto de inflexión.**



Puntos de inflexión

Ejemplo: $f(x) = x^{5/3}$. Entonces:

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} \text{ y } f''(x) = \frac{10}{9}x^{-1/3}.$$

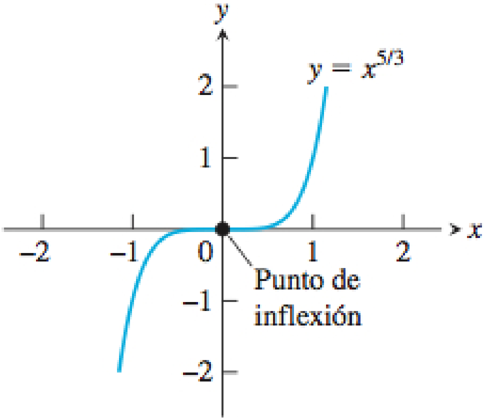
Observar que f'' no existe en $x = 0$. **No hay puntos donde f'' sea cero**. Así, $(0, f(0))$ es candidato a ser punto de inflexión. Observar que:

$$f''(x) < 0 \text{ cuando } x < 0 \rightarrow \ f \text{ es cóncava hacia abajo en } (-\infty, 0).$$

$$f''(x) > 0 \text{ cuando } x > 0 \rightarrow \ f \text{ es cóncava hacia arriba en } (0, +\infty).$$

Hay cambio de concavidad en $(0, f(0))$ y además, es posible trazar la recta tangente en ese punto ya que $f'(0) = 0$. **Luego, $(0, f(0))$ es un punto de inflexión.**

Puntos de inflexión



Resumen:

- **Límites:** permiten determinar:
  - Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
  - Regiones donde la función es continua.
  - Discontinuidades y el tipo de discontinuidad.
- **Primera derivada:** permite determinar:
  - regiones donde la función crece y/o decrece.
  - máximos o mínimos locales de la función.
- **Segunda derivada:** permite detectar:
  - Concavidad hacia arriba o hacia abajo.
  - Puntos de inflexión.
  - máximos y mínimos locales.

Trazado de gráficas de funciones

Procedimiento para trazar la gráfica de una función $y = f(x)$:

1. Determine el dominio de f, si f es par o impar, y las intersecciones con los ejes coordenados.
2. Determine las asíntotas de la función (verticales, horizontales y oblicuas).
3. Encuentre las discontinuidades de f y clasifíquelas.
4. Calcule la derivada primera.
5. Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
6. Usando la información anterior, determine dónde f tiene máximos o mínimos locales.
7. Encuentre la derivada segunda.
8. Determine dónde $f'' = 0$ y dónde f'' no existe, y localice los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo.
9. Localice los puntos de inflexión de f.
10. Esboce la gráfica de f.

Trazado de gráficas de funciones

Ejemplo: aplique el procedimiento anterior para trazar la gráfica de:

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9}.$$

Análisis:

- **Dominio:** f no está definida en los x tales que:

  $$x^2 - 9 = 0.$$

  Luego:

  $$D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}.$$

- **Simetría:** Observar que f es par:

  $$f(-x) = \frac{2((-x)^2 - 4)}{(-x)^2 - 9} = f(x).$$

- **•Intersecciones con los ejes coordenados:** con el eje x:

$$\frac{2(x^2-4)}{x^2-9} = 0,$$

así:

$$x = 2, \qquad x = -2.$$

Intersecciones con el eje x: $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.
Con el eje y: ponemos $x = 0$ y obtenemos:

$$y = \frac{8}{9}.$$

Así: la intersección con el eje y es: $(0, 8/9)$.

- **Asíntotas Horizontales:**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2(x^2-4)}{x^2-9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{8}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2}} = 2.$$

- **Asíntotas Horizontales:**
  Así, $y = 2$ es una asíntota horizontal. De forma similar:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = 2.$$

- **Asíntota vertical:** el denominador se anula en $x = 3$ y en $x = -3$. Analizamos el comportamiento de f en ambos puntos.

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = \infty.$$

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = \infty, \qquad \lim_{x \to -3^+} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = -\infty.$$

  Así, $x = 3$ y $x = -3$ son asíntotas verticales de f.

- **Discontinuidades de f:** la función es discontinua en $x = -3$ y en $x = 3$, y presenta, en ambos casos, discontinuidades esenciales.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** calculamos f':

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-9) - 2(x^2-4)2x}{(x^2-9)^2} = \frac{-20x}{(x^2-9)^2}.$$

Punto crítico de f: en $x = 0$. Además incorporamos $x = 3$ y $x = -3$ por ser puntos de discontinuidad de f. Obtenemos cuatro intervalos a analizar:

$$(-\infty, -3),\ (-3, 0),\ (0, 3),\ (3, \infty).$$

Analizamos el signo de f' en cada subintervalo:

Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
punto muestra	-4	-1	1	4
signo de f'	$+$	$+$	-	-
conclusión	creciente	creciente	decreciente	decreciente

- **Extremos relativos de f:** en base a la tabla, f tiene un máximo local en $x = 0$.
- **Intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo:** determinamos la deriva segunda:

$$f''(x) = \frac{-20(x^2-9)^2 - (-20x)(2(x^2-9)2x)}{(x^2-9)^4} = \frac{60x^2+180}{(x^2-9)^3}.$$

