Análisis Matemático I
Clase 12: Linealización y diferenciales.

Pablo D. Ochoa

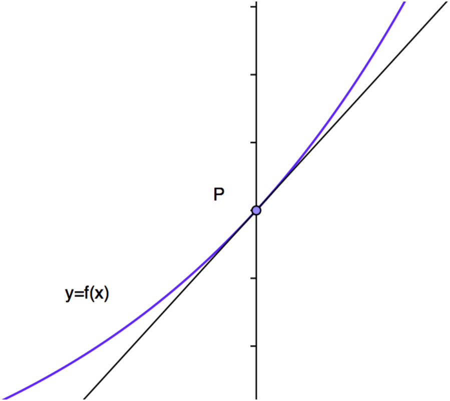
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2025

Aproximación de funciones mediante polinomios de grado 1

Linealización

Si realizamos un acercamiento al punto P, obtenemos la imagen:



Así, cerca del punto de tangencia, las gráficas de la función y de la recta tangente se vuelven indistinguibles. Esto implica que es posible utilizar la ecuación de la recta tangente para obtener buenas aproximaciones de la función f.

Linealización

Defínción de Linealización

Sea f una función derivable en $x = a$. Definimos la linealización de f en a como la función:

$$L(x) = f'(a)(x - a) + f(a).$$

En general, cerca del punto a, la linealización es una *buena* aproximación de la función f.

Ejemplo: determine la linealización de:

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

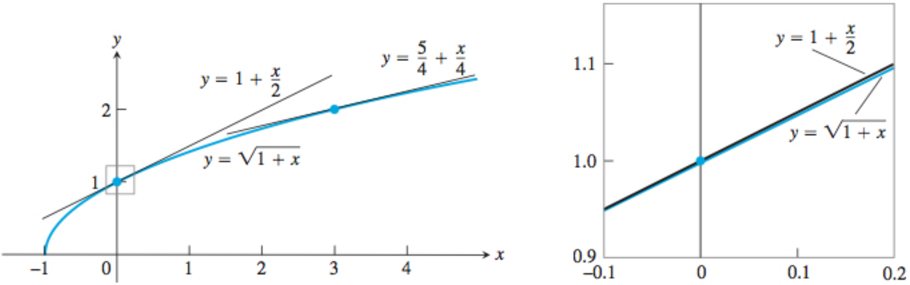
en el punto $x = 0$.
Solución:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}.$$

Además, $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1/2$. Luego la linealización de f en $x = 0$ es:

$$L(x) = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{2}x + 1.$$

Linealización



Linealización

La linealización de una función en un punto $x = a$ se puede utilizar para aproximar los valores de la función cerca del punto a:

Aproximación	Valor verdadero	$\lvert$Valor verdadero − aproximación$\rvert$
$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10$	1.095445	$<10^{-2}$
$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$	1.024695	$<10^{-3}$
$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250$	1.002497	$<10^{-5}$

En las próximas diapositivas vamos a estudiar más profundamente la aproximación que brinda la linealización a la función.

Diferenciales

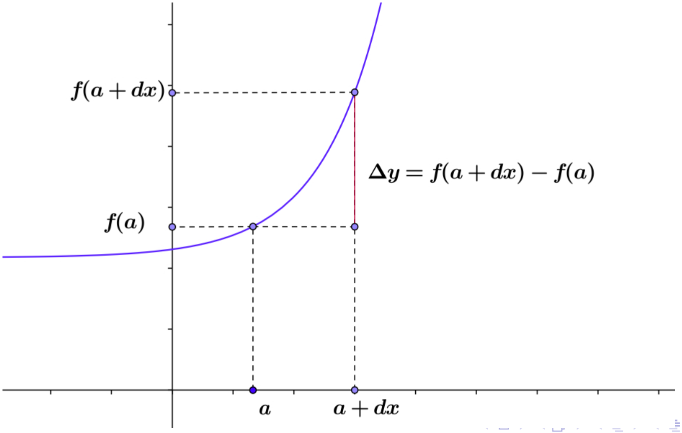
El concepto de Differencial que veremos en esta clase tiene distintos usos en Ingeniería y en Computación:

