3.1 TRANSFORMACIONES LINEALES

INGENIERÍA Y LCC

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
FACULTAD DE INGENIERÍA

RECORRIDO

- **Transformaciones lineales**
  - **Transformaciones lineales**
  - **Algunas transformación lineales especiales: nula, identidad, matricial**
  - **Propiedades de las transformaciones lineales**
- **Núcleo e Imagen de una transformación lineal**
  - **Propiedades del conjunto núcleo y del conjunto Imagen**
  - **Teorema de la dimensión**

TRANSFORMACIONES LINEALES

Definición

Sean V y W espacios vectoriales definidos sobre el mismo cuerpo de escalares. La función T, definida del espacio vectorial V en el espacio vectorial W, es una transformación lineal de V en W si satisface las dos condiciones siguientes:

1. $T(u+v)=T(u)+T(v)$, para todo u y v vectores de V;
2. $T(k\cdot u)=k\cdot T(u)$, para todo u de V, k real

Observar que las transformaciones lineales *preservan las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar*.

Definición

Importante: las condiciones dadas en 1 y en 2 para la determinación de si una función es una transformación lineal, pueden expresarse en una única condición, como sigue:

$$\underbrace{T(k_1u+k_2v)}_{\substack{CL\,en\,V\\(dominio)}}=\underbrace{k_1T(u)+k_2T(v)}_{\substack{CL\,en\,W\\(codominio)}}$$

Para todo u y v vectores de V, k_1 y k_2 reales.

Una transformación lineal definida de un espacio vectorial V en el mismo V, se denomina *operador lineal.*

¿Qué ejemplo de operador lineal puedes mencionar?

TRANSFORMACIONES LINEALES

Ejemplo

La función $T : IR^2 \rightarrow IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ ¿es una transformación lineal? Interpreta geométricamente

Ejemplo

Comprobar que la siguiente función es una transformación lineal:

$$T\colon\ \mathbb{R}^2 \rightarrow M_{3\times3} \quad / \quad \mathrm{T}\binom{a}{b} = \begin{bmatrix} a & a+b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplos

La función $T: IR^2 \to IR^3$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x \\ -y \\ x-y \end{pmatrix}$ es una transformación lineal

La función de M_{2x2} en M_{2x2} definida como
$T: M_{2x2} \to M_{2x2}$ tal que
$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c+d \end{bmatrix}$ es una transformación lineal

La función $T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+3 \\ y \end{pmatrix}$ no es transformación lineal.

ALGUNAS TRANSFORMACIONES LINEALES ESPECIALES

Transformación lineal cero o nula

Es de la forma

$$T : V \to W \text{ tal que}$$
$$T(v) = 0$$

Un ejemplo de operador lineal nulo definido en IR^2 es $T : IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Operador lineal identidad

Es de la forma

$$Id : V \to V \text{ tal que}$$
$$Id(v) = v$$

Ejemplo:

$$Id : IR^{2x2} \to IR^{2x2} \text{ tal que } T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ALGUNAS TRANSFORMACIONES LINEALES ESPECIALES

Transformación lineal matricial o transformación lineal definida mediante una matriz

Es de la forma

$$T : IR^n \to IR^m \text{ tal que}$$

$$T\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}\right) = A_{mxn} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_m \end{pmatrix}, \text{ siendo } A \text{ una matriz fija de orden } mxn$$

Importante: observar que toda matriz mxn determina una aplicación lineal de IR^n en IR^m y recíprocamente.

ALGUNAS TRANSFORMACIONES LINEALES ESPECIALES

Ejemplo de una transformación lineal matricial

La función definida por

$T: IR^2 \to IR^3$ la función definida por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Propiedad

Propiedad 1: Sea T una transformación lineal de V en W entonces $T(0) = 0$.

Propiedad 2: Sea T una transformación lineal de V en W y v un vector de V entonces $T(-v) = -T(v)$.

Propiedad 3: Sea T una transformación lineal de V en W, u y v vectores de V entonces

$$T(u - v) = T(u) - T(v).$$

Demostrar

Para pensar

a. ¿Cuál es la afirmación recíproca de la propiedad 1?. Determine su valor de verdad.

b. ¿Cuál es la afirmación contrarrecíproca de la propiedad 1?. Determine su valor de verdad.