Observar que f'' no existe en $x = -3$ y $x = 3$. No hay puntos donde f'' sea cero. Luego, los intervalos a analizar son:

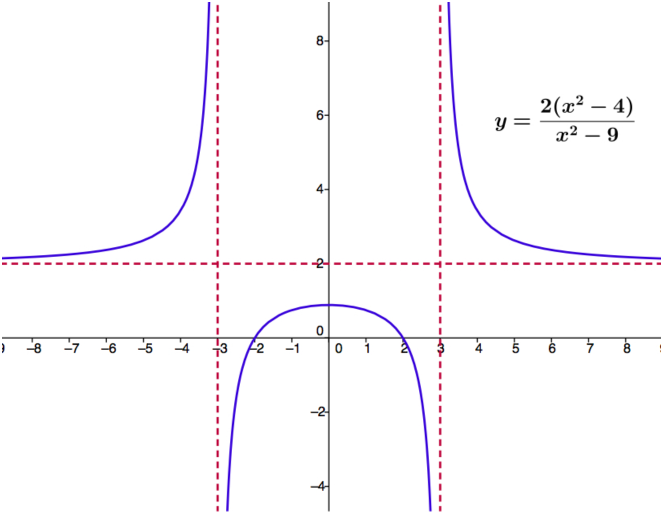
$$(-\infty, -3),\ (-3, 3),\ (3, \infty).$$

- **Intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo:** obtenemos la siguiente tabla:

Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, \infty)$
punto muestra	-4	0	4
signo de f''	$+$	-	$+$
conclusión	cónc. arriba	conc. abajo	conc. arriba

- **Puntos de inflexión:** basados en la tabla anterior,los canditados a ser puntos de inflexión son $(-3, f(-3))$ y $(3, f(3))$. Sin embargo, como f no está definida en -3 y en 3, concluimos que no hay puntos de inflexión.
- **Graficar**.

Trazado de gráficas de funciones



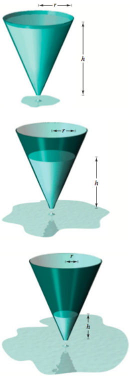
Tasas Relacionadas

Interpretación de la derivada: introducción a tasas relacionadas

Hasta ahora, hemos obtenido la tasa de cambio instantánea de una función con respecto a la variable independiente.
En Tasas Relacionadas, vamos a determinar la variación de una función cuando se conoce la variación o tasa de cambio de otra o de otras funciones que se encuentran relacionadas con ella.
Esto quedará más claro con los ejemplos siguientes.

Tasas relacionadas

Problema: Suponga que se está drenando un tanque cónico:



Determine la relación entre la tasa de cambio instantánea del volumen V, la tasa de cambio instantánea de la altura h y la tasa de cambio instantánea del radio r con respecto al tiempo.

Tasas relacionadas

Solución: supongamos que:

- El volumen es una función del tiempo: $V = V(t)$.
- La altura es función del tiempo: $h = h(t)$.
- El radio es una función del tiempo: $r = r(t)$.

Tasas relacionadas

Solución: supongamos que:

- El volumen es una función del tiempo: $V = V(t)$.
- La altura es función del tiempo: $h = h(t)$.
- El radio es una función del tiempo: $r = r(t)$.

Buscamos una relación entre: $V'(t)$, $r'(t)$ y $h'(t)$.

Solución: supongamos que:

- El volumen es una función del tiempo: $V = V(t)$.
- La altura es función del tiempo: $h = h(t)$.
- El radio es una función del tiempo: $r = r(t)$.

Buscamos una relación entre: $V'(t)$, $r'(t)$ y $h'(t)$.

Para establecer la relación entre las tasas instantáneas, primero establecemos la relación entre las variables V, h y r:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

Derivamos ambos miembros de esta ecuación con respecto a t:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \frac{\pi}{3}\frac{d}{dt}(r^2 h)(t) = \frac{\pi}{3}\left(2r(t)r'(t)h(t) + r^2(t)h'(t)\right)$$

Así, la relación entre las tasas instantáneas es:

$$V'(t) = \frac{\pi}{3}\left(2r(t)r'(t)h(t) + r^2(t)h'(t)\right).$$

Estatregia para resolver problemas de tasas relacionadas

En los próximos ejemplos aplicaremos la siguiente estrategia:

1. Elabore un dibujo y dé nombre a las variables y constantes de interés. Generalmente, las variables dependen de t (tiempo).
2. Determine la relación entre las variables de interés (utilice información geométrica, física, etc.) y escriba la fórmula correspondiente que vincule a las variables.
3. Derive la expresión anterior con respecto a t, utilizando reglas de derivación.
4. Despeje la tasa de cambio que desea encontrar en términos de las demás cantidades.
5. Utilice la información suministrada para calcular la tasa de cambio pedida.

Tasas relacionadas

Problema: Supongamos que el nivel del líquido en el tanque cónico del problema anterior disminuye a una tasa de $-0.2cm/min$ y que el radio está cambiando a una tasa de $-0.1cm/min$. Determine la tasa instantánea de cambio del volumen del líquido cuando $h = 0.5cm$ y $r = 0.1cm$.

Problema: Supongamos que se vierte agua en un depósito cónico a una tasa de $9cm^3/min$. Supongamos que la altura del depósito es $90cm$ y que el radio es de $40cm$. Determine la tasa de cambio instantánea del nivel del líquido cuando el nivel es de $10cm$.