1. Teorema SEL

Teorema 1.1

Sean $A \cdot X = B$ y $C \cdot X = D$ dos sistemas lineales $m \times n$.
Si las matrices ampliadas $[A|B]$ y $[C|D]$ de estos sistemas son equivalentes por filas, ambos sistemas lineales tienen exactamente las mismas soluciones.

Demostración: Consideremos una solución cualquiera del sistema $AX = B$, que llamamos $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$.
Si $[A|B] \sim [C|D]$ quiere decir que existen r matrices elementales tales que:

$$E_r \cdot E_{r-1} \cdot \ldots \cdot E_1[A|B] = [C|D]$$

Ahora, ¿qué efecto tienen las operaciones elementales de cada pre multiplicación por la matriz elemental en la/las ecuaciones del sistema (recuerde que no todas las filas se verán alteradas por una pre multiplicación)?, ¿afectan a una solución del sistema $\overline{\mathbf{x}}$?

- *Intercambio de filas*: la solución $\overline{\mathbf{x}}$ del sistema, es solución de cada una de las ecuaciones que lo forman. Luego, si esta operación elemental no modifica las ecuaciones, por lo tanto, tampoco modifica sus soluciones.

- *Multiplicación de una fila por un escalar no nulo*: Si la i-ésima ecuación del sistema se multiplica por $c \neq 0$ en ambos miembros, cualquier solución del sistema lo sigue siendo, ya que si se verifica esta igualdad:

  $$a_{i1}\overline{x}_1 + a_{i2}\overline{x}_2 + \ldots + a_{in}\overline{x}_n = b_i$$

  También se verifica:

  $$c(a_{i1}\overline{x}_1 + a_{i2}\overline{x}_2 + \ldots + a_{in}\overline{x}_n) = c\, b_i$$

  O, equivalentemente:

  $$(c\, a_{i1})\overline{x}_1 + (c\, a_{i2})\overline{x}_2 + \ldots + (c\, a_{in})\overline{x}_n = c\, b_i,$$

  que es la ecuación que se obtendría al multiplicar una fila de la matriz ampliada por una constante no nula c. Si las igualdades no se modifican entonces $\overline{\mathbf{x}}$ es solución de ambas ecuaciones.

- *Sumar a una ecuación un múltiplo de otra:* supongamos que a la j-ésima ecuación le sumamos c veces la i-ésima y, por ser solución del sistema, $\overline{\mathbf{x}}$ verifica las dos igualdades (teniendo en cuenta el resultado del item anterior). Entonces se cumple que:

  $$a_{j1}\overline{x}_1 + a_{j2}\overline{x}_2 + \ldots + a_{jn}\overline{x}_n = b_j$$

  $$(c\, a_{i1})\overline{x}_1 + (c\, a_{i2})\overline{x}_2 + \ldots + (c\, a_{in})\overline{x}_n = c\, b_i,$$

  Sumando miembro a miembro estas igualdades y reordenando los coeficientes:

  $$(a_{j1} + c\, a_{i1})\overline{x}_1 + (a_{j2} + c\, a_{i2})\overline{x}_2 + \ldots + (a_{jn} + c\, a_{in})\overline{x}_n = b_j + c\, b_i.$$

  Es decir que $\overline{\mathbf{x}}$ sigue siendo solución de la nueva ecuación del sistema.

Por lo tanto, cualquiera sea la operación elemental entre filas de la matriz que E produzca, y su correspondiente operación elemental entre las ecuaciones del SEL correspondiente, no se alteran las soluciones de dicho sistema.
Luego si $\overline{\mathbf{x}}$ es solución de $AX = B$ entonces también es solución de $CX = D$ ∎