Teorema

Sea T una transformación lineal definida de un espacio vectorial V en otro W. Sea $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ una base de V y sea $\{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_k\}$ un subconjunto de vectores arbitrarios de W, donde los w_i no son necesariamente distintos. Entonces existe y es única la transformación T, tal que $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$, $T(v_3) = w_3$, ..., $T(v_n) = w_k$.

En otras palabras, siempre es posible encontrar una transformación lineal que transforme los vectores de una base de V, previamente determinados, en vectores de W. De modo que una transformación lineal T de un espacio V en otro W queda completamente determinada por su acción sobre una base de V.

Ejemplo de aplicación del teorema

Sea T de IR^2 en IR^2 tal que $T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ y $T\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

a. Hallar $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$.

b. Encontrar $T\left(\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right)$.

NÚCLEO E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Núcleo de una transformación lineal

Definición

Sea T una transformación lineal del espacio V en el espacio W. El núcleo de una transformación lineal es un subconjunto de V definido como sigue:

$$N(T) = \{v \in V / T(v) = 0\}$$

En particular, el núcleo de la transformación lineal matricial, se define como:

$$N(T) = \{X \in R^n / A \cdot X = O\}$$

Ejemplos

1. Al considerar la transformación lineal nula definida de V en V, es sencillo concluir que su núcleo es el mismo espacio V.

2. Sea la transformación lineal $T : IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$

Obtención del N(T): $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in N(T) \Leftrightarrow T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Luego se tiene $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Por lo que es sencillo concluir que el núcleo de T es el conjunto

$$N(T) = \{(0, k), k \in IR\}$$

Imagen de una transformación lineal

Definición

Sea T una transformación lineal del espacio V en el espacio W. El conjunto imagen de una transformación lineal se simboliza Im(T) y se define

$$\operatorname{Im}(T) = \{ w \in W \,/\, \exists v \in V \wedge T(v) = w \}$$

Importante: Puede suceder que $\operatorname{Im}(T) = W$ ó $\operatorname{Im}(T) \subset W$.

Ejemplos

1. Al considerar la transformación lineal identidad definida de V en V, es sencillo concluir que el conjunto imagen de T es el mismo V

2. Sea la transformación lineal:

$$T : IR^2 \rightarrow IR^2 \text{ tal que}$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtención de Im(T): $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \operatorname{Im}(T) \Leftrightarrow T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

Luego se tiene $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

de donde se deduce que los elementos del conjunto imagen de T son los pares ordenados (a, b) tal que b debe ser cero y a, cualquier real. Es decir

$$\operatorname{Im}(T) = \{(a,b) / a \in IR \wedge b = 0\} \text{ o de otra forma}$$

$$\operatorname{Im}(T) = \{(a,0) / a \in IR\}$$

NÚCLEO E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Propiedades del núcleo y de la imagen de una transformación lineal

Sea T una transformación lineal del espacio V en W entonces el conjunto núcleo de T es un subespacio vectorial del dominio V.

Demostración:

Para demostrar que el núcleo de T es un subespacio, se debe probar que:

1. *El núcleo de T es un subconjunto de V*. Esto es cierto, puesto que el núcleo de T está incluido en el dominio de la función.

2. *El núcleo de T contiene al menos a un vector*. Es decir, es un conjunto distinto del vacío. Esto es cierto, ya que el vector nulo está en el conjunto núcleo, por tratarse de un espacio vectorial.

NÚCLEO E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

3. *El conjunto núcleo de T es cerrado bajo la adición y bajo la multiplicación por un escalar*. Los requisitos mencionados permiten determinar si un conjunto es un subespacio vectorial de un espacio, para lo cual se usa el teorema correspondiente.

Luego,

a. Sean $u_1 \in N(T)$ y $u_2 \in N(T)$. De este modo, $T(u_1)=0$ y $T(u_2)=0$.