- En mediciones e instrumentos de ingeniería, se usan derivadas y diferenciales para estudiar cómo pequeños errores en las mediciones de las variables afectan el resultado final del sistema.
- En sistemas de control o en el diseño de circuitos electrónicos, si tienes una pequeña variación en la entrada, puedes calcular el cambio correspondiente en la salida utilizando diferenciales.
- Si un ingeniero está optimizando un proceso de fabricación, puede usar el diferencial para modelar cómo pequeños cambios en las condiciones del proceso (temperatura, presión, velocidad de reacción) afectan el rendimiento o el costo del proceso.
- En análisis de algoritmos, el cálculo de derivadas y el uso del diferencial puede ayudar a entender cómo cambia la complejidad temporal o espacial de un algoritmo cuando el tamaño de la entrada cambia.

Diferenciales

Sea $y = f(x)$ una función derivable en $x = a$. Cuando nos movemos de $x = a$ al punto $x = a + dx$, la función experimenta un cambio dado por:

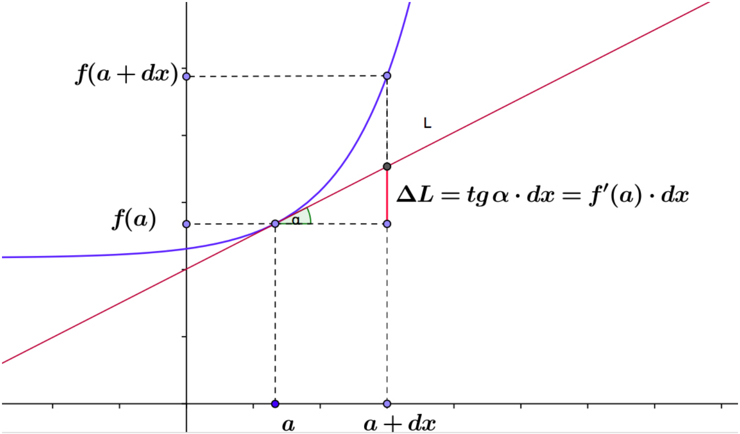
$$\Delta y = f(a + dx) - f(a).$$



Diferenciales

Por otro lado, el cambio en la recta tangente L está dado por:

$$\Delta L = f'(a)dx$$



Diferenciales

Dado que la recta L representa una aproximación de f para valores cercanos a $x = a$ tenemos:

$$\Delta y \approx \Delta L.$$

Es decir:

$$f(a + dx) - f(a) \approx f'(a)dx \text{ o: } f(a + dx) \approx f(a) + f'(a)dx.$$

Definición de Diferencial

La expresión:

$$\Delta L = f'(a)dx.$$

recibe el nombre de Diferencial de f en a y se simboliza por df o dy:

$$dy = f'(a)dx.$$

Así, el diferencial de f en $x = a$ es el cambio que experimenta la recta tangente a $(a, f(a))$ cuando x pasa de a a $a + dx$.

Diferenciales

Ejemplo: supongamos que un disco metálico de radio $r = 10cm$ se somete a una fuente de calor y se dilata uniformemente hasta alcanzar un radio de $r = 10.1cm$. Utilizando diferenciales estime el cambio en el área del disco y compárelo al cambio real.

Diferenciales

Ejemplo: supongamos que un disco metálico de radio $r = 10cm$ se somete a una fuente de calor y se dilata uniformemente hasta alcanzar un radio de $r = 10.1cm$. Utilizando diferenciales estime el cambio en el área del disco y compárelo al cambio real.

Ejemplo: la función área en términos del radio del disco es:

$$A(r) = \pi r^2.$$

Queremos estimar el cambio del área cuando r pasa de 10 cm a 10.1 cm. Entonces el cambio en la variable independiente, que llamaremos dr es:

$$dr = 10.1 - 10 = 0.1\,\mathrm{cm}.$$

Luego, una aproximación del cambio en el área es:

$$\Delta A = A(10.1) - A(10) \approx dA = A'(10)dr = 2\pi.10\,cm.0.1\,cm = 2\pi\,cm^2.$$

Ahora el cambio real es:

$$A(10.1) - A(10) = 2.01\pi\,cm^2.$$

Cuando nos movemos de a a $a + dx$, es posible describir el cambio en f de tres maneras:

	Real	**Estimado**
Cambio absoluto	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a)\,dx$
Cambio relativo	$\dfrac{\Delta f}{f(a)}$	$\dfrac{df}{f(a)}$
Cambio porcentual	$\dfrac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\dfrac{df}{f(a)} \times 100$

En diversas asignaturas de las carreras profundizará el uso de estas cantidades.