Para que se verifique la ley de cierre para la suma en el conjunto núcleo de T, debe ser cierto que: $\boxed{(u_1+u_2)\in N(T)}$, es decir, el vector (u_1+u_2) debe satisfacer que tiene por imagen al vector nulo. Considere $T(u_1+u_2)$

$$\underbrace{T(u_1+u_2)=T(u_1)+T(u_2)}_{T\ \text{transformación lineal}}=\overset{\text{por ser } u_1 \text{ y } u_2 \text{ elementos del núcleo}}{\underbrace{0+0=0}_{\text{en un E.V.}}}$$

Es decir, $T(u_1+u_2)=0$, con lo cual se concluye que $\boxed{(u_1+u_2)\in N(T)}$.

NÚCLEO E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

b. Sea $u_1 \in N(T)$ y $k \in IR$. De este modo, $T(u_1) = 0$.
Para que se verifique la ley de cierre para el producto en el conjunto núcleo de T, debe ser cierto que: $\boxed{(k \cdot u_1) \in N(T)}$, es decir, el vector $(k \cdot u_1)$ debe satisfacer que tiene por imagen al vector nulo. Considere entonces $T(k \cdot u_1)$

$$\underbrace{T(k \cdot u_1) = k \cdot T(u_1)}_{T\ \text{transformación lineal}} \overset{\text{por ser } u_1 \text{ elemento del núcleo}}{=} \underbrace{k \cdot 0 = 0}_{\text{en un E.V.}}$$

Es decir, $T(k \cdot u_1) = 0$, con lo cual se concluye que $\boxed{(k \cdot u_1) \in N(T)}$.

Luego: ***N(T)* es un subespacio vectorial del espacio V.**

NÚCLEO E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Propiedad

Sea T una transformación lineal del espacio V en W entonces el conjunto imagen de T es un subespacio vectorial del codominio W.

Notas

• Puesto que el núcleo de T es un espacio vectorial, puede conocerse su dimensión. A la dimensión del núcleo de una transformación lineal se la llama *nulidad* de la transformación lineal. En símbolos: n(T**).**

• Puesto que imagen de T es un espacio vectorial, puede conocerse su dimensión. A la dimensión del conjunto imagen de una transformación lineal se la denomina *rango* de la transformación lineal. En símbolos: $\rho(T)$

DIMENSIÓN

Teorema de la Dimensión

Sea T de un espacio V en otro W una transformación lineal entonces se verifica:

$$\dim V = \dim N(T) + \dim Im (T)$$

De otra forma:

$$n = \text{nulidad } (T) + \text{rango } (T)$$

CLASIFICACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Definiciones

- Se dice que una transformación lineal T del espacio V en W es un **monomorfismo** si la transformación lineal es inyectiva.
- Se dice que una transformación lineal T del espacio V en W es un **epimorfismo** si la transformación lineal es sobreyectiva.
- Se dice que una transformación lineal T del espacio V en W es un **isomorfismo** si y solo si es monomorfismo y epimorfismo.
- Se dice que una transformación lineal T del espacio V en W es un **endomorfismo** si V=W.
- Se dice que una transformación lineal T es un **automorfismo** si es un endomorfismo biyectivo.

PROPIEDADES DEL NÚCLEO E IMAGEN

Propiedad del Núcleo de una TL

- Sea la función T del espacio V en W una transformación lineal, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) T es **monomorfismo**

b) N(T) = {**0**}

c) nulidad(T) = 0

PROPIEDADES DEL NÚCLEO E IMAGEN

Propiedad de la Imagen de una TL

• Sea la función T del espacio V en W una transformación lineal, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) T es **epimorfismo**

b) Im(T) = W

Ejemplo

La función

T: $R^2 \rightarrow R^2$ tal que

T((x, y)) = (2x+y, 3x+2y)

Es un automorfismo.

Analiza la transformación lineal definida y confirma la afirmación.

REFRESCANDO LA MEMORIA

Dado que las transformaciones lineales son un tipo especial de función, recordamos una clasificación de funciones:

Definiciones

- Se dice que una función f de A en B es **inyectiva** si para todo par de elementos $x_1, x_2 \in A$ se cumple que:

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2.$$

(O equivalentemente: $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)

- Se dice que una función f de A en B es **sobreyectiva** si para todo $y \in B$ existe al menos un $x \in A$ que es su preimagen, es decir: $y = f(x)$.