Sensibilidad al cambio

Suponemos en lo que sigue que $dx > 0$.
Recordando:

$$\Delta f = f(a + dx) - f(a) \approx df = f'(a)dx,$$

se observa que la aproximación df al cambio real de f (es decir, Δf) se verá influenciada no sólo por el cambio en x (es decir, dx), sino también por $f'(a)$.
Así, cuanto mayor sea el valor de $f'(a)$, mayor será el efecto en la estimación de Δf de un cambio dado por un mismo dx.

Ejemplo: Suponga que necesita calcular la profundidad de un pozo de agua a partir de la ecuación $s(t) = 16t^2$, midiendo el tiempo que tarda en caer una roca al agua. ¿Qué tan sensibles serán sus cálculos a un error de 0.1 s. en la medición del tiempo?

Ejemplo: Suponga que necesita calcular la profundidad de un pozo de agua a partir de la ecuación $s(t) = 16t^2$, midiendo el tiempo que tarda en caer una roca al agua. ¿Qué tan sensibles serán sus cálculos a un error de 0.1 s. en la medición del tiempo?

Solución. Calculamos primero el diferencial de s:

$$ds = 32.t.dt.$$

Si se comete un error de 0.1 s en la medición del tiempo entonces la variación en la medición de la profundidad se aproxima como sigue:

$$\Delta s = s(t + 0.1) - s(t) \approx ds = 3.2t.$$

Es decir, el error cometido en la medición de la profundidad es aproximadamente

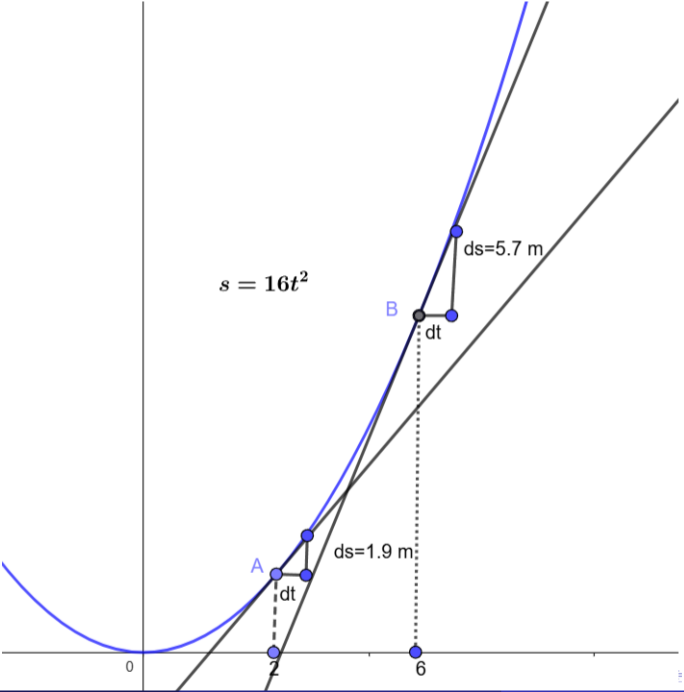
$$3.2t.$$

Este error aumenta con t, es decir, es más sensible a mayores valores de t que a menores valores (para el mismo $dt = 0.1$).

De hecho, si $t = 2$ s, entonces el error en la medición de la profundidad es aproximadamente:

$$ds = 6.4\text{pies} \approx 1.9\, m.$$

Si ahora $t = 6$ s, entonces: $ds = 19.2\text{pies} \approx 5.7\, m$.



$s = 16t^2$
B
ds=5.7 m
dt
A
ds=1.9 m
dt
0
2